Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ТЕПЛИЦЕВЫХ И ГАНКЕЛЕВЫХ ЦИРКУЛЯНТОВ

1. Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных $n \times n$-матриц. Теплицевой называется матрица $T \in M_n(\mathbf{C})$, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а ганкелевой – матрица $H \in M_n(\mathbf{C})$ вида

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots & h_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_{2n-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Теплицева матрица (1) называется циркулянтом, если

$$t_{-i} = t_{n-i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3}$$

Будем называть матрицу (2) *ганкелевым циркулянтом*, если

$$h_{n+i} = h_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Очевидно, что и теплицев, и ганкелев циркулянты однозначно определяются элементами своих первых строк.

Матрица-перестановка

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, циркулянт, ганкелев циркулянт, ϕ-циркулянт.

называется перъединичной матрицей. Для циркулянта $T \in M_n(\mathbf{C})$ с первой строкой

$$(t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1})$$

матрицы $\mathcal{P}_n T$ и $T\mathcal{P}_n$ суть ганкелевы циркулянты с первыми строками

$$(t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1} \quad t_0)$$

и

$$(t_{n-1} \quad t_{n-2} \quad \dots \quad t_1 \quad t_0).$$

Цель настоящей заметки – предложить некоторые характеризации теплицевых и ганкелевых циркулянтов в множестве всех соответственно теплицевых и ганкелевых матриц.

2. Введем n-мерные векторы

$$e = (1,\ 1,\ \dots,\ 1)^t \tag{4}$$

и

$$f = (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots,\ (-1)^{n-1})^t. \tag{5}$$

Теорема 1. *Теплицева матрица T тогда и только тогда является циркулянтом, когда e есть собственный вектор для T.*

Доказательство. Вектор e тогда и только тогда является собственным вектором $n \times n$-матрицы A, когда все ее строчные суммы

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

одинаковы. Это общее значение строчных сумм есть собственное число матрицы A, отвечающее вектору e.

Очевидно, что условие равенства строчных сумм для всякого циркулянта выполнено. Тем самым e есть собственный вектор для каждого из них.

Пусть, напротив, e есть собственный вектор теплицевой матрицы (1). Приравнивая первую и вторую строчные суммы, получаем

$$t_{-1} = t_{n-1}. \tag{6}$$

Равенство второй и третьей строчных сумм дает

$$t_{-2} = t_{n-2}. \tag{7}$$

Продолжая таким образом, получим все соотношения (3).

Теорема 2. *Ганкелева матрица H тогда и только тогда является ганкелевым циркулянтом, когда e есть собственный вектор для H.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна, как и в теореме 1. Пусть e есть собственный вектор ганкелевой матрицы (2):

$$He = \lambda e.$$

Поскольку $\mathcal{P}_n e = e$, то

$$\mathcal{P}_n He = \lambda e,$$

т.е. e является собственным вектором теплицевой матрицы $T = \mathcal{P}_n H$. По теореме 1, T – циркулянт. Тогда $H = \mathcal{P}_n T$ есть ганкелев циркулянт.

Напомним, что левыми собственными векторами матрицы A называются обычные (иначе, правые) собственные векторы для A^*. Теоремы 1 и 2 можно теперь дополнить следующими утверждениями.

Теорема 3. *Теплицева матрица T тогда и только тогда является циркулянтом, когда e есть левый собственный вектор для T.*

Доказательство. Согласно теореме 1, условие настоящей теоремы равносильно требованию, чтобы матрица T^* была циркулянтом. Но тогда и T – циркулянт.

Аналогично обосновывается

Теорема 4. *Ганкелева матрица H тогда и только тогда является ганкелевым циркулянтом, когда e есть левый собственный вектор для H.*

3. Отметим несколько следствий теорем из раздела 2. Положим

$$\mathcal{L}_{n-1} = e^{\perp}. \tag{8}$$

Иначе говоря, $\mathcal{L}_{n-1}$ есть $(n-1)$-мерное подпространство в $\mathbf{C}^n$, образованное векторами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, для которых

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0. \tag{9}$$

Следствие 1. *$\mathcal{L}_{n-1}$ есть общее инвариантное подпространство для всех теплицевых и ганкелевых циркулянтов.*

Это утверждение вытекает из теорем 3 и 4 и хорошо известного факта: если $\mathcal{M}$ – инвариантное подпространство матрицы A, то $\mathcal{M}^{\perp}$ инвариантно относительно A^*.

Обозначим через J_n матрицу порядка n, все элементы которой равны единице.

Следствие 2. *Теплицева $n\times n$-матрица T тогда и только тогда является циркулянтом, когда T коммутирует с J_n.*

Доказательство. Легко проверить, что для циркулянта T выполнены соотношения

$$TJ_n = J_nT = \rho J_n,$$

где

$$\rho = t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}. \tag{10}$$

Таким образом, условие в формулировке следствия является необходимым. Пусть теперь для теплицевой матрицы T имеем

$$TJ_n = J_nT.$$

Подпространства $\operatorname{span}\{e\}$ и $e^{\perp}$ суть собственные подпространства матрицы J_n, отвечающие соответственно собственным значениям n и 0. Они инвариантны относительно коммутирующей с J_n матрицы T. Но это означает, в частности, что e есть собственный вектор для T. В силу теоремы 1, T есть циркулянт.

Следствие 3. *Ганкелева $n\times n$-матрица H тогда и только тогда является ганкелевым циркулянтом, когда H коммутирует с J_n.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущего следствия. Изменяется лишь определение числа ρ: вместо (10) нужно положить

$$\rho = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$$

(см. (2)). Кроме того, ссылку на теорему 1 следует заменить ссылкой на теорему 2.

4. В данном (и следующем) разделе число n считается четным: $n = 2m$. В этом случае можно предложить характеризацию циркулянтов, отличную от той, что получена в теоремах 1 и 2.

Теорема 5. *Теплицева матрица T четного порядка n тогда и только тогда является циркулянтом, когда f есть собственный вектор для T.*

Доказательство. Вектор f тогда и только тогда является собственным вектором $n \times n$-матрицы A, когда ее альтернирующие строчные суммы

$$\tilde{s}_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

сами альтернируют

$$\tilde{s}_1 = -\tilde{s}_2 = \tilde{s}_3 = -\tilde{s}_4 = \cdots. \tag{11}$$

При этом число $\tilde{s}_1$ есть собственное значение, отвечающее вектору f.

Нетрудно проверить, что равенства (11) выполнены для произвольного циркулянта T. Тем самым f есть собственный вектор для каждого из них.

Пусть, напротив, f есть собственный вектор теплицевой матрицы (1). Записывая равенство $\tilde{s}_1 = -\tilde{s}_2$, получаем

$$(-1)^{n-1} t_{n-1} = -t_{-1},$$

или

$$t_{-1} = t_{n-1}.$$

Равенство $\tilde{s}_2 = -\tilde{s}_3$ приводит к соотношению

$$t_{-2} = t_{n-2}.$$

Продолжая таким образом, получим все соотношения (3).

Теорема 6. *Ганкелева матрица H четного порядка n тогда и только тогда является ганкелевым циркулянтом, когда f есть собственный вектор для H.*

Доказательство проводится по образцу доказательства теоремы 2 с заменой вектора e на f. При этом вместо равенства $\mathcal{P}_n e = e$ используем равенство $\mathcal{P}_n f = -f$.

Следующие два утверждения выводятся из теорем 5 и 6 таким же образом, каким теоремы 3 и 4 были получены из теорем 1 и 2.

Теорема 7. *Теплицева матрица T четного порядка n тогда и только тогда является циркулянтом, когда f есть левый собственный вектор для T.*

Теорема 8. *Ганкелева матрица H четного порядка n тогда и только тогда является ганкелевым циркулянтом, когда f есть левый собственный вектор для H.*

5. Отметим следствия из теорем раздела 4, аналогичные следствиям из раздела 3. Число n по-прежнему считается четным.

Положим

$$\mathcal{L}_{n-2} = (\mathrm{span}\{e, f\})^{\perp}. \tag{12}$$

Таким образом, $\mathcal{L}_{n-2}$ есть $(n-2)$-мерное подпространство в $\mathbf{C}^n$, образованное векторами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, для которых выполняются равенство (9) и равенство

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_n = 0. \tag{13}$$

Следствие 4. *$\mathcal{L}_{n-2}$ есть общее инвариантное подпространство для всех теплицевых и ганкелевых циркулянтов четного порядка n.*

Обозначим через K_n "шахматную" матрицу с элементами

$$\{K_n\}_{ij} = (-1)^{|i-j|}.$$

Следствие 5. *Теплицева $n \times n$-матрица T четного порядка n тогда и только тогда является циркулянтом, когда T коммутирует с K_n.*

Доказательство. Всякий циркулянт T удовлетворяет соотношениям

$$TK_n = K_nT = \delta K_n,$$

где

$$\delta = t_0 - t_1 + t_2 - \dots - t_{n-1}. \tag{14}$$

Таким образом, условие в формулировке следствия является необходимым. Пусть теперь для теплицевой матрицы T имеем

$$TK_n = K_nT.$$

Подпространства $\mathrm{span}\{f\}$ и $f^{\perp}$ суть собственные подпространства матрицы K_n для ее собственных значений n и 0. Эти подпространства инвариантны относительно коммутирующей с K_n матрицы T, что, в частности, означает: f есть собственный вектор для T. В силу теоремы 5, T есть циркулянт.

Следствие 6. *Ганкелева $n \times n$-матрица H четного порядка n тогда и только тогда является ганкелевым циркулянтом, когда H коммутирует с матрицей K_n.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущего следствия. Изменяется лишь определение величины δ: вместо (14) следует положить

$$\delta = h_1 - h_2 + h_3 - h_4 + \cdots - h_n.$$

Кроме того, вместо теоремы 5 нужно ссылаться на теорему 6.

6. На одномерном подпространстве $\mathrm{span}\{e\}$ все теплицевы и ганкелевы циркулянты действуют одинаковым образом, а именно, они растягивают (или сжимают) его с коэффициентом растяжения, равным соответствующей строчной сумме. В случае четного порядка n то же самое можно сказать об одномерном подпространстве, натянутом на вектор f. В качестве коэффициента растяжения здесь выступает альтернирующая строчная сумма циркулянта.

Из сказанного следует, что различие между теплицевыми и ганкелевыми циркулянтами должно проявляться в их действии на $\mathcal{L}_{n-1}$, а в случае четного n – в их действии на $\mathcal{L}_{n-2}$. В настоящем разделе мы изучаем эти действия.

Для каждого корня n-ой степени из единицы

$$\epsilon_k = \exp(i2\pi\frac{k}{n}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{15}$$

построим вектор

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ \epsilon_k,\ \epsilon_k^2,\ \dots,\ \epsilon_k^{n-1})^t. \tag{16}$$

Векторы $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ образуют ортонормированный базис подпространства $\mathcal{L}_{n-1}$. Если $n = 2m$, то, исключив из системы $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ вектор z_m, получим ортонормированный базис пространства $\mathcal{L}_{n-2}$. Действия теплицевых и ганкелевых циркулянтов на $\mathcal{L}_{n-1}$ и $\mathcal{L}_{n-2}$ будут рассмотрены именно по отношению к этим базисам.

Хорошо известно, что векторы (16) являются общими собственными векторами всех теплицевых циркулянтов. (Эти векторы суть столбцы матрицы дискретного преобразования Фурье, которая диагонализует всю алгебру циркулянтов.) Поэтому сужение любого циркулянта на $\mathcal{L}_{n-1}$ или $\mathcal{L}_{n-2}$ имеет в указанных выше базисах диагональную матрицу.

Посмотрим, как действует на векторы z_k ганкелев циркулянт H. Вводя, как в теореме 2, теплицев циркулянт $T = \mathcal{P}_n H$, имеем

$$Hz_k = \mathcal{P}_n T z_k = \lambda_k \mathcal{P}_n z_k, \quad \lambda_k \in \mathbf{C}.$$

При этом

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n z_k &= \frac{1}{\sqrt{n}}(\epsilon_k^{n-1},\ \epsilon_k^{n-2},\ \dots,\ \epsilon_k,\ 1)^t \\ &= \frac{\epsilon_k^{-1}}{\sqrt{n}}(1, \epsilon_k^{-1},\ \epsilon_k^{-2},\ \dots,\ \epsilon_k^{-(n-2)},\ \epsilon_k^{-(n-1)})^t \\ &= \frac{\overline{\epsilon}_k}{\sqrt{n}}(1, \overline{\epsilon}_k,\ \overline{\epsilon}_k{}^2,\ \dots,\ \overline{\epsilon}_k{}^{n-2},\ \overline{\epsilon}_k{}^{n-1})^t.\end{aligned}$$

Таким образом, если $0 < k < [n/2]$, то

$$\mathcal{P}_n z_k = \overline{\epsilon}_k z_{n-k}$$

и

$$Hz_k = \lambda_k \overline{\epsilon}_k z_{n-k} = \mu_k z_{n-k}, \quad \mu_k = \lambda_k \overline{\epsilon}_k.$$

Точно так же,

$$Hz_{n-k} = \nu_k z_k.$$

Если векторы базиса $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ расположить в порядке z_1, z_{n-1}, z_2, $z_{n-2}, \dots$, то в этом переупорядоченном базисе H имеет блочно-диагональную матрицу, причем каждой паре базисных векторов z_k, z_{n-k} соответствует диагональный блок

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu_k \\ \mu_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

При четном $n = 2m$ имеется еще 1×1-блок, отвечающий вектору z_m. Он исчезает, если рассматривать сужение H на $\mathcal{L}_{n-2}$.

Рассмотрим $(T+H)$-матрицы, в которых слагаемые T суть циркулянты, а слагаемые H – ганкелевы циркулянты. Известно, что множество таких $(T+H)$-матриц является алгеброй (см. [1]). Эта алгебра некоммутативна, но унитарно квазидиагонализуема, т.е. одновременным унитарным подобием может быть приведена к прямой сумме 1×1- и 2×2-матриц (см. [2]). Рассуждения, изложенные выше, фактически воспроизводят доказательство квазидиагонализуемости и вдобавок характеризуют теплицевы и ганкелевы циркулянты в алгебре

$(T+H)$-циркулянтов. Заодно они показывают, при каких условиях ганкелев циркулянт H является нормальной матрицей. Для этого необходимо и достаточно, чтобы числа μ_k и ν_k в каждом 2×2-блоке имели одинаковый модуль:

$$|\mu_k| = |\nu_k|, \quad k = 0, 1, \dots, [n/2].$$

7. В заключение рассмотрим такой вопрос: можно ли характеризацию циркулянтов, содержащуюся в теореме 1, распространить на ϕ-циркулянты? Напомним, что теплицева матрица (1) называется ϕ-циркулянтом, если

$$t_{-i} = \phi t_{n-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Здесь ϕ – фиксированное комплексное число. Мы будем считать, что $|\phi| = 1$. В частности, при $\phi = -1$ получаем косые циркулянты.

Пусть $|\epsilon| = 1$ и

$$D_\epsilon = \mathrm{diag}(1,\ \epsilon,\ \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}). \tag{18}$$

Если $T = (t_{ij})$ – теплицева матрица, то матрица $U = D_\epsilon^* T D_\epsilon$ имеет элементы

$$u_{ij} = t_{ij}\epsilon^{j-i} \tag{19}$$

и, следовательно, тоже является теплицевой. Таким образом, формула

$$T \longrightarrow U = D_\epsilon^* T D_\epsilon \tag{20}$$

определяет взаимно однозначное отображение множества теплицевых матриц на себя.

Фиксируем число ϕ с модулем единица и определим ϵ как первообразный корень n-й степени из ϕ. Так, для $\phi = -1$ имеем

$$\epsilon = \exp(i\frac{\pi}{n}).$$

Предположим, что диагональная унитарная матрица D_ϵ задана формулой (18) и матрица T в соотношении (20) является ϕ-циркулянтом. Тогда

$$u_{1j} = t_{1j}\epsilon^{j-1}, \quad u_{i1} = t_{i1}\epsilon^{1-i}$$

и

$$u_{i1} = \phi t_{1,n-i+2}\epsilon^{1-i} = \phi\epsilon^{-(n-i+1)}u_{1,n-i+2}\epsilon^{1-i} = \phi\epsilon^{-n}u_{1,n-i+2}.$$

Поскольку $\epsilon^n = \phi$, окончательно получаем

$$u_{i1} = u_{1,n-i+2}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Унитарное подобие* (20) *отображает алгебру ϕ-циркулянтов на алгебру обычных циркулянтов.*

Сопоставим матрице (18) вектор

$$g_\epsilon = (1,\ \epsilon,\ \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1})^t = D_\epsilon e.$$

Лемма 2. *Теплицева матрица U тогда и только тогда имеет собственный вектор e, когда g_ϵ является собственным вектором для матрицы $T = D_\epsilon U D_\epsilon^*$.*

Действительно, равенство

$$Ue = \lambda e$$

равносильно соотношениям

$$D_\epsilon^* T D_\epsilon e = \lambda e \quad \text{и} \quad T(D_\epsilon e) = \lambda (D_\epsilon e).$$

Соединяя лемму 2 с теоремой 1, получаем характеризацию теплицевых ϕ-циркулянтов.

Теорема 9. *Пусть $|\phi| = 1$ и ϵ есть первообразный корень n-й степени из ϕ. Теплицева матрица T тогда и только тогда является ϕ-циркулянтом, когда она имеет собственный вектор g_ϵ.*

Работа второго автора была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 08-01-00115) и программой фундаментальных исследований отделения математических наук РАН “Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач” по проекту “Матричные методы в интегральных и дифференциальных уравнениях”.

Литература

1. E. Bozzo, *Algebras of higher dimension for displacement decompositions and computations with Toeplitz plus Hankel matrices.* — Linear Algebra Appl. **230** (1995), 120–150.
2. Х. Д. Икрамов, Н. В. Савельева, *О некоторых квазидиагонализуемых семействах матриц.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **38** (1998), 1075–1084.

Ikramov Kh. D., Chugunov V. N. A characterization of Toeplitz and Hankel circulants.

A number of propositions of the following type is proved: A Toeplitz matrix T is a circulant if and only if T has an eigenvector e with all the components equal to one. These propositions characterize the circulants (and, more generally, the ϕ-circulants), as well as their Hankel counterparts, in the sets of all Toeplitz and Hankel matrices, respectively.

Московский государственный университет,
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 19 января 2010 г.

Институт вычислительной математики РАН,
ул. Губкина 8,
119333 Москва, Россия

E-mail: vadim@bach.inm.ras.ru