Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Л. Ю. Колотилина

О ДЕТЕРМИНАНТНЫХ УСЛОВИЯХ ДИАГОНАЛЬНОГО ПРЕОБЛАДАНИЯ

1. Введение

В работе рассматриваются некоторые достаточные детерминантные условия невырожденности, которые применимы не только в случае H-матриц. Основная идея состоит в том, чтобы найти линейные комбинации строк исходной матрицы, которые обладали бы строгим диагональным преобладанием. С этой целью рассматриваются обратные к главным подматрицам и используется правило Крамера.

Полученные результаты имеют непосредственное отношение к достаточно старым результатам Бреннера [1], а также к недавним результатам Мелмана [4], которые мы напоминаем ниже.

Теорема 1.1 [1]. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, такова, что модуль главного минора, составленного из элементов первых двух строк, строго больше, чем сумма модулей всех неглавных миноров, составленных из элементов тех же самых строк:*

$$2\left|\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right| > \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\left|\det\begin{bmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k}\end{bmatrix}\right|. \tag{1.1}$$

Кроме того, пусть в остальных $n-2$ строках имеется строгое диагональное преобладание:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|, \quad i = 3,\dots,n. \tag{1.2}$$

Тогда $\det A \neq 0$.

В работе [1] Бреннер также доказал следующее обобщение теоремы 1.1.

Ключевые слова: невырожденность, правило Крамера, диагональное преобладание, миноры, структурированные матрицы, теорема Гершгорина, теорема Островского–Брауэра, множества, содержащие собственные значения, оценки определителей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

Теорема 1.2 [1]. *Пусть A – это $n \times n$ квадратная матрица (a_{ij}). Пусть $n = r_1 + \dots + r_i + \dots + r_s$ – это разбиение n на две или более части. Пусть модуль главного минора из элементов некоторой группы, состоящей из r_1 строк, строго больше, чем сумма модулей остальных $-1 + C^n_{r_1}$ миноров, составленных из элементов этих строк; пусть, далее, модуль главного минора из элементов дизъюнктной группы из r_2 строк строго больше, чем сумма модулей остальных миноров, составленных из элементов тех же строк, и т.д.*

Тогда $\det A \neq 0$.

Ясно, что в том случае, когда $r_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, любая матрица, удовлетворяющая условиям теоремы 1.2, обладает строгим диагональным преобладанием в классическом смысле. Тем самым теорема 1.2 обобщает понятие обычного диагонального преобладания до понятия детерминантного диагонального преобладания. Другое обобщение того же типа было предложено Мелманом в работе [4], который, как это ни странно, не обратил внимания на детерминантную природу предложенных им условий (ни в [4], ни в [3]). Мелман доказал следующий результат.

Теорема 1.3 [4]. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$. Если*

$$|a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}| > \min\left\{ \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} |a_{jj}a_{ik} - a_{ij}a_{jk}|,\ \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} |a_{ii}a_{jk} - a_{ji}a_{ik}| \right\}$$

$$\text{для всех}\quad i, j \in \langle n\rangle,\quad i \neq j, \tag{1.3}$$

то $\det A \neq 0$.

Здесь и ниже используется обозначение $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что условия (1.3) в точности равносильны детерминантным условиям

$$\left|\det\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{bmatrix}\right| > \min_{s=i,j} \sum_{k\neq i,j} \left|\det\begin{bmatrix} a_{is} & a_{ik}\\ a_{js} & a_{jk}\end{bmatrix}\right|$$

$$\text{для всех}\quad i, j \in \langle n\rangle,\quad i \neq j. \tag{1.3$'$}$$

Замечание 1.1. Поскольку, очевидно,

$$\sum_{k\neq i,j} |a_{jj}a_{ik} - a_{ij}a_{jk}| \leqslant |a_{jj}|r''_{ij}(A) + |a_{ij}|r''_{ji}(A)$$

и

$$\sum_{k\neq i,j} |a_{ii}a_{jk} - a_{ji}a_{ik}| \leqslant |a_{ii}|r''_{ij}(A) + |a_{ji}|r''_{ij}(A),$$

где используется обозначение

$$r''_{sr}(A) = \sum_{k\neq s,r} |a_{sk}|, \quad s \neq r, \quad 1 \leqslant s, r \leqslant n,$$

то из теоремы 1.3 следует, что матрица A заведомо является невырожденной, когда выполнены следующие более сильные условия, также предложенные в [4]:

$$|a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}| > \min\left\{|a_{jj}|r''_{ij}(A) + |a_{ij}|r''_{ji}(A),\ |a_{ii}|r''_{ji}(A) + |a_{ji}|r''_{ij}(A)\right\}$$
$$\text{для всех} \quad i, j \in \langle n\rangle, \quad i \neq j. \tag{1.4}$$

Замечание 1.2. Как следует из теоремы 2.3 работы [4] или легко проверяется, для любой пары индексов i, j $(i \neq j)$ неравенство (1.4) является следствием соответствующего условия строгого диагонального преобладания в смысле Островского–Брауэра:

$$|a_{ii}||a_{jj}| > r'_i(A)r'_j(A), \tag{1.5}$$

где

$$r'_i(A) = \sum_{k\neq i} |a_{ik}|, \quad i \in \langle n\rangle.$$

Таким образом, теорема 1.3 улучшает теорему Островского–Брауэра (см., например, [8, Theorem 2.1]). Как легко видеть, из условия (1.5) в действительности вытекает даже более сильное неравенство

$$|a_{ii}a_{jj}| - |a_{ij}a_{ji}| > \min\left\{|a_{jj}|r''_{ij}(A) + |a_{ij}|r''_{ji}(A),\ |a_{ii}|r''_{ji}(A) + |a_{ji}|r''_{ij}(A)\right\}, \tag{1.6}$$

которое зависит только от модулей элементов матрицы A.

В этой работе мы предлагаем достаточные условия невырожденности, основанные на детерминантных соотношениях, которые соответствуют обычному диагональному преобладанию в строках матрицы, полученной из исходной с помощью специального преобразования. Таким образом, в частности, удается весьма значительно ослабить достаточные условия теорем 1.1 и 1.2. Что же касается теоремы 1.3, то мы приводим альтернативное доказательство достаточности условий (1.3′) для невырожденности A, которое выявляет связь этого результата с диагональным преобладанием.

В качестве специального приложения мы рассматриваем матричные классы, исследованные в статье [3] и обладающие свойствами структурной симметрии определенного типа. Мы показываем, что для этих классов структурированных матриц достаточные условия невырожденности, установленные в [3], тривиальным образом следуют из общих детерминантных условий бреннеровского типа, полученных в данной работе.

Статья построена следующим образом. Вопросы, связанные с невырожденностью, рассматриваются в разделе 2. В разделе 3 описываются области, содержащие собственные значения матрицы, которые соответствуют результатам о невырожденности, установленным в разделе 2. Наконец, в разделе 4 представлены простейшие двусторонние оценки определителей матриц, удовлетворяющих некоторым детерминантным условиям невырожденности.

В статье используются следующие дополнительные обозначения:
• δ_{ij} – символ Кронекера.
• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$r_k(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|, \quad k = 1, \ldots, n.$$

• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ через a_i обозначается i-ая строка матрицы A, $i = 1, \ldots, m$, а через $a^{(i)}$ – ее i-ый столбец, $i = 1, \ldots, n$.
• Для вектора $x \in \mathbb{C}^n$ и непустого подмножества $S \subseteq \langle n\rangle$

$$x[S] = (x_i)_{i\in S}$$

есть подвектор вектора x, ассоциированный с индексным подмножеством S.
• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и непустого подмножества $S \subseteq \langle n\rangle$

$$A[S] = (a_{ij})_{i,j\in S}$$

есть главная подматрица матрицы A, лежащая на пересечении ее строк и столбцов с номерами из подмножества S.

2. Достаточные условия невырожденности

Все результаты о невырожденности матриц, представленные в этом разделе, основываются на следующей элементарной лемме.

Лемма 2.1. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $1 \leqslant p \leqslant n$, *представлена в блочном виде*

$$A = [\, A_{11} \quad A_{12} \,],$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{p\times p}$. *Предположим, что* A_{11} *невырождена, и введем обозначение*

$$B = A_{11}^{-1} A. \tag{2.1}$$

Тогда элементы матрицы B *вычисляются по формуле*

$$b_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & j \leqslant p, \\ \Delta_j^{(i)}/\Delta, & j > p, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\Delta = \det A_{11},$$

а $\Delta_j^{(i)}$ *– это минор, получающийся из* Δ *заменой* i*-го столбца* A_{11} *на* j*-ый столбец* A.

Доказательство. Пусть $j \geqslant p + 1$. Ввиду (2.1), мы имеем

$$b^{(j)} = A_{11}^{-1} a^{(j)}.$$

Это означает, что $b^{(j)}$ является решением системы линейных уравнений $A_{11} b^{(j)} = a^{(j)}$, и доказательство завершается применением формул Крамера. □

Мы будем использовать следующий результат, который получается из леммы 2.1 симметричной перестановкой строк и столбцов.

Следствие 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $T = (t_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Пусть* $i \in S \subseteq \langle n \rangle$. *Обозначим*

$$C = (c_{rs}) = (A[S])^{-1}.$$

Если элементы i*-ой строки матрицы* T *определены с помощью соотношений*

$$t_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & j \in S, \\ 0, & j \notin S, \end{cases} \tag{2.3}$$

то элементы i-ой строки матрицы $B = (b_{ij}) = TA$ вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & j \in S, \\ \Delta_j^{(i)}/\Delta, & j \notin S, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Здесь $\Delta = \det A[S]$, а $\Delta_j^{(i)}$, $j \notin S$, – это минор, который получается из Δ заменой столбца $a^{(i)}[S]$ на столбец $a^{(j)}[S]$.

Следствие 2.1 дает выражения для элементов специфической линейной комбинации строк матрицы A с номерами из S в терминах главного и неглавных миноров, составленных из элементов этих строк. Из этого результата немедленно вытекают следующие необходимые и достаточные условия диагонального преобладания в i-ой строке матрицы B.

Следствие 2.2. *Пусть выполнены условия следствия* 2.1. *Неравенство*

$$|b_{ii}| > r'_i(B)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$|\Delta| > \sum_{j \notin S} |\Delta_j^{(i)}|. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. Если в условиях следствия 2.1

$$S = \{i, k\}, \quad \text{где} \quad k \neq i,$$

то, как нетрудно убедиться, каждое из следующих условий является достаточным для выполнения неравенства (2.5):

$$|a_{kk}|(|a_{ii}| + |a_{ik}|) > |a_{ik}|r'_k(A) + |a_{kk}|r'_i(A), \tag{2.6}$$

$$2|a_{ik}|(|a_{kk}| + |a_{ki}|) > |a_{kk}|r_i(A) + |a_{ik}|r_k(A). \tag{2.7}$$

Заметим, кроме того, что условие (2.6) выполнено, если $|a_{ii}| > r'_i(A)$ и $|a_{kk}| > r'_k(A)$, т.е. в обеих строках i и k имеется строгое диагональное преобладание. С другой стороны, условие (2.7) выполнено, если $2|a_{ik}| > r_i(A)$ и $2|a_{ki}| > r_k(A)$, т.е. диагональное преобладание в этих строках может быть получено их перестановкой (а также и перестановкой соответствующих столбцов).

Следующие достаточные детерминантные условия невырожденности матрицы вытекают из следствия 2.2.

Теорема 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть*

$$i \in S_i \subseteq \langle n \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим

$$\Delta_i = \det A[S_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

и пусть для всех $i \in \langle n \rangle$ *и для всех* $j \notin S_i$ *минор* $\Delta_j^{(i)}$ *получается из* Δ_i *заменой столбца* $a^{(i)}[S_i]$ *на столбец* $a^{(j)}[S_i]$.

Если

$$|\Delta_i| > \sum_{j \notin S_i} \left| \Delta_j^{(i)} \right|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.8}$$

то $\det A \neq 0$.

Замечание 2.2. Из условий (2.8), в частности, следует, что $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, а значит все главные подматрицы $A[S_i]$, $i = 1, \dots, n$, необходимо являются невырожденными.

Замечание 2.3. Заметим, что если $|S_i| = 1$ и $S_i = \{i\}$, то $\Delta_i = a_{ii}$ и $\Delta_j^{(i)} = a_{ij}$, $j \neq i$. Таким образом, в рассматриваемом случае i-ое детерминантное условие диагонального преобладания в (2.8) превращается в обычное условие строгого диагонального преобладания в строке i.

В специальном случае, рассмотренном Бреннером, из теоремы 2.1 вытекает следующий результат.

Слесдвтие 2.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Если*

$$\left| \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| > \max_{i=1,2} \sum_{k=3}^{n} \left| \det \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2k} \end{bmatrix} \right| \tag{2.9}$$

и

$$|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|, \quad k = 3, \dots, n,$$

то $\det A \neq 0$.

Доказательство. В теореме 2.1 следует положить

$$S_1 = S_2 = \{1, 2\}, \quad S_i = \{i\}, \quad i = 3, \dots, n. \qquad \square$$

Очевидно, что при $n \geqslant 3$ следствие 2.3 дает весьма существенное улучшение теоремы 1.1. Аналогичное улучшение теоремы 1.2 дает следующий результат, который обобщает следствие 2.3 и, с точностью до перестановок строк и столбцов, описывает тот случай, когда блочная матрица приобретает свойство строгого диагонального преобладания в результате ее блочного масштабирования по Якоби.

Следствие 2.4. *Пусть* $\langle n\rangle = \sum_{k=1}^{s} T_k$, *где* $2 \leqslant s \leqslant n$ *и* $r_k = |T_k| \geqslant 1$, $k = 1,\dots,s$, *– разбиение индексного множества* $\langle n\rangle$ *и пусть строки матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *разбиты на соответствующие группы, состоящие из* r_k *строк,* $k = 1,\dots,s$. *Пусть*

$$\Delta_k = \det A[T_k], \quad k = 1,\dots,s,$$

и пусть для всех $i \in T_k$ *и для всех* $j \notin T_k$, *минор* $\Delta_j^{(k,i)}$ *получается из главного минора* Δ_k *заменой его столбца* $a^{(i)}[T_k]$ *на столбец* $a^{(j)}[T_k]$.

Если выполнено условие

$$|\Delta_k| > \max_{i\in T_k} \sum_{j\notin T_k} |\Delta_j^{(k,i)}|, \quad k = 1,\dots,s, \tag{2.10}$$

то $\det A \neq 0$.

Доказательство. Следствие 2.4 легко получается из теоремы 2.1, если положить

$$S_i = T_k \quad \text{для всех} \quad i \in T_k, \quad k = 1,\dots,s. \qquad \square$$

Ясно, что детерминантные условия диагонального преобладания (2.10) намного слабее, чем условия Бреннера в теореме 1.2.

Рассмотрим частный случай следствия 2.4, в котором $r_k \leqslant 2$. Обозначим $i' = n - i + 1$, $i = 1,\dots,n$, положим

$$s = \begin{cases} n/2, & \text{если } n \text{ четное}, \\ (n+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетное}, \end{cases}$$

и определим

$$T_i = \{i, i'\}, \quad i = 1,\dots,\lfloor n/2\rfloor,$$

а если n нечетное, то также положим $T_s = \{(n+1)/2\}$.

В этих предположениях следствие 2.4 приобретает следующий вид.

Следствие 2.5. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Предположим, что*

$$\left|\det\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ii'} \\ a_{i'i} & a_{i'i'}\end{bmatrix}\right| > \max_{r=i,i'} \sum_{k\neq i,i'} \left|\det\begin{bmatrix} a_{ir} & a_{ik} \\ a_{i'r} & a_{i'k}\end{bmatrix}\right|,$$
$$i = 1,\ldots,\lfloor n/2\rfloor, \qquad (2.11)$$

а если n нечетно, то также предположим, что

$$|a_{ss}| > \sum_{k\neq s} |a_{sk}|. \qquad (2.12)$$

В этом случае $\det A \neq 0$.

Оказывается, что все достаточные условия гершгоринского типа, полученные в работе [3] для некоторых классов структурированных матриц, легко вытекают из следствия 2.5, которое само по себе отнюдь не связано ни с какими свойствами типа симметрии. (Однако мы специально положили $i' = n - i + 1$ для того, чтобы наши условия могли быть непосредственно применены к матрицам из классов, рассмотренных в [3].) Как нетрудно убедиться, если матрица A *центросимметрична*, т.е. $a_{ij} = a_{i'j'}$ для всех $i, j \in \langle n\rangle$, или A *кососцентросимметрична*, т.е. $a_{ij} = -a_{i'j'}$ для всех $i, j \in \langle n\rangle$, то условия (2.11) сводятся к условиям

$$\left|a_{ii}^2 - a_{ii'}^2\right| > \sum_{k\neq i,i'} |a_{ii}a_{i'k} - a_{i'i}a_{ik}|, \quad i = 1,\ldots,\lfloor n/2\rfloor. \qquad (2.13)$$

Если же A *центроэрмитова*, т.е. $a_{ij} = \bar{a}_{i'j'}$ для всех $i, j \in \langle n\rangle$, или же A *косоцентроэрмитова*, т.е. $a_{ij} = -\bar{a}_{i'j'}$ для всех $i, j \in \langle n\rangle$, то условия (2.11) принимают вид

$$\left||a_{ii}|^2 - |a_{ii'}|^2\right| > \sum_{k\neq i,i'} |a_{ii}a_{i'k} - a_{i'i}a_{ik}|, \quad i = 1,\ldots,\lfloor n/2\rfloor. \qquad (2.14)$$

Подчеркнем, что для рассмотренных выше четырех матричных классов максимум в правой части (2.11) исчезает.

Для оставшихся четырех классов структурно симметричных матриц, рассмотренных в [3], а именно, для *персимметричных* ($a_{ij} = a_{j'i'}$), *кососперсимметричных* ($a_{ij} = -a_{j'i'}$), *перэрмитовых* ($a_{ij} = \bar{a}_{j'i'}$) и *косоперэрмитовых* ($a_{ij} = -\bar{a}_{j'i'}$) матриц условия невырожденности, учитывающие их тип симметрии, также тривиально получаются из следствия 2.5, но для них максимум в правой части (2.11) уже не исчезает.

Рассмотрим еще одно непосредственное следствие теоремы 2.1, имеющее прямое отношение к теореме 1.3.

Следствие 2.6. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$. *Предположим, что для каждого* $i \in \langle n\rangle$ *найдется индекс* $j = j(i) \neq i$ *такой, что*

$$\left|\det\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{bmatrix}\right| > \sum_{k\neq i,j}\left|\det\begin{bmatrix} a_{ik} & a_{ij} \\ a_{jk} & a_{jj}\end{bmatrix}\right|. \tag{2.15}$$

Тогда $\det A \neq 0$.

Для того, чтобы представить наше доказательство теоремы 1.3, которое проясняет природу этого результата, т.е. его связь с диагональным преобладанием, нам потребуется следующая лемма. Она показывает, что если две строки матрицы могут быть преобразованы в строки со строгим диагональным преобладанием посредством линейного комбинирования с некоторой третьей строкой, то диагональный элемент этой последней строки обязательно отличен от нуля.

Лемма 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, *и пусть условие*

$$\left|\det\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{bmatrix}\right| > \sum_{k\neq i,j}\left|\det\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jk}\end{bmatrix}\right| \tag{2.16}$$

выполнено для некоторого $i \in \langle n\rangle$ *и для, по меньшей мере, двух различных значений* j_1 *и* j_2. *Тогда* $a_{ii} \neq 0$.

Доказательство. Допустим, что

$$a_{ii} = 0.$$

Тогда при $j = j_1$ из (2.16) следует, что

$$|a_{ij_1}||a_{j_1 i}| > \sum_{k\neq i,j_1} |a_{ik}|\,|a_{j_1 i}| \geqslant |a_{ij_2}||a_{j_1 i}|,$$

откуда вытекает, во-первых, что $a_{j_1 i} \neq 0$ и, во-вторых, что

$$|a_{ij_1}| > |a_{ij_2}|.$$

Совершенно аналогично выводится неравенство

$$|a_{ij_2}| > |a_{ij_1}|.$$

Полученное противоречие доказывает, что $a_{ii} \neq 0$. □

Теперь мы готовы привести альтернативное доказательство теоремы 1.3.

Доказательство теоремы 1.3. Если выполнены условия следствия 2.6, то матрица A невырождена. В противном случае найдется такая строка a_i, $i \in \langle n \rangle$, что

$$\left|\det \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}\right| \leqslant \sum_{k \neq i,j} \left|\det \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{ij} \\ a_{jk} & a_{jj} \end{bmatrix}\right| \quad \text{для всех} \quad j \neq i.$$

Тогда из условия $(1.3')$ теоремы 1.3 сдедует, что

$$\left|\det \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}\right| > \sum_{k \neq i,j} \left|\det \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jk} \end{bmatrix}\right| \quad \text{для всех} \quad j \neq i. \tag{2.17}$$

Применяя лемму 2.2, мы заключаем, что $a_{ii} \neq 0$. Но, ввиду следствия 2.2, условия (2.17) означают, что во всех строках a_j, $j \neq i$, можно добиться диагонального преобладания путем перехода к линейной комбинации со строкой a_i, причем результирующие строки имеют нулевые элементы в столбце i. Таким образом, возможно после симметричной перестановки строк и столбцов, мы придем к матрице вида

$$\begin{bmatrix} a_{ii} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$, а матрица B' имеет строгое диагональное преобладание. Эта матрица, очевидно, невырождена. Но тогда и исходная матрица A также невырождена. □

Замечание 2.4. Как легко убедиться, соотношения (2.17) в действительности означают, что дополнение по Шуру элемента a_{ii} в A имеет строгое диагональное преобладание.

В заключение данного раздела заметим, что невырожденность преобразованной матрицы $B = (b_{ij}) = TA$ (см. следствие 2.1) может быть обеспечена не только гершгоринскими условиями строгого диагонального преобладания, но также и некоторыми более слабыми условиями. Например, условия Островского–Брауэра

$$|b_{ii}||b_{jj}| > r_i'(B) r_j'(B) \quad \text{для всех} \quad i \neq j \tag{2.18}$$

или ослабленные условия [2], учитывающие структуру разреженности матрицы B,

$$|b_{ii}||b_{jj}| > r_i'(B)r_j'(B) \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad |a_{ij}| + |a_{ji}| \neq 0, \qquad (2.19)$$

гарантируют, что как B, так и A невырождены. Эти условия применимы, поскольку, по следствию 2.1, элементы матрицы B известны и, более того, часть позиций, на которых в B стоят нулевые элементы, предопределена выбором множеств S_i, определенных в теореме 2.1.

Например, поскольку, по следствию 2.1, в предположениях, предшествующих следствию 2.5, мы имеем

$$b_{ii'} = b_{i'i} = 0, \quad i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor,$$

то с помощью (2.19) мы приходим к следующим достаточным условиям невырожденности.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$. Предположим, что*

$$\left|\det\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ii'} \\ a_{i'i} & a_{i'i'}\end{bmatrix}\right|\left|\det\begin{bmatrix} a_{jj} & a_{jj'} \\ a_{j'j} & a_{j'j'}\end{bmatrix}\right| > \left(\max_{r=i,i'} \sum_{k\neq i,i'} \left|\det\begin{bmatrix} a_{ir} & a_{ik} \\ a_{i'r} & a_{i'k}\end{bmatrix}\right|\right)$$

$$\left(\max_{s=j,j'} \sum_{l\neq j,j'} \left|\det\begin{bmatrix} a_{js} & a_{jl} \\ a_{j's} & a_{j'l}\end{bmatrix}\right|\right) \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant \lfloor n/2 \rfloor, \quad (2.20)$$

а если n – нечетное число, $n = 2m+1$, то дополнительно предположим, что

$$|a_{m+1,m+1}|\left|\det\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ii'} \\ a_{i'i} & a_{i'i'}\end{bmatrix}\right| > r'_{m+1}(A) \max_{r=i,i'} \sum_{k\neq i,i'} \left|\det\begin{bmatrix} a_{ir} & a_{ik} \\ a_{i'r} & a_{i'k}\end{bmatrix}\right|, \quad i = 1, \dots, m. \qquad (2.21)$$

Тогда матрица A невырождена.

Как нетрудно понять, теорема 2.2 обобщает на случай произвольных матриц достаточные условия невырожденности, предложенные в теореме 5.3 из [3] для центросимметричных матриц. Ясно, что и для всех остальных классов структурированных матриц, рассмотренных в [3], условия невырожденности типа Островского–Брауэра легко выводятся из теоремы 2.2.

3. Множества, содержащие собственные значения

Достаточные условия невырожденности матриц, представленные в разделе 2, стандартным образом переформулируются как соответствующие теоремы о множествах, содержащих все их собственные значения. Так, если z – это собственное значение матрицы A, то, по теореме 1.3, вырожденная матрица $A - zI_n$ не может удовлетворять условиям $(1.3')$ для всех $i \neq j$, что приводит нас к следующему результату.

Теорема 3.1. *Все собственные значения матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, принадлежат множеству*

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left|\det \begin{bmatrix} a_{ii}-z & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}-z \end{bmatrix}\right| \right.$$
$$\left. \leqslant \min_{s=i,j} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} \left|\det \begin{bmatrix} a_{is}-\delta_{is}z & a_{ik} \\ a_{js}-\delta_{js}z & a_{jk} \end{bmatrix}\right| \right\}. \qquad (3.1)$$

Как легко убедиться (см. замечание 1.1), правая часть в (3.1) не превосходит значения

$$\min\left\{|a_{ii}-z|r''_{ji}(A) + |a_{ji}|r''_{ij}(A),\ |a_{jj}-z|r''_{ij}(A) + |a_{ij}|r''_{ji}(A)\right\},$$

так что теорема 2.1 из работы [4] является следствием из приведенной выше теоремы 3.1.

Отметим, что множество (3.1), очевидно, содержит собственные значения всех 2×2 главных подматриц $\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}$, $i \neq j$, матрицы A, но оно не обязано содержать диагональные элементы A, т.е. собственные значения ее главных подматриц порядка один (см. [4]), если только они не совпадают с собственными значениями 2×2 главных подматриц.

Следует также отметить, что, ввиду замечания 1.2, множество (3.1) содержится в множестве Островского–Брауэра

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ |a_{ii}-z||a_{jj}-z| \leqslant r'_i(A)r'_j(A) \right\}. \qquad (3.2)$$

Из этих замечаний, в частности, следует, что множество Островского–Брауэра (3.2), которое, очевидно, содержит диагональные элементы A, также содержит и все собственные значения ее главных подматриц порядка два. Конечно же, этот факт следует и непосредственно из (3.2). Однако он, по-видимому, не всегда осознается.

Другое множество, содержащее все собственные значения матрицы, которое также определяется в терминах миноров, составленных из элементов пар ее строк, легко выводится из следствия 2.5 и приведено в следующей теореме. Подчеркнем, что теорема 3.2 – это всего лишь непосредственное следствие классической теоремы Леви–Депланка, но в применении к преобразованной матрице $T(A - zI_n)$.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, и пусть $i' = n - i + 1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Если n четно, то все собственные значения A принадлежат множеству

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \left|\det \begin{bmatrix} a_{ii} - z & a_{ii'} \\ a_{i'i} & a_{i'i'} - z \end{bmatrix}\right| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,i'}}^{n} \left|\det \begin{bmatrix} a_{ii} - z & a_{ik} \\ a_{i'i} & a_{i'k} \end{bmatrix}\right| \right\}, \tag{3.3}$$

а если n нечетно, $n = 2m+1$, то все собственные значения A принадлежат множеству

$$\bigl\{ z \in \mathbb{C} :\ |a_{m+1,m+1} - z| \leqslant r'_{m+1}(A) \bigr\} \cup \tag{3.4}$$
$$\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq m+1}}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \left|\det \begin{bmatrix} a_{ii} - z & a_{ii'} \\ a_{i'i} & a_{i'i'} - z \end{bmatrix}\right| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,i'}}^{n} \left|\det \begin{bmatrix} a_{ii} - z & a_{ik} \\ a_{i'i} & a_{i'k} \end{bmatrix}\right| \right\}.$$

Следующий результат, который имеет несколько более простой вид, чем теорема 3.2, является ее непосредственным следствием.

Следствие 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, и пусть $i' = n - i + 1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Если n четно, то все собственные значения A принадлежат множеству

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigl\{ z \in \mathbb{C} :\ |(a_{ii} - z)(a_{i'i'} - z) - a_{ii'}a_{i'i}| \leqslant |a_{ii} - z| r''_{i'i} + |a_{i'i}| r''_{ii'} \bigr\}, \tag{3.5}$$

а если n нечетно, $n = 2m+1$, то все собственные значения A содержатся в множестве

$$\bigl\{z \in \mathbb{C}: \ |a_{m+1,m+1} - z| \leqslant r'_{m+1}(A)\bigr\} \cup \tag{3.6}$$

$$\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq m+1}}^{n} \ \{z \in \mathbb{C}: \ |(a_{ii}-z)(a_{i'i'}-z) - a_{ii'}a_{i'i}| \leqslant |a_{ii}-z|r''_{i'i} + |a_{i'i}|r''_{ii'}\}\,.$$

Из следствия 3.1, в частности, легко получаются результаты, установленные в работе [3] для некоторых специальных классов структурированных матриц.

Улучшение теоремы 3.2, вытекающее из теоремы 2.2, представлено ниже.

Теорема 3.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, и пусть $i' = n-i+1$, $i = 1,\ldots,n$.*

Если n четно, то все собственные значения A принадлежат множеству

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left\{ z\in\mathbb{C}: \ \left|\det\begin{bmatrix} a_{ii}-z & a_{ii'}\\ a_{i'i} & a_{i'i'}-z\end{bmatrix}\right| \left|\det\begin{bmatrix} a_{jj}-z & a_{jj'}\\ a_{j'j} & a_{j'j'}-z\end{bmatrix}\right| \right.$$

$$\left. \leqslant \left(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,i'}}^{n} \left|\det\begin{bmatrix} a_{ii}-z & a_{ik}\\ a_{i'i} & a_{i'k}\end{bmatrix}\right|\right)\left(\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j,j'}}^{n} \left|\det\begin{bmatrix} a_{jj}-z & a_{jl}\\ a_{j'j} & a_{j'l}\end{bmatrix}\right|\right)\right\}, \tag{3.7}$$

а если n нечетно, $n = 2m+1$, то все собственные значения A содержатся в множестве

$$\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq m+1}}^{n} \left\{ z\in\mathbb{C}: \ |a_{m+1,m+1}-z| \left|\det\begin{bmatrix} a_{ii}-z & a_{ii'}\\ a_{i'i} & a_{i'i'}-z\end{bmatrix}\right| \right.$$

$$\left. \leqslant r'_{m+1}(A) \ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,i'}}^{n} \left|\det\begin{bmatrix} a_{ii}-z & a_{ik}\\ a_{i'i} & a_{i'k}\end{bmatrix}\right| \right\} \cup$$

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i,j\neq m+1,\, i\neq j}}^{n} \ \left\{ z\in\mathbb{C}: \ \left|\det\begin{bmatrix} a_{ii}-z & a_{ii'}\\ a_{i'i} & a_{i'i'}-z\end{bmatrix}\right| \left|\det\begin{bmatrix} a_{jj}-z & a_{jj'}\\ a_{j'j} & a_{j'j'}-z\end{bmatrix}\right| \right.$$

$$\leqslant \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,i'}}^{n} \left| \det \begin{bmatrix} a_{ii}-z & a_{ik} \\ a_{i'i} & a_{i'k} \end{bmatrix} \right| \right) \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j,j'}}^{n} \left| \det \begin{bmatrix} a_{jj}-z & a_{jl} \\ a_{j'j} & a_{j'l} \end{bmatrix} \right| \right) \Bigg\}. \quad (3.8)$$

Аналогично теореме 3.2, теорема 3.3 может быть ослаблена и упрощена следующим образом.

Следствие 3.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, *и пусть* $i' = n-i+1$, $i = 1, \dots, n$.

Если n четно, то все собственные значения A принадлежат множеству

$$\bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \big\{ z \in \mathbb{C} : \ |(a_{ii}-z)(a_{i'i'}-z) - a_{ii'}a_{i'i}| \, |(a_{jj}-z)(a_{j'j'}-z) - a_{jj'}a_{j'j}|$$

$$\leqslant \left(|a_{ii}-z|r''_{i'i} + |a_{i'i}|r''_{ii'}\right)\left(|a_{jj}-z|r''_{j'j} + |a_{j'j}|r''_{jj'}\right) \big\}, \quad (3.9)$$

а если n нечетно, $n = 2m+1$, то все собственные значения A содержатся в множестве

$$\bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq m+1}}^{n} \big\{ z \in \mathbb{C} : \ |a_{m+1,m+1}-z| \, |(a_{ii}-z)(a_{i'i'}-z) - a_{ii'}a_{i'i}|$$

$$\leqslant r'_{m+1}(A)\left(|a_{ii}-z|r''_{i'i} + |a_{i'i}|r''_{ii'}\right) \big\} \cup$$

$$\bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i,j\neq m+1, i\neq j}}^{n} \big\{ z \in \mathbb{C} : \ |(a_{ii}-z)(a_{i'i'}-z) - a_{ii'}a_{i'i}| \, |(a_{jj}-z)(a_{j'j'}-z) - a_{jj'}a_{j'j}|$$

$$\leqslant \left(|a_{ii}-z|r''_{i'i} + |a_{i'i}|r''_{ii'}\right)\left(|a_{jj}-z|r''_{j'j} + |a_{j'j}|r''_{jj'}\right) \big\}. \quad (3.10)$$

Как легко видеть, теорема 5.1 из статьи [3], относящаяся к случаю центроэрмитовых матриц, является частным случаем теоремы 3.2.

В заключение этого раздела мы приведем множество гершгоринского типа, отвечающее теореме 2.1 данной работы, а также и соответствующее множество типа Островского–Брауэра.

Теорема 3.4. *В обозначениях теоремы* 2.1 *все собственные значения матрицы A принадлежат множеству*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |\det(A - zI_n)[S_i]| \leqslant \sum_{j\notin S_i} \left| (\det(A - zI_n)[S_i])_j^{(i)} \right| \right\}. \quad (3.11)$$

Здесь $(\det(A - zI_n)[S_i])_j^{(i)}$ *– это минор, получаемый из главного минора* $\det(A - zI_n)[S_i]$ *заменой его i-го столбца на столбец* $a^{(j)}[S_i]$.

Теорема 3.5. *В обозначениях теорем* 2.1 *и* 3.4 *все собственные значения* A *содержатся в множестве*

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \Bigg\{ z\in\mathbb{C}:\ |\det(A-zI_n)[S_i]|\ |\det(A-zI_n)[S_j]| \tag{3.12}$$

$$\leqslant \Bigg(\sum_{r\notin S_i} \Big|(\det(A-zI_n)[S_i])_r^{(i)}\Big|\Bigg)\Bigg(\sum_{s\notin S_j} \Big|(\det(A-zI_n)[S_j])_s^{(j)}\Big|\Bigg)\Bigg\}.$$

Множества (3.11) и (3.12), которые при $S_i=\{i\}$, $i=1,\dots,n$, совпадают с кругами Гершгорина и овалами Кассини соответственно, естественно рассматривать как их детерминантные обобщения на случай произвольных $S_i\subseteq\langle n\rangle$ таких, что $S_i\ni i$, $i=1,\dots,n$.

4. Оценки для определителей

В этом разделе мы приводим двусторонние оценки для определителей матриц, удовлетворяющих некоторым достаточным условиям невырожденности, представленным в разделе 2. Все эти условия основаны на предположении, что при умножении слева на некоторую матрицу T исходная матрица A преобразуется в матрицу $B=TA$, имеющую строгое диагональное преобладание. Поскольку для модулей определителей матриц со строгим диагональным преобладанием известны различные двусторонние оценки, то они переносятся и на матрицу A посредством очевидного соотношения

$$\det A=\det B/\det T. \tag{4.1}$$

Поскольку вывод оценок для определителей является не основной целью данной работы, а лишь естественным приложением предложенного подхода к получению достаточных условий невырожденности матриц, мы здесь ограничимся только простейшими из известных оценок для определителей матриц со строгим диагональным преобладанием.

Кроме того, для упрощения обозначений и формул мы также ограничимся тем случаем, когда преобразующая матрица T является блочно диагональной. В этом случае, в соответствии со следствием 2.1,

$$T=D_A^{-1}, \tag{4.2}$$

где

$$A = (A_{ij})_{i,j=1}^{s}, \quad A_{ii} = A[S_i], \quad i = 1, \ldots, s,$$

и

$$D_A = \mathrm{Diag}(A_{11}, \ldots, A_{ss}).$$

Тогда, в соответствии с (2.4), для $i \in S_k$ мы имеем:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \quad j \in S_k, \\ \Delta_j^{(k,i)}/\Delta_k, & j \notin S_k, \end{cases} \tag{4.3}$$

где

$$\Delta_k = \det A_{kk}, \quad k = 1, \ldots, s,$$

а минор $\Delta_j^{(k,i)}$ получается из Δ_k заменой столбца $a^{(i)}[S_k]$ на столбец $a^{(j)}[S_k]$.

Тем самым, для $i = 1, \ldots, n$, где $i \in S_k$, $1 \leqslant k \leqslant s$, мы получаем:

$$r_i(B) = 1 + \sum_{j \notin S_k} \left|\Delta_j^{(k,i)}\right| / |\Delta_k| \tag{4.4}$$

и

$$p_i(B) \equiv |b_{ii}| - r_i'(B) = 1 - \sum_{j \notin S_k} \left|\Delta_j^{(k,i)}\right| / |\Delta_k|. \tag{4.5}$$

Теперь в предположении, что

$$p_i(B) > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

с учетом (4.1) и с использованием нижней оценки Островского [6] и ее верхнего аналога [7],

$$\prod_{i=1}^{n} p_i(B) \leqslant |\det B| \leqslant \prod_{i=1}^{n} r_i(B), \tag{4.6}$$

мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Пусть* $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *– блочная матрица блочного порядка* s, $1 \leqslant s \leqslant n$, *и пусть во введенных выше обозначениях*

$$|\Delta_k| > \sum_{j\notin S_k} \left|\Delta_j^{(k,i)}\right|, \quad k = 1,\dots,s. \tag{4.7}$$

Тогда

$$\left(\prod_{i=1}^{s} |\Delta_i|\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \sum_{j\notin S_k} \left|\Delta_j^{(k,i)}\right| \Big/ |\Delta_k|\right) \leqslant |\det A| \leqslant \left(\prod_{i=1}^{s} |\Delta_i|\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{j\notin S_k} \left|\Delta_j^{(k,i)}\right| \Big/ |\Delta_k|\right). \tag{4.8}$$

Заметим, что в том частном случае, когда $s = n$, оценки (4.8) сводятся к классическим оценкам (4.6):

$$\prod_{i=1}^{n} p_i(A) \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} r_i(A).$$

Как хорошо известно [5, 7], оценки (4.6) допускают следующие улучшения:

$$\prod_{i=1}^{n} (b_{ii} - l_i(B)) \leqslant |\det B| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (b_{ii} + l_i(B)), \tag{4.9}$$

$$\prod_{i=1}^{n} (b_{ii} - u_i(B)) \leqslant |\det B| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (b_{ii} + u_i(B)), \tag{4.10}$$

где

$$l_i(B) = \sum_{1\leqslant j<i} |b_{ij}| \quad \text{и} \quad u_i(B) = \sum_{i<j\leqslant n} |b_{ij}|, \quad i = 1,\dots,n,$$

– это строчные суммы модулей элементов строго нижней и строго верхней треугольных частей матрицы B.

Используя при выводе оценок для $|\det B|$ неравенства (4.9) и (4.10) вместо (4.6), мы получаем следующие улучшения оценок (4.8).

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *верны следующие двусторонние оценки:*

$$\left(\prod_{i=1}^{s}|\Delta_i|\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1-\sum_{\substack{j=1\\ j\notin S_k}}^{i-1}\left|\Delta_j^{(k,i)}\right|/|\Delta_k|\right)\leqslant|\det A|$$
$$\leqslant\left(\prod_{i=1}^{s}|\Delta_i|\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{\substack{j=1\\ j\notin S_k}}^{i-1}\left|\Delta_j^{(k,i)}\right|/|\Delta_k|\right),\quad(4.11)$$

и

$$\left(\prod_{i=1}^{s}|\Delta_i|\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1-\sum_{\substack{j=i+1\\ j\notin S_k}}^{n}\left|\Delta_j^{(k,i)}\right|/|\Delta_k|\right)\leqslant|\det A|$$
$$\leqslant\left(\prod_{i=1}^{s}|\Delta_i|\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{\substack{j=i+1\\ j\notin S_k}}^{n}\left|\Delta_j^{(k,i)}\right|/|\Delta_k|\right).\quad(4.12)$$

Литература

1. J. L. Brenner, *Bounds for determinants.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954), 452–454.
2. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. **364** (2003), 65–80.
3. A. Melman, *Spectral inclusion sets for structured matrices.* — Linear Algebra Appl. **431** (2009), 633–656.
4. A. Melman, *An alternative to the Brauer set.* — Linear and Multilinear Algebra **58** (2010), 377–385.
5. R. Oeder, *Problem* E 949. — Amer. Math. Monthly **58** (1951), 37.
6. A. Ostrowski, *Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants.* — Bull. Sci. Math. Helv. (2) **61** (1937), 19–32.
7. B. Price, *Bounds for determinants with dominant principal diagonal.* — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 497–502.
8. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer, Berlin etc., 2004.

Kolotilina L. Yu. On determinantal diagonal dominance conditions.

The paper suggests sufficient nonsingularity conditions for matrices in terms of certain determinantal relations of diagonal dominance type, which improve and generalize some known results. These conditions are

used to describe new eigenvalue inclusion sets and to derive new two-sided bounds on the determinants of matrices satisfying them.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 30 ноября 2010 г.