Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Л. Ю. Колотилина

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ КРАЙНИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БЛОЧНЫХ ЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1. Введение

Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r$ – разбитая на $r \times r$ блоков эрмитова матрица порядка n, которую мы также будем записывать в виде $A = D_A + B$, где $D_A = \mathrm{Diag}(A_{11}, \ldots, A_{rr})$ – это блочно диагональная часть A.

Основными результатами данной статьи являются теоремы 2.1 и 2.2, которые, в частности, устанавливают точные неравенства

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A + \xi B), \quad -\frac{1}{r-1} \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{1.1}$$

и

$$\lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A + \xi B), \quad -\frac{1}{r-1} \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{1.2}$$

связывающие крайние собственные значения матриц A и $D_A+\xi B$, различающихся коэффициентом при блочно внедиагональной матрице B.

Следует отметить, что неравенство (1.1) обобщает неравенство

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1\left(D_A - \frac{1}{r-1}B\right),$$

которое было установлено В. Никифоровым в работе [6] в том частном случае, когда блочно диагональная часть D_A является диагональной матрицей. Неравенство (1.2) – это аналог неравенства (1.1) для младшего собственного значения.

Заметим, что если матрица A положительно определена, то из (1.1) и (1.2) следует, что и матрица $D_A + \xi B$ обладает этим свойством при

Ключевые слова: блочная эрмитова матрица, крайние собственные значения, размах матрицы, граф, матрица смежности, лапласиан, положительный лапласиан, хроматическое число.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

любом $\xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right]$, причем спектральные числа обусловленности и размахи этих матриц удовлетворяют соотношениям

$$\kappa(A) \geqslant \kappa(D_A + \xi B), \quad -\frac{1}{r-1} \leqslant \xi \leqslant 1,$$

и

$$s(A) \geqslant s(D_A + \xi B), \quad -\frac{1}{r-1} \leqslant \xi \leqslant 1.$$

В разделе 2 приведены также и некоторые другие следствия из теорем 2.1 и 2.2. Отметим, в частности, неравенство

$$s(A) \geqslant \frac{r}{r-1}\rho(B)$$

(см. (2.44)), которое обобщает неравенство

$$s(A) \geqslant 2\lambda_1(B) = s(B),$$

известное для блочных 2×2 матриц, на общий случай.

В разделе 3 рассматриваются некоторые приложения результатов, полученных в разделе 2, к спектральной теории графов. Заметим, что для матриц, ассоциированных с графом G, в качестве блочной размерности r естественно рассматривать хроматическое число графа. В этом случае, при соответствующем упорядочении вершин и соответствующем разбиении на блоки матрица смежности графа G имеет нулевую блочную диагональ, тогда как блочно диагональные части лапласиана и положительного (signless) лапласиана графа являются диагональными матрицами. Некоторые соотношения для крайних собственных значений матрицы смежности графа и обоих его лапласианов представлены в предложениях 3.1–3.3. Новые нижние оценки для хроматического числа графа, улучшающие известную оценку Никифорова [6], содержатся в теореме 3.1.

В статье используются следующие обозначения.

- Для $n \in \mathbb{N}$ мы полагаем

$$\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}.$$

- $H_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$, есть множество эрмитовых матриц порядка n.

• Собственные значения матрицы $A \in H_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$, упорядочены в порядке невозрастания, так что

$$\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A),$$

а

$$s(A) = \lambda_1(A) - \lambda_n(A)$$

есть размах матрицы A.

• Для $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$,

$$\rho(A) = \max_{i \in \langle n \rangle} |\lambda_i(A)|$$

есть спектральный радиус A. В частности, если матрица A неотрицательна, то $\rho(A)$ совпадает с перроновским корнем A.

• Пусть G – простой неориентированный граф без петель. Тогда
A_G – матрица смежности G,
D_G диагональная матрица степеней вершин G,
$L_G = D_G - A_G$ – лапласиан графа G, а
$Q_G = D_G + A_G$ – положительный (signless) лапласиан G.
$\chi(G)$ – хроматическое число графа G.

• Пусть $x = (x_i)_{i=1}^r \in \mathbb{C}^n$, $1 \leqslant r \leqslant n$, – вектор, разбитый на r блочных компонент. Для $k = 1, \ldots, r$ мы полагаем

$$x^{(k)} = \left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^r, \quad \text{где} \quad x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ x_k, & i = k; \end{cases}$$

$$x^{(k,l)} = \left(x_i^{(k,l)}\right)_{i=1}^r, \quad \text{где} \quad x_i^{(k,l)} = \begin{cases} 0, & i \neq k, l, \\ x_k, & i = k, \\ -x_l, & i = l. \end{cases}$$

• Для $x \in \mathbb{C}^n$ мы полагаем $\|x\| = (x^* x)^{1/2}$.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$ – блочная эрмитова матрица порядка n, $2 \leq r \leq n$. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для любого* $\xi \in \left[-\frac{1}{r-1},\ 1\right]$ *выполняется неравенство*

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A + \xi B). \tag{2.1}$$

(ii) *Если* $-\frac{1}{r-1} < \xi < 1$, *то равенство*

$$\lambda_1(A) = \lambda_1(D_A + \xi B) \tag{2.2}$$

выполняется тогда и только тогда, когда собственное подпространство матрицы A, *ассоциированное с* $\lambda_1(A)$, *содержит вектор, имеющий ровно одну ненулевую блочную компоненту, т.е. ненулевой вектор вида* $x = x^{(i)}$, *где* $i \in \langle r \rangle$, *для которого*

$$Ax^{(i)} = \lambda_1(A)x^{(i)}. \tag{2.3}$$

(iii) *Если* $r \geqslant 3$ *и* $\xi = -\frac{1}{r-1}$, *то равенство*

$$\lambda_1(A) = \lambda_1\left(D_A - \frac{1}{r-1}B\right) \tag{2.4}$$

справедливо в том и только том случае, когда существует ненулевой вектор $x = (x_i)_{i=1}^r \in \mathbb{C}^n$ *такой, что для некоторого* $i \in \langle r \rangle$ *выполняется условие*

$$Ax^{(i,j)} = \lambda_1(A)x^{(i,j)} \quad \text{для всех} \quad j \neq i,\ j \in \langle r \rangle. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $x = (x_i)_{i=1}^r \in \mathbb{C}^n$ – ненулевой вектор, разбитый на блочные компоненты в соответствии с блочным разбиением матрицы A. С помощью x построим векторы

$$y^{(i)} = x + \alpha x^{(i)}, \quad i = 1, \dots, r, \tag{2.6}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Как нетрудно убедиться,

$$\sum_{i=1}^{r} y^{(i)^*} A y^{(i)} = (r + 2\alpha)x^* Ax + \alpha^2 x^* D_A x. \tag{2.7}$$

В частности, при $A = I_n$ соотношение (2.7) дает

$$\sum_{i=1}^{r} \|y^{(i)}\|^2 = (r + 2\alpha + \alpha^2)\|x\|^2. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$K = \frac{1}{r + 2\alpha + \alpha^2} \left[\alpha^2 D_A + (r + 2\alpha)A\right] = D_A + \xi B, \tag{2.9}$$

где

$$\xi = \frac{r + 2\alpha}{r + 2\alpha + \alpha^2}. \tag{2.10}$$

Заметим, что если α возрастает от $-r$ до 0, то ξ возрастает от $-\frac{1}{r-1}$ до 1.

Пусть теперь вектор x – это нормированный собственный вектор матрицы K, ассоциированный с ее наибольшим собственным значением, т.е.

$$Kx = \lambda_1(K)x, \quad \|x\| = 1. \tag{2.11}$$

Используя равенства (2.7)–(2.9), мы выводим

$$\lambda_1(K) = \lambda_1(D_A + \xi B) = x^* K x = \left(\sum_{i=1}^{r} y^{(i)^*} A y^{(i)}\right) / (r + 2\alpha + \alpha^2)$$

$$\leqslant \lambda_1(A) \sum_{i=1}^{r} \|y^{(i)}\|^2 / (r + 2\alpha + \alpha^2) = \lambda_1(A). \tag{2.12}$$

Итак, неравенство (2.1) выполняется при $-\frac{1}{r-1} \leqslant \xi \leqslant 1$.

Рассмотрим случаи равенства (ii) и (iii). Если верно равенство (2.2), то из (2.12) следует, что

$$Ay^{(i)} = \lambda_1(A) y^{(i)}, \quad i = 1, \dots r. \tag{2.13}$$

Используя очевидное соотношение

$$\sum_{i=1}^{r} y^{(i)} = (\alpha + r)x$$

и равенства (2.13), мы выводим

$$(\alpha+r)Ax = A\sum_{i=1}^{r} y^{(i)} = \lambda_1(A)\sum_{i=1}^{r} y^{(i)} = \lambda_1(A)(\alpha+r)x.$$

Следовательно, при $\alpha \neq -r$, т.е. при $\xi \neq -\frac{1}{r-1}$ мы имеем

$$Ax = \lambda_1(A)x. \tag{2.14}$$

Из соотношений (2.6), (2.13) и (2.14) вытекает, что

$$\alpha Ax^{(i)} = A(y^{(i)} - x) = \lambda_1(A)(y^{(i)} - x) = \alpha\lambda_1(A)x^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Следовательно, при $\alpha \neq 0$, т. е. при $\xi \neq 1$ мы имеем

$$Ax^{(i)} = \lambda_1(A)x^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Таким образом, равенство (2.3) справедливо для всех $i = 1, \ldots, r$, и утверждение (ii) доказано в части необходимости.

Обратно, предположим, что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, $x = x^{(i)} \neq 0$ и что верно равенство (2.3). Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} D_A x^{(i)} &= \lambda_1(A)x^{(i)}, \\ Bx^{(i)} &= 0, \end{aligned}$$

а значит

$$(D_A + \xi B)x^{(i)} = \lambda_1(A)x^{(i)}, \quad \text{где} \quad x^{(i)} \neq 0.$$

Тем самым показано, что $\lambda_1(A)$ является собственным значением матрицы $D_A + \xi B$, так что $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_1(D_A + \xi B)$. Вместе с неравенством (2.1) это доказывает равенство $\lambda_1(A) = \lambda_1(D_A + \xi B)$, чем и завершается доказательство утверждения (ii).

Рассмотрим случай $r \geqslant 3$, $\alpha = -r$, $\xi = -\frac{1}{r-1}$. Из равенств (2.13) вытекает, что все ненулевые векторы вида

$$x^{(i,j)} = x^{(i)} - x^{(j)} = \left(y^{(j)} - y^{(i)}\right)/r, \quad i \neq j,$$

являются собственными векторами матрицы A, причем

$$Ax^{(i,j)} = \lambda_1(A)x^{(i,j)}, \quad i \neq j. \tag{2.15}$$

Таким образом, утверждение (iii) доказано в части необходимости.

Обратно, допустим, что условие (2.5) выполняется для некоторого $i \in \langle r \rangle$. Переходя в (2.5) к i-м блочным компонентам, мы получаем, что

$$A_{ij}x_j = A_{ii}x_i - \lambda_1(A)x_i \quad \text{для всех} \quad j \neq i.$$

Следовательно,

$$\left\{\left(D_A - \frac{1}{r-1}B\right)x\right\}_i = A_{ii}x_i - \frac{1}{r-1}\sum_{j\neq i} A_{ij}x_j$$

$$= A_{ii}x_i - [A_{ii}x_i - \lambda_1(A)x_i] = \lambda_1(A)x_i. \tag{2.16}$$

С другой стороны, рассматривая k-е компоненты в (2.5) с $j = k$, мы получаем

$$A_{ki}x_i = A_{kk}x_k - \lambda_1(A)x_k \quad \text{для всех} \quad k \neq i, \tag{2.17}$$

тогда как равенство (2.5) с $j \neq k, i$ дает

$$A_{ki}x_i = A_{kj}x_j \quad k \neq i, \quad j \neq k, i. \tag{2.18}$$

Соотношения (2.17) и (2.18) означают, что для любого $k \neq i$ мы имеем

$$A_{kj}x_j = A_{kk}x_k - \lambda_1(A)x_k \quad \text{для всех} \quad j \neq k,$$

откуда следует, что

$$\left\{\left(D_A - \frac{1}{r-1}B\right)x\right\}_k = A_{kk}x_k - [A_{kk}x_k - \lambda_1(A)x_k] = \lambda_1(A)x_k \quad \text{для всех} \quad k \neq i. \tag{2.19}$$

Равенства (2.16) и (2.19) показывают, что

$$\left(D_A - \frac{1}{r-1}B\right)x = \lambda_1(A)x,$$

откуда вытекает, что

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_1\left(D_A - \frac{1}{r-1}B\right).$$

Полученное неравенство в сочетании с противоположным неравенством (2.1) устанавливает справедливость равенства (2.4) и завершает доказательство утверждения (iii).

Теорема 2.1 доказана полностью. $\square$

Как было отмечено во введении, в том частном случае, когда D_A – вещественная диагональная матрица и $\xi = -\frac{1}{r-1}$, неравенство (2.1) было впервые установлено В. Никифоровым в работе [6]. Более того, приведенное выше доказательство неравенства (2.1) основано на подходе, разработанном в [6]. Анализ случаев равенства является новым. В частности, в том случае, когда D_A – диагональная матрица, он дает ответ на вопрос об условиях, при которых справедливо равенство (2.4), поставленный в [6, задача 3].

Представленная ниже теорема 2.2 является естественным аналогом теоремы 2.1 применительно к младшему собственному значению блочной эрмитовой матрицы. Она может быть доказана аналогично теореме 2.1. Альтернативное доказательство теоремы 2.2 состоит в применении теоремы 2.1 к матрице $-A$ и использовании соотношения

$$\lambda_n(A) = -\lambda_1(-A).$$

Теорема 2.2. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$ *– блочная эрмитова матрица порядка* n, $2 \le r \le n$. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для любого* $\xi \in \left[-\frac{1}{r-1},\, 1\right]$ *выполняется неравенство*

$$\lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A + \xi B). \tag{2.20}$$

(ii) *Если* $-\frac{1}{r-1} < \xi < 1$, *то равенство*

$$\lambda_n(A) = \lambda_n(D_A + \xi B) \tag{2.21}$$

выполняется в том и только том случае, когда собственное подпространство матрицы A, *ассоциированное с* $\lambda_n(A)$, *содержит вектор, имеющий ровно одну ненулевую блочную компоненту, т.е. ненулевой вектор вида* $x = x^{(i)}$, *где* $i \in \langle r \rangle$, *для которого*

$$Ax^{(i)} = \lambda_n(A)x^{(i)}. \tag{2.22}$$

(iii) *Если* $r \geqslant 3$ *и* $\xi = -\frac{1}{r-1}$, *то равенство*

$$\lambda_n(A) = \lambda_n \left(D_A - \frac{1}{r-1} B \right) \tag{2.23}$$

справедливо в том и только том случае, когда существует ненулевой вектор $x = (x_i)_{i=1}^r \in \mathbb{C}^n$ *такой, что для некоторого* $i \in \langle r \rangle$ *выполнено условие*

$$Ax^{(i,j)} = \lambda_n(A)x^{(i,j)} \quad \text{для всех} \quad j \neq i, \quad j \in \langle r \rangle. \tag{2.24}$$

В связи с теоремами 2.1 и 2.2 уместны следующие замечания.

1. При $\xi = 1$ оба неравенства (2.1) и (2.20) превращаются в тривиальные равенства, тогда как при $\xi = 0$ они соответственно сводятся к хорошо известным неравенствам

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A) \quad \text{и} \quad \lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A).$$

2. Если $r = 2$, то $-\frac{1}{r-1} = -1$, и матрицы $A = D_A + B$ и $D_A - B$ сопряжены посредством знаковой матрицы $S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$. Следовательно, при $r = 2$ не только крайние, но и вообще все собственные значения матриц A и $D_A - \frac{1}{r-1}B$ совпадают.

3. Из условия (2.5) (условия (2.24)) следует, что у A имеется собственный вектор, ассоциированный с $\lambda_1(A)$ (с $\lambda_n(A)$), имеющий не более двух ненулевых блочных компонент, что является нетривиальным условием при $r \geqslant 3$. В частности, если матрица A (или A^{-1}) неотрицательна и неприводима, то условие (2.5) (или (2.24)) может выполняться только при $r = 2$. Действительно, в том случае, когда $r \geqslant 3$, из (2.5) (из (2.24)) следует, что A (или A^{-1}) имеет перроновский вектор, содержащий нулевые компоненты, что невозможно в силу теоремы Перрона–Фробениуса. Поэтому для таких матриц A при $r \geqslant 3$ неравенство (2.1) всегда является строгим.

4. Как следует из доказательства теоремы 2.1, если

$$\lambda_s(A) = \lambda_s(D_A + \xi B), \quad \text{где} \quad s = 1 \quad \text{или} \quad s = n, \quad -\frac{1}{r-1} < \xi < 1,$$

то для некоторого вектора $x \neq 0$ необходимо

$$Ax^{(i)} = \lambda_s(A)x^{(i)} \quad \text{при всех} \quad i = 1, \ldots, r,$$

хотя какие-то из векторов $x^{(i)}$ могут оказаться нулевыми.

Аналогично, если выполнено равенство

$$\lambda_s(A) = \lambda_s\left(D_A - \frac{1}{r-1}B\right), \quad \text{где} \quad s = 1 \quad \text{или} \quad s = n, \quad r \geqslant 3,$$

то для некоторого вектора $x \neq 0$ необходимо

$$Ax^{(i,j)} = \lambda_s(A)x^{(i,j)} \quad \text{при всех} \quad i \neq j,\ i, j \in \langle r\rangle.$$

Ниже приведены некоторые результаты, которые легко выводятся из теорем 2.1 и 2.2.

Следствие 2.1. *Пусть матрицы* $\Delta = \operatorname{Diag}(\Delta_1, \ldots, \Delta_r) \in H_n(\mathbb{C})$ *и* $B = (B_{ij})_{i,j=1}^r \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$, *разбиты на блоки согласованным образом и пусть*

$$B_{11} = \cdots = B_{rr} = 0.$$

Тогда на полуоси $[0,\ +\infty]$ *наибольшее собственное значение* $\lambda_1(\Delta + \xi B)$ *матрицы* $\Delta + \xi B$ *является возрастающей функцией* ξ, *тогда как ее наименьшее собственное значение* $\lambda_n(\Delta + \xi B)$ *является убывающей функцией* ξ.

Следствие 2.2. *Пусть* $B = (B_{ij})_{i,j=1}^r \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$, *и пусть*

$$B_{11} = \cdots = B_{rr} = 0.$$

Тогда

$$\lambda_n(B) + (r-1)\lambda_1(B) \geqslant 0 \tag{2.25}$$

и

$$(r-1)\lambda_n(B) + \lambda_1(B) \leqslant 0. \tag{2.26}$$

Доказательство. В том случае, когда $D_A = 0$ и $\xi = -\frac{1}{r-1}$, в силу теорем 2.1 и 2.2, выполняются неравенства

$$\lambda_1(B) \geqslant \lambda_1\left(-\frac{1}{r-1}B\right) = -\frac{1}{r-1}\lambda_n(B)$$

и

$$\lambda_n(B) \leqslant \lambda_n\left(-\frac{1}{r-1}B\right) = -\frac{1}{r-1}\lambda_1(B),$$

которые равносильны неравенствам (2.25) и (2.26) соответственно. □

Заметим, что неравенства (2.25) и (2.26) известны (см., например, [4, Следствие 4.1]) и вытекают из неравенств Ароншайна [2] в частном случае эрмитовых матриц с нулевыми диагональными блоками.

Следующий результат дает двусторонние оценки для крайних собственных значений матрицы $D_A + \xi B$ при $\xi \in [0, 1]$ в терминах крайних собственных значений матрицы $A = D_A + B$ и ее блочно диагональной части, которые отвечают $\xi = 1$ и $\xi = 0$ соответственно.

Следствие 2.3. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{r} = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$. Тогда для любого $\xi \in [0, 1]$ справедливы неравенства*

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A + \xi B) \geqslant \xi \lambda_1(A) + (1 - \xi)\lambda_n(D_A) \tag{2.27}$$

и

$$\lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A + \xi B) \leqslant \xi \lambda_n(A) + (1 - \xi)\lambda_1(D_A). \tag{2.28}$$

В частности, если матрица D_A положительно полуопределена, то

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A + \xi B) \geqslant \xi \lambda_1(A), \tag{2.29}$$

а если матрица D_A отрицательно полуопределена, то

$$\lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A + \xi B) \leqslant \xi \lambda_n(A). \tag{2.30}$$

Доказательство. Ввиду теорем 2.1 и 2.2, только правые неравенства в (2.27) и (2.28) требуют доказательства. Действительно, в силу хорошо известных неравенств Вейля для собственных значений суммы эрмитовых матриц, см., например, [7, с. 192], при $\xi \in [0, 1]$ мы имеем

$$\lambda_1(D_A + \xi B) = \lambda_1(\xi A + (1 - \xi)D_A) \geqslant \xi \lambda_1(A) + (1 - \xi)\lambda_n(D_A)$$

и, аналогично,

$$\lambda_n(D_A + \xi B) = \lambda_n(\xi A + (1 - \xi)D_A) \leqslant \xi \lambda_n(A) + (1 - \xi)\lambda_1(D_A).$$

□

Заметим, что из (2.29) и (2.30), соответственно, вытекает, что если D_A положительно полуопределена, то

$$0 \leqslant \lambda_1(A) - \lambda_1(D_A + \xi B) \leqslant (1 - \xi)\lambda_1(A), \quad \xi \in [0, 1], \tag{2.31}$$

а если D_A отрицательно полуопределена, то

$$0 \leqslant \lambda_n(D_A + \xi B) - \lambda_n(A) \leqslant (\xi - 1)\lambda_n(A) = (1 - \xi)|\lambda_n(A)|, \quad \xi \in [0, 1]. \tag{2.32}$$

С другой стороны, для произвольного $\xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right]$ крайние собственные значения матрицы $D_A + \xi B$ удовлетворяют следующим двусторонним оценкам.

Следствие 2.4. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$. Тогда для любого $\xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right]$ имеют место неравенства*

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A + \xi B) \geqslant \lambda_1(A) - (1 - \xi)\lambda_1(B) \tag{2.33}$$

и

$$\lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A + \xi B) \leqslant \lambda_n(A) - (1 - \xi)\lambda_n(B). \tag{2.34}$$

Доказательство. Ввиду теорем 2.1 и 2.2, требуется доказать только правые неравенства в (2.33) и (2.34). Используя соотношение

$$D_A + \xi B = A - (1 - \xi)B \tag{2.35}$$

и неравенства Вейля, мы выводим

$$\lambda_1(D_A + \xi B) \geqslant \lambda_1(A) + (1 - \xi)\lambda_n(-B) = \lambda_1(A) - (1 - \xi)\lambda_1(B)$$

и, аналогично,

$$\lambda_n(D_A + \xi B) \leqslant \lambda_n(A) + (1 - \xi)\lambda_1(-B) = \lambda_n(A) - (1 - \xi)\lambda_n(B).$$

□

Неравенства (2.33) и (2.34) показывают, что

$$0 \leqslant \lambda_1(A) - \lambda_1(D_A + \xi B) \leqslant (1 - \xi)\lambda_1(B) \leqslant (1 - \xi)\rho(B), \quad \xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right], \tag{2.36}$$

и

$$0 \leqslant \lambda_n(D_A+\xi B)-\lambda_n(A) \leqslant (1-\xi)|\lambda_n(B)| \leqslant (1-\xi)\rho(B),$$
$$\xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right]. \quad (2.37)$$

Соотношения (2.36) и (2.37) (так же, как и неравенства (2.31) и (2.32)) могут рассматриваться как оценки возмущения крайних собственных значений матрицы A при специального вида возмущении ее блочно внедиагональной части.

Крайние собственные значения матриц $A = D_A + B$ и $D_A - B$ взаимосвязаны следующим образом.

Следствие 2.5. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$. *Тогда*

$$\lambda_1(D_A-B)+\frac{r-2}{r-1}\lambda_n(B) \leqslant \lambda_1(A) \leqslant \lambda_1(D_A-B)+\frac{r-2}{r-1}\lambda_1(B); \quad (2.38)$$

$$\lambda_n(D_A-B)+\frac{r-2}{r-1}\lambda_n(B) \leqslant \lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A-B)+\frac{r-2}{r-1}\lambda_1(B). \quad (2.39)$$

Доказательство. Применяя теорему 2.1 к матрице $D_A - B$ при $\xi = -\frac{1}{r-1}$ и используя неравенства Вейля, мы выводим

$$\lambda_1(D_A-B) \geqslant \lambda_1\left(D_A+\frac{1}{r-1}B\right) = \lambda_1\left((D_A+B)-\frac{r-2}{r-1}B\right)$$
$$\geqslant \lambda_1(D_A+B)+\frac{r-2}{r-1}\lambda_n(-B) = \lambda_1(A)-\frac{r-2}{r-1}\lambda_1(B),$$

что доказывает верхнюю оценку в (2.38).

Нижняя оценка в (2.38) устанавливается аналогично. Также она может быть получена применением верхней оценки к матрице $D_A - B$.

Оценки (2.39) выводятся аналогично, но с использованием теоремы 2.2. □

Из следствия 2.5 вытекают, в частности, следующие соотношения, не зависящие от блочного порядка r:

$$\lambda_1(D_A-B)+\lambda_n(B) \leqslant \lambda_1(A) \leqslant \lambda_1(D_A-B)+\lambda_1(B); \quad (2.40)$$

$$\lambda_n(D_A - B) + \lambda_n(B) \leqslant \lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A - B) + \lambda_1(B). \tag{2.41}$$

Заметим, что при $A \neq D_A$ неравенства (2.38), (2.40) и (2.39), (2.41) существенно улучшают соответствующие неравенства Вейля

$$\lambda_1(D_A - B) + 2\lambda_n(B) \leqslant \lambda_1(A) \leqslant \lambda_1(D_A - B) + 2\lambda_1(B)$$

и

$$\lambda_n(D_A - B) + 2\lambda_n(B) \leqslant \lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A - B) + 2\lambda_1(B),$$

которые не принимают во внимание тот факт, что D_A есть блочно диагональная часть матрицы A.

В оставшейся части этого раздела мы выводим некоторые оценки для размаха блочной эрмитовой матрицы.

В силу теоремы 2.1, соотношения (2.35) и неравенств Вейля, мы имеем

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A + \xi B) = \lambda_1(A - (1-\xi)B) \geqslant \lambda_n(A) + (1-\xi)\lambda_1(-B), \quad \xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right],$$

откуда следует, что

$$s(A) \geqslant (1-\xi)\lambda_1(-B), \quad \xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right]. \tag{2.42}$$

Поскольку $s(A) = s(-A)$, то, применяя (2.42) к $-A$, мы получаем

$$s(A) \geqslant (1-\xi)\lambda_1(B), \quad \xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right]. \tag{2.43}$$

Комбинируя (2.42) и (2.43) и учитывая, что

$$\max_{\xi \in \left[-\frac{1}{r-1}, 1\right]} \{1 - \xi\} = \frac{r}{r-1}$$

и что

$$\rho(B) = \max\{\lambda_1(B), \lambda_1(-B)\},$$

мы приходим к следующей нижней оценке для размаха блочной эрмитовой матрицы.

Следствие 2.6. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$. *Тогда*

$$s(A) \geqslant \frac{r}{r-1}\rho(B), \tag{2.44}$$

а также, поскольку $s(B) \leqslant 2\rho(B)$,

$$s(A) \geqslant \frac{r}{2(r-1)}s(B). \tag{2.45}$$

Стоит отметить, что, как хорошо известно, при $r = 2$ для $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \in H_n(\mathbb{C})$ мы имеем

$$\lambda_1(-B) = -\lambda_n(B) = \lambda_1(B) = \|A_{12}\|,$$

так что неравенство (2.44) равносильно соотношениям

$$s(A) \geqslant 2\lambda_1(B) = s(B) = 2\|A_{12}\|, \tag{2.46}$$

которые были установлены и обсуждались в работе [1]. Таким образом, неравенство (2.44) обобщает неравенство из (2.46) на случай $r \geqslant 2$. Заметим, что, наряду с неравенством (2.44), более слабое неравенство (2.45) также обобщает соотношение $s(A) \geqslant s(B)$, см. (2.46), на общий случай $r \geqslant 2$.

В частном случае положительно полуопределенных матриц из следствия 2.6 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.7. *Пусть матрица* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r = D_A + B \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$, *положительно полуопределена. Тогда*

$$\lambda_1(A) \geqslant \frac{r}{r-1}\rho(B). \tag{2.47}$$

При $D_A = 0$ соотношение (2.44) принимает вид

$$s(B) \geqslant \frac{r}{r-1}\rho(B) = \frac{r}{r-1}\max\{\lambda_1(B),\ \lambda_1(-B)\}, \quad r \geqslant 2.$$

С другой стороны, ввиду того, что неравенства (2.25) и (2.26) равносильны соотношениям $s(B) \leqslant r\lambda_1(B)$ и $s(B) \leqslant -r\lambda_n(B) = r\lambda_1(-B)$ соответственно, мы имеем

$$s(B) \leqslant r\min\{\lambda_1(B),\ \lambda_1(-B)\}.$$

Таким образом, размах эрмитовой матрицы с нулевыми диагональными блоками удовлетворяет следующим двусторонним оценкам.

Следствие 2.8. *Пусть* $B = (B_{ij})_{i,j=1}^r \in H_n(\mathbb{C})$, $2 \leqslant r \leqslant n$. *если* $B_{11} = \cdots = B_{rr} = 0$, *то*

$$\frac{r}{r-1}\max\{\lambda_1(B),\ \lambda_1(-B)\} \leqslant s(B) \leqslant r\min\{\lambda_1(B),\ \lambda_1(-B)\}. \qquad (2.48)$$

В частности, если матрица B в следствии 2.8 неотрицательна (или сопряжена с неотрицательной матрицей), то, по теореме Перрона–Фробениуса, $\rho(B) = \lambda_1(B)$, и неравенства (2.48) принимают вид

$$\frac{r}{r-1}\lambda_1(B) \leqslant s(B) \leqslant r|\lambda_n(B)|. \qquad (2.49)$$

3. Приложения к спектральной теории графов

В этом разделе приводятся некоторые приложения общих результатов, полученных в разделе 2, к спектральной теории графов. Точнее, сперва устанавливаются некоторые соотношения между крайними собственными значениями матрицы смежности графа G, его лапласиана и его положительного (signless) лапласиана, а затем из этих неравенств выводятся новые нижние оценки для хроматического числа графа G.

Пусть G – простой граф на $n \geqslant 1$ вершинах и пусть A_G – его матрица смежности, $D_A = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ – диагональная матрица степеней вершин графа G, $L_G = D_G - A_G$ – лапласиан графа G, а $Q_G = D_G + A_G$ – его положительный лапласиан.

Поскольку L_G является симметричной Z-матрицей и поскольку

$$L_G e = 0,$$

где $e = [1, \ldots, 1]^T$, т.е. L_G – матрица со слабым диагональным преобладанием, то лапласиан L_G неотрицательно определен, причем $\lambda_n(L_G) = 0$.

Хроматическое число, $\chi(G)$, графа G определяется как наименьшее число цветов, необходимых для существования такой раскраски его вершин, что все смежные вершины имеют разные цвета или, другими словами, вершины каждого цвета образуют независимое множество.

Ясно, что если $r = \chi(G)$, то вершины графа G можно занумеровать таким образом, что матрица смежности A_G естественно разбивается на $r \times r$ блоков, $A_G = (A_{ij})_{i,j=1}^r$, таким образом, что

$$A_{11} = \cdots = A_{rr} = 0.$$

Применяя неравенства (2.49) к матрице A_G с $r = \chi(G) \geqslant 2$, мы приходим к соотношениям

$$\frac{\chi(G)}{\chi(G)-1}\rho(A_G) \leqslant s(A_G) \leqslant \chi(G)|\lambda_n(A_G)|. \tag{3.1}$$

Заметим теперь, что каждое неравенство в (3.1) равносильно хорошо известной нижней оценке Хоффмана [3]

$$\chi(G) \geqslant 1 + \frac{\rho(A_G)}{|\lambda_n(A_G)|}. \tag{3.2}$$

Применяя следствие 2.6 к матрице $A = L_G$, мы получаем неравенство

$$\rho(A_G) \leqslant \frac{\chi(G)-1}{\chi(G)}\lambda_1(L_G), \quad \chi(G) \geqslant 2, \tag{3.3}$$

из которого следует, что

$$\lambda_1(L_G) > \rho(A_G), \quad \chi(G) \geqslant 2. \tag{3.4}$$

Поэтому из (3.3) вытекает нижняя оценка Никифорова [6]

$$\chi(G) \geqslant 1 + \frac{\rho(A_G)}{\lambda_1(L_G) - \rho(A_G)}, \quad \chi(G) \geqslant 2. \tag{3.5}$$

Как было показано в [6], оценка (3.5) достигается тогда и только тогда, когда любые два цветовые класса в G индуцируют $|\lambda_n(A_G)|$-регулярный подграф.

Некоторые новые неравенства, соотносящие между собой крайние собственные значения матриц A_G, L_G и Q_G и зависящие от $\chi(G)$, представлены в предложениях 3.1–3.3.

Предложение 3.1. *Если G – простой граф с хроматическим числом $\chi(G) \geqslant 2$, то*

$$\lambda_1(L_G) \leqslant \rho(Q_G) \leqslant \lambda_1(L_G) + \frac{\chi(G)-2}{\chi(G)-1}\rho(A_G), \tag{3.6}$$

откуда следует, что

$$\lambda_1(L_G) \leqslant \rho(Q_G) \leqslant \lambda_1(L_G) + \rho(A_G). \tag{3.7}$$

Доказательство. Правое неравенство в (3.6) вытекает из правого неравенства в (2.38) в следствии 2.5, а левое неравенство в (3.6) выполняется в силу леммы Виландта, см., например, [5, теорема II.2.1]. □

Поскольку, очевидно, $A_G \leqslant D_G$ в смысле положительно-определенных матриц, мы имеем

$$2A_G \leqslant D_G + A_G = Q_G, \tag{3.8}$$

так что $2\lambda_i(A_G) \leqslant \lambda_i(Q_G)$, $i = 1, \ldots, n$, и, в частности,

$$2\rho(A_G) \leqslant \rho(Q_G). \tag{3.9}$$

Справедлив и следующий более общий результат.

Лемма 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – симметричная неотрицательная матрица такая, что*

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0,$$

пусть $D = \operatorname{diag}(r_1(A), \ldots, r_n(A))$, где

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и пусть $Q = D + A$. Тогда

$$2\rho(A) \leqslant \rho(Q). \tag{3.10}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то (3.10) *является равенством тогда и только тогда, когда все строчные суммы A совпадают, т.е.*

$$r_1(A) = \cdots = r_n(A) \equiv r(A). \tag{3.11}$$

Доказательство. Неравенство (3.10) устанавливается так же, как и (3.9).

Рассмотрим случай равенства. Если справедливы равенства (3.11), то, по теореме Фробениуса (см., например, [5, теорема II.1.1]), мы имеем

$$\rho(Q) = 2r(A) = 2\rho(A).$$

Обратно, предположим, что A неприводима и симметрична и что (3.10) является равенством. В силу неравенств Вейля,

$$\rho(Q) = \lambda_1((D-A)+2A) \geqslant \lambda_n(D-A) + 2\lambda_1(A) = 2\rho(A),$$

причем равенство

$$\rho(Q) = 2\rho(A)$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор x такой, что одновременно выполняются следующие соотношения:

$$Qx = \rho(Q)x, \quad (D-A)x = 0, \quad Ax = \rho(A)x. \tag{3.12}$$

Второе из этих соотношений означает, что x – собственный вектор матрицы $D-A$, ассоциированный с ее наименьшим (нулевым) собственным значением. Поскольку матрица A неприводима, ее собственный вектор, ассоциированный с собственным значением $\lambda_n(D-A) = 0$, определен однозначно с точностью до положительного множителя. (Это вытекает, например, из того факта, что такой собственный вектор является перроновским вектором положительной обратной M-матрицы $(\alpha I_n + D - A)^{-1}$, где $\alpha > 0$, и из теоремы Перрона–Фробениуса). Поскольку, с другой стороны, мы также имеем $(D-A)e = 0$, то $x = \gamma e$, где $\gamma > 0$. Таким образом, в силу третьего равенства из (3.12), соотношения (3.11) верны. Лемма доказана. □

Заметим, что, ввиду (3.9), из (3.6) следует неравенство

$$2\rho(A_G) \leqslant \lambda_1(L_G) + \frac{\chi(G)-2}{\chi(G)-1}\rho(A_G),$$

равносильное неравенству (3.3).

Следующий результат дает двусторонние оценки для $\rho(Q_G)$ в терминах $\lambda_1(L_G)$ и $\chi(G)$.

Предложение 3.2. *Если G – простой граф с хроматическим числом $\chi(G) \geqslant 2$, то*

$$\lambda_1(L_G) \leqslant \rho(Q_G) \leqslant 2\frac{\chi(G)-1}{\chi(G)}\lambda_1(L_G). \tag{3.13}$$

Доказательство. Необходимо доказать лишь правое неравенство в (3.13). Подставляя (3.3) в (3.6), мы выводим

$$\rho(Q_G) \leqslant \lambda_1(L_G) + \frac{\chi(G)-2}{\chi(G)}\lambda_1(L_G) = 2\frac{\chi(G)-1}{\chi(G)}\lambda_1(L_G).$$

□

Заметим, что при $\chi(G) = 2$ неравенства (3.13) сводятся к равенству $\lambda_1(L_G) = \rho(Q_G)$.

Предложение 3.3. *Если G – простой граф с хроматическим числом $\chi(G) \geqslant 2$, то*

$$\lambda_n(Q_G) \leqslant \frac{\chi(G)-2}{\chi(G)-1}\rho(A_G) < \rho(A_G). \tag{3.14}$$

Доказательство. Левое неравенство в (3.14) вытекает непосредственно из правого неравенства в (2.39). Правое неравенство в (3.14) справедливо, поскольку при $\chi(G) > 1$, очевидно, $\rho(A_G) \geqslant 1$. □

Заметим, что при $\chi(G) = 2$ из (3.14) следует, что $\lambda_n(Q_G) = 0$. Заметим также, что, в силу предложения 3.3 и неравенства (3.9), при $\chi(G) \geqslant 2$ для размаха Q_G справедлива оценка

$$s(Q_G) \geqslant \left(2 - \frac{\chi(G)-2}{2(\chi(G)-1)}\right)\rho(A_G) = \frac{\chi(G)}{\chi(G)-1}\rho(A_G), \tag{3.15}$$

которая является частным случаем общей оценки (2.44). Наконец, заметим, что при $\chi(G) \geqslant 3$ из (3.14) и (3.9) следует, что спектральное число обусловленности $\kappa(Q_G) = \frac{\rho(Q_G)}{\lambda_n(Q_G)}$ положительного лапласиана Q_G удовлетворяет нижней оценке

$$\kappa(Q_G) \geqslant 2\frac{\chi(G)-1}{\chi(G)-2}.$$

Из предложений 3.1–3.3 легко выводятся следующие нижние оценки для хроматического числа графа.

Теорема 3.1. *Пусть G – простой граф с $n \geqslant 2$ вершинами и по крайней мере одним ребром. Тогда*

$$\chi(G) \geqslant 1 + \frac{\rho(A_G)}{\rho(A_G) + \lambda_1(L_G) - \rho(Q_G)}; \tag{3.16}$$

$$\chi(G) \geqslant 1 + \frac{\rho(Q_G)}{2\lambda_1(L_G) - \rho(Q_G)}; \tag{3.17}$$

$$\chi(G) \geqslant 1 + \frac{\rho(A_G)}{\rho(A_G) - \lambda_n(Q_G)}. \tag{3.18}$$

В связи с теоремой 3.1 уместны следующие замечания.

1. Ввиду (3.9), мы имеем

$$1 + \frac{\rho(A_G)}{\rho(A_G) + \lambda_1(L_G) - \rho(Q_G)} \geqslant 1 + \frac{\rho(A_G)}{\lambda_1(L_G) - \rho(A_G)},$$

так что оценка (3.16) по крайней мере не хуже, чем оценка Никифорова (3.5). Кроме того, в силу леммы 3.1, для связного графа G оценки (3.16) и (3.5) совпадают тогда и только тогда, когда граф G регулярен.

2. Из (3.9) следует, что

$$\frac{\rho(Q_G)}{2\lambda_1(L_G) - \rho(Q_G)} \geqslant \frac{2\rho(A_G)}{2[\lambda_1(L_G) - \rho(A_G)]} = \frac{\rho(A_G)}{\lambda_1(L_G) - \rho(A_G)}.$$

Таким образом, оценка (3.17) всегда не хуже, чем (3.5), причем, в силу леммы 3.1, для связного графа G оценки (3.17) и (3.5) совпадают тогда и только тогда, когда граф G регулярен.

3. В силу (3.9), мы имеем

$$s(Q_G) - \rho(A_G) = \rho(Q_G) - \lambda_n(Q_G) - \rho(A_G) \geqslant \rho(A_G) - \lambda_n(Q_G).$$

Таким образом, из (3.18) вытекает нижняя оценка

$$\chi(G) \geqslant 1 + \frac{\rho(A_G)}{s(Q_G) - \rho(A_G)}, \tag{3.19}$$

которая также следует и из (3.15). Кроме того, ввиду леммы 3.1, для связного графа G оценки (3.18) и (3.19) совпадают тогда и только тогда, когда G – регулярный граф.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *О крайних собственных значениях блочных* 2×2 *эрмитовых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 27–38.
2. N. Aronszajn, *Rayleigh-Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues. I. Operators in a Hilbert space.* — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34** (1948), 474–480.
3. A. J. Hoffman, *On eigenvalues and colorings of graphs.* — in: Topics in Matrix Analysis, Academic Press, New York (1970), pp. 79–91.
4. L. Yu. Kolotilina, *Eigenvalue bounds and inequalities using vector aggregation of matrices.* — Linear Algebra Appl. **271** (1998), 139–167.
5. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* John Wiley and Sons, New York etc., 1988.
6. V. Nikiforov, *Chromatic number and spectral radius.* — Linear Algebra Appl. **426** (2007), 810–814.
7. B. N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem.* Prentice-Hall, Inc., 1980.

Kolotilina L. Yu. Inequalities for the extreme eigenvalues of block-partitioned Hermitian matrices with applications to spectral graph theory.

Let $A = D_A + B$ be a block $r \times r$, $r \geqslant 2$, Hermitian matrix of order n, where D_A is the block diagonal part of A. The main results of the paper are Theorems 2.1 and 2.2, which state the sharp inequalities

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_1(D_A + \xi B) \quad \text{and} \quad \lambda_n(A) \leqslant \lambda_n(D_A + \xi B), \quad -\frac{1}{r-1} \leqslant \xi \leqslant 1,$$

and analyze the equality cases. Some implications of these results are indicated. As applications, matrices occurring in spectral graph theory are considered, and new lower bounds on the chromatic number of a graph are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 23 сентября 2010 г.