Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

О СОПРЯЖЕННО–НОРМАЛЬНЫХ $(T+H)$–ЦИРКУЛЯНТАХ И КОСЫХ ЦИРКУЛЯНТАХ

1. Введение

Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных матриц порядка n. Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется сопряженно-нормальной, если

$$AA^* = \overline{A^*A}. \tag{1}$$

Сопряженно-нормальными являются, в частности, симметричные, кососимметричные и унитарные матрицы.

Если A – теплицева матрица, то матрица $A\mathcal{P}_n$, где

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \dots & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

ганкелева. Более того, в таком виде можно записать любую ганкелеву матрицу.

Будучи симметричной, всякая ганкелева матрица автоматически является сопряженно-нормальной. Теплицева матрица не обязана быть сопряженно-нормальной, и полное описание теплицевых сопряженно-нормальных матриц было дано в нашей работе [1]. К этому результату в [2] было добавлено описание теплицевых матриц, которые одновременно нормальны и сопряженно-нормальны.

Будем называть $(T+H)$-матрицей произвольную сумму теплицева и ганкелева слагаемых. Это эквивалент английского термина "Toeplitz-plus-Hankel matrix".

Зададимся вопросом, какие $(T+H)$-матрицы являются сопряженно-нормальными? Этот вопрос не тривиален, и в данной статье мы даем лишь частичный ответ на него.

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, $(T+H)$-матрица, сопряженно-нормальная матрица, циркулянт, ганкелев циркулянт, ϕ-циркулянт, $(T+H)$-циркулянт.

Пусть T – обычный (т.е. теплицев) циркулянт. Соответствующую ему ганкелеву матрицу $H = T\mathcal{P}_n$ назовем ганкелевым циркулянтом. Тогда сумму $T+H$ произвольных теплицева и ганкелева циркулянтов естественно называть $(T+H)$-циркулянтом. Аналогичные соглашения примем в отношении косых циркулянтов.

В этой терминологии содержанием данной статьи является описание множеств сопряженно-нормальных $(T+H)$-циркулянтов и косых циркулянтов.

В разделе 2 выводится основное соотношение, которому должна удовлетворять всякая $(T+H)$-матрица. В разделе 3 это соотношение упрощается для случая $(T+H)$-циркулянтов и косых циркулянтов. Построение множества сопряженно-нормальных $(T+H)$-циркулянтов проводится в разделе 4, а множества сопряженно-нормальных косых $(T+H)$-циркулянтов – в разделе 5. В заключительном разделе 6 приведен пример, демонстрирующий различия между $(T+H)$-циркулянтами и $(T+H)$-матрицами общего вида.

2. Произвольные $(T+H)$-матрицы

Пусть A и B – произвольные теплицевы матрицы, а $G = A + B\mathcal{P}_n$ – соответствующая им $(T+H)$-матрица. Записывая для G условие сопряженной нормальности, получаем

$$(A^* + \mathcal{P}_n B^*)(A + B\mathcal{P}_n) = \overline{(A + B\mathcal{P}_n)(A^* + \mathcal{P}_n B^*)},$$

или

$$A^*A + A^*B\mathcal{P}_n + \mathcal{P}_n B^*A + \mathcal{P}_n B^* B\mathcal{P}_n = \overline{A}A^t + \overline{A}\mathcal{P}_n B^t + \overline{B}\mathcal{P}_n A^t + \overline{B}B^t. \quad (2)$$

Будучи персимметричными матрицами, A и B удовлетворяют соотношениям

$$A\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n A^t, \qquad B\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n B^t. \quad (3)$$

Напомним, что персимметрией называется свойство матрицы быть симметричной относительно второй главной диагонали $(1,n), (2,n-1), \dots, (n,1)$. Равенства (3) собственно и являются матричной записью свойства персимметрии. Используя их в (2), находим

$$A^*A + A^*B\mathcal{P}_n + \overline{B}A^t\mathcal{P}_n + \overline{B}B^t = \overline{A}A^t + \overline{A}B\mathcal{P}_n + \overline{B}A\mathcal{P}_n + \overline{B}B^t,$$

или

$$A^*A - \overline{A}A^t = [\overline{A}B + \overline{B}A - A^*B - \overline{B}A^t]\mathcal{P}_n,$$

или, наконец,

$$A^*A - \overline{A}A^t = [\overline{(A - A^t)\overline{B}} + \overline{B}(A - A^t)]\mathcal{P}_n. \tag{4}$$

Уравнение (4) и является нашим основным соотношением.

3. Случай циркулянтов

Напомним, что циркулянты фиксированного порядка n образуют коммутативную алгебру, замкнутую относительно матричных операций транспонирования, сопряжения и поэлементного сопряжения. Эта алгебра диагонализуется одним и тем же унитарным подобием, о чем подробней будет сказано в следующем разделе. Те же свойства имеет множество косых циркулянтов фиксированного порядка.

Пусть обе матрицы A и B в основном соотношении (4) являются циркулянтами или косыми циркулянтами. Тогда матрицы $A - A^t$ и $\overline{B}$ перестановочны, что позволяет переписать (4) в виде

$$A^*A - \overline{A}A^t = [\overline{(A - A^t)\overline{B}} + (A - A^t)\overline{B}]\mathcal{P}_n. \tag{5}$$

Очевидно, что матрица, стоящая в правой части, вещественна, поэтому вещественной должна быть и матрица $A^*A - \overline{A}A^t$.

Следующее утверждение играет важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

Лемма 1. *Пусть A – циркулянт или косой циркулянт. Если матрица $A^*A - \overline{A}A^t$ вещественна, то A является сопряженно-нормальной матрицей.*

Доказательство. Вещественность матрицы $A^*A - \overline{A}A^t$ означает, что

$$A^*A - \overline{A}A^t = \overline{A^*A - \overline{A}A^t},$$

или

$$A^*A - \overline{A}A^t = A^t\overline{A} - AA^*.$$

Переставляя сомножители в обоих слагаемых правой части, получаем

$$A^*A - \overline{A}A^t = \overline{A}A^t - A^*A,$$

или

$$A^*A - \overline{A}A^t = 0. \tag{6}$$

Лемма доказана.

Замечание. Лемма 1 показывает, в частности, что в сопряженно-нормальном $(T+H)$-циркулянте (или косом циркулянте) $G = A + B\mathcal{P}_n$ теплицево слагаемое A также является сопряженно-нормальной матрицей. (Как уже отмечено выше, сопряженная нормальность ганкелевой компоненты имеет место всегда.) Для сопряженно-нормальной $(T+H)$-матрицы общего вида аналогичное утверждение может быть неверным. Мы приводим соответствующий пример в разделе 6.

Снова используя перестановочность матриц A и A^*, запишем условие сопряженной нормальности (6) в виде

$$\operatorname{Im}(AA^*) = 0. \tag{7}$$

Чтобы получить полное описание сопряженно-нормальных $(T+H)$-циркулянтов (и косых циркулянтов), к условию (7) нужно еще добавить соотношение

$$\overline{(A - A^t)}B + (A - A^t)\overline{B} = 0 \tag{8}$$

(см. (5)).

4. Построение $(T+H)$-циркулянтов

Известно, что всякий $n \times n$-циркулянт C может быть представлен в виде

$$C = F^* D F, \tag{9}$$

где

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

есть матрица дискретного преобразования Фурье (или DFT-матрица) порядка n, ϵ – первообразный корень n-й степени из единицы, а D – диагональная матрица:

$$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n).$$

Положим

$$\hat{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_n, d_{n-1}, \dots, d_2)$$

и
$$\tilde{D} = \mathrm{diag}(d_2, d_1, d_n, d_{n-1}, \dots, d_3).$$

Получим представления, аналогичные (9), для циркулянтов C^t, C^* и $\overline{C}$. Имеем

$$C^t = FDF^* = F^*F^2D(F^*)^2F = F^*\hat{D}F, \tag{10}$$
$$C^* = F^*\overline{D}F, \tag{11}$$
$$\overline{C} = F\overline{D}F^* = F^*F^2\overline{D}(F^*)^2F = F^*\hat{\overline{D}}F. \tag{12}$$

Для косого циркулянта S имеем вместо (9) спектральное разложение
$$S = WF^*DF\overline{W}, \tag{13}$$
где
$$W = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$$
и ε – первообразный корень из минус единицы. Отсюда выводим

$$\begin{aligned} S^t &= \overline{W}FDF^*W = WF^*F\overline{W}(\overline{W}FDF^*W)WF^*F\overline{W} \\ &= WF^*(F\overline{W}^2F)D(F\overline{W}^2F)^*F\overline{W} \\ &= WF^*QDQF\overline{W} = WF^*\tilde{D}F\overline{W}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь положено
$$Q = F\overline{W}^2F$$
и использовано соотношение
$$Q = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_{n-2},$$
доказанное в лемме 2 из [3]. Далее,
$$S^* = WF^*\overline{D}\ F\overline{W} \tag{15}$$
и
$$\begin{aligned} \overline{S} &= \overline{W}F\overline{D}F^*W = WF^*F\overline{W}(\overline{W}F\overline{D}F^*W)WF^*F\overline{W} \\ &= WF^*(F\overline{W}^2F)\overline{D}(F\overline{W}^2F)^*F\overline{W} = WF^*Q\overline{D}QF\overline{W} \\ &= WF^*\tilde{\overline{D}}F\overline{W}. \end{aligned} \tag{16}$$

Разложения (14)–(16) будут нужны в следующем разделе.

Вернемся к системе (7), (8), считая A и B циркулянтами со спектральными разложениями

$$A = F^* D^{(1)} F \tag{17}$$

и

$$B = F^* D^{(2)} F. \tag{18}$$

Наша задача – найти условия, которым должны подчиняться диагональные матрицы

$$D^{(1)} = \operatorname{diag}\{d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\}$$

и

$$D^{(2)} = \operatorname{diag}\{d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\}.$$

Лемма 2. *Циркулянт A тогда и только тогда удовлетворяет условию* (7), *когда*

$$|d_k^{(1)}| = |d_{n+2-k}^{(1)}|, \quad k = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{19}$$

Это утверждение составляет содержание раздела 2.2 в [3].

Множество циркулянтов, для которых выполнены соотношения (19), образует в $M_n(\mathbf{C})$ вещественное алгебраическое многообразие $\mathcal{M}$ размерности $2n - \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Покажем, что для каждого циркулянта A из этого множества уравнение (8) разрешимо относительно циркулянта B.

Подставляя разложения (17) и (18) в условие (8), получаем

$$(F^*\overline{\hat{D}^{(1)}}F - F^*\overline{D^{(1)}}F)F^*D^{(2)}F + (F^*D^{(1)}F - F^*\hat{D}^{(1)}F)F^*\overline{\hat{D}^{(2)}}F = 0.$$

Умножая слева на F, а справа на F^*, имеем

$$(\overline{\hat{D}^{(1)}} - \overline{D^{(1)}})D^{(2)} + (D^{(1)} - \hat{D}^{(1)})\overline{\hat{D}^{(2)}} = 0. \tag{20}$$

Все матрицы в уравнении (20) диагональные, поэтому оно сводится к n скалярным соотношениям, получаемым приравниванием диагональных элементов. Поскольку первый диагональный элемент у матриц $D^{(1)}$ и $\hat{D}^{(1)}$ один и тот же, первое из этих соотношений есть тождество, выполняющееся при любом $d_1^{(2)}$. При четном n $(n = 2m)$

то же самое можно сказать об элементе $d^{(2)}_{m+1}$. Остальные соотношения распадаются на пары уравнений относительно элементов $d^{(2)}_k$ и $d^{(2)}_{n+2-k}$, $k = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Фиксируем индекс k в указанном промежутке. Если $d^{(1)}_k = d^{(1)}_{n+2-k}$, то уравнения данной пары превращаются в тождества, и элементы $d^{(2)}_k$ и $d^{(2)}_{n+2-k}$ могут быть любыми комплексными числами. Пусть теперь $a = d^{(1)}_k \neq b = d^{(1)}_{n+2-k}$. Положим $x = d^{(2)}_k$, $y = d^{(2)}_{n+2-k}$. Тогда оба уравнения пары равносильны соотношению

$$\overline{(a-b)}x = (a-b)\overline{y}. \tag{21}$$

Отсюда следует, что $|x| = |y|$.

Запишем числа $a - b, x$ и y в полярной форме:

$$a - b = \rho e^{i\phi}, \qquad x = re^{i\phi_x}, \qquad y = re^{i\phi_y}.$$

Приравнивая в (21) аргументы, имеем

$$\phi_x - \phi = \phi - \phi_y,$$

или

$$\phi_y = 2\phi - \phi_x.$$

Таким образом, одну из величин x и y (например, x) можно выбрать произвольно, а тогда вторая однозначно определяется формулой

$$y = |x|e^{i(2\phi-\phi_x)}. \tag{22}$$

Итак, уравнение (20) разрешимо для любой матрицы $D^{(1)}$, удовлетворяющей условиям (19). Размерность вещественного многообразия $\mathcal{N}_q$ матриц $D^{(2)}$, решающих это уравнение, зависит от количества пар, для которых $d^{(1)}_k = d^{(1)}_{n+2-k}$; обозначим число таких пар через q, $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Подсчет, основанный на приведенном выше анализе, дает

$$\dim \mathcal{N}_q = 2n - 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 2q.$$

Выделим в $\mathcal{M}$ подмногообразие $\mathcal{M}_q$ матриц $D^{(1)}$ с q совпадениями типа $d^{(1)}_k = d^{(1)}_{n+2-k}$. Размерность этого подмногообразия, как легко видеть, равна

$$\dim \mathcal{M}_q = 2n - \left[\frac{n-1}{2}\right] - q. \tag{23}$$

Во множестве $(T + H)$-циркулянтов подмногообразиям $\mathcal{M}_q$ и $\mathcal{N}_q$ соответствует подмногообразие $\mathcal{K}_q$ размерности

$$\dim \mathcal{M}_q + \dim \mathcal{N}_q = 4n - 3\left[\frac{n-1}{2}\right] + q. \tag{24}$$

Из формулы (24) очевидно, что размерность $\dim \mathcal{K}_q$ максимальна при

$$q_{\max} = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

В этом случае

$$\dim \mathcal{K}_{q_{\max}} = 4n - 2\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Такова же размерность всего множества $(T + H)$-циркулянтов порядка n.

5. Построение косых $(T + H)$-циркулянтов

Пусть A и B – косые циркулянты со спектральными разложениями

$$A = WF^*D^{(1)}F\overline{W} \tag{25}$$

и

$$B = WF^*D^{(2)}F\overline{W}. \tag{26}$$

Лемма 3. *Косой циркулянт A тогда и только тогда удовлетворяет условию* (7), *когда*

$$|d_1^{(1)}| = |d_2^{(1)}|, \quad |d_k^{(1)}| = |d_{n+3-k}^{(1)}|, \quad k = 3, 4, \ldots, n. \tag{27}$$

Это утверждение составляет содержание раздела 2.3 в [3].

Множество косых циркулянтов, для которых выполнены соотношения (27), образует в $M_n(\mathbf{C})$ вещественное алгебраическое многообразие $\mathcal{M}$ размерности $2n - [n/2]$. Покажем, что для каждого косого циркулянта A из этого множества уравнение (8) разрешимо относительно косого циркулянта B.

Подставляя разложения (25) и (26) в условие (8) и используя формулы (14)–(16), получаем

$$\begin{aligned}(WF^*\overline{\tilde{D}^{(1)}}F\overline{W} - WF^*\overline{D^{(1)}}F\overline{W})WF^*D^{(2)}F\overline{W} \\ = (WF^*D^{(1)}F\overline{W} - WF^*\tilde{D}^{(1)}F\overline{W})WF^*\overline{\hat{D}^{(2)}}F\overline{W} = 0.\end{aligned}$$

Умножая слева на $F\overline{W}$, а справа на WF^*, имеем

$$(\overline{\tilde{D}^{(1)}} - \overline{D^{(1)}})D^{(2)} + (D^{(1)} - \tilde{D}^{(1)})\overline{\tilde{D}^{(2)}} = 0. \tag{28}$$

Все матрицы в уравнении (28) диагональные, поэтому (28) эквивалентно n скалярным соотношениям, получаемым приравниванием диагональных элементов. При нечетном n ($n = 2m + 1$) матрицы $D^{(1)}$ и $\tilde{D}^{(1)}$ имеют один и тот же элемент в диагональной позиции $(m + 2, m + 2)$. Соответствующее скалярное соотношение есть тождество, выполняющееся при любом $d^{(2)}_{m+2}$. Остальные соотношения распадаются на пары уравнений относительно элементов $d^{(2)}_k$ и $d^{(2)}_{n+3-k}$, $k = 3, 4, \dots, [\frac{n}{2}] + 1$, а также элементов $d^{(2)}_1$ и $d^{(2)}_2$.

Фиксируем какой-либо индекс k, соответствующий указанным парам. Если $d^{(1)}_1 = d^{(1)}_2$ или $d^{(1)}_k = d^{(1)}_{n+3-k}$, то уравнения данной пары превращаются в тождества, и элементы $d^{(2)}_1$ и $d^{(2)}_2$ или $d^{(2)}_k$ и $d^{(2)}_{n+3-k}$ могут быть любыми комплексными числами. Пусть теперь $a = d^{(1)}_1 \neq b = d^{(1)}_2$ или $a = d^{(1)}_k \neq b = d^{(1)}_{n+3-k}$. Положив $x = d^{(2)}_1$ и $y = d^{(2)}_2$ (соответственно, $x = d^{(2)}_k$ и $y = d^{(2)}_{n+3-k}$), мы, как и в разделе 4, приходим к формуле (22).

Итак, уравнение (28) разрешимо для любой матрицы $D^{(1)}$, удовлетворяющей условиям (27). Размерность вещественного многообразия матриц $D^{(2)}$, решающих это уравнение, зависит от количества совпадений внутри пар вида $(d^{(1)}_k, d^{(1)}_{n+3-k})$, а также пары $(d^{(1)}_1, d^{(1)}_2)$. Пусть число таких пар равно q, $0 \leqslant q \leqslant [n/2]$. Подсчет, основанный на приведенном выше анализе, дает

$$\dim \mathcal{N}_q = 2n - 2[n/2] + 2q.$$

Выделим в $\mathcal{M}$ подмногообразие $\mathcal{M}_q$ матриц $D^{(1)}$ с q совпадениями указанного выше типа. Размерность этого подмногообразия, как легко видеть, равна

$$\dim \mathcal{M}_q = 2n - [n/2] - q.$$

Во множестве косых $(T + H)$-циркулянтов подмногообразиям $\mathcal{M}_q$ и $\mathcal{N}_q$ соответствует подмногообразие $\mathcal{K}_q$ размерности

$$\dim \mathcal{M}_q + \dim \mathcal{N}_q = 4n - 3[n/2] + q. \tag{29}$$

Из формулы (29) очевидно, что размерность $\dim \mathcal{K}_q$ максимальна при

$$q_{\max} = [n/2].$$

В этом случае

$$\dim \mathcal{K}_{q_{\max}} = 4n - 2[n/2].$$

Такова же размерность всего множества косых $(T+H)$-циркулянтов порядка n.

6. Пример

Согласно лемме 1, теплицево слагаемое A в представлении $G = A + B\mathcal{P}_n$ сопряженно-нормального $(T+H)$-циркулянта (или косого циркулянта) G обязано само быть сопряженно-нормальной матрицей. Приведем пример, показывающий, что для сопряженно-нормальной $(T+H)$-матрицы общего вида аналогичное утверждение может быть неверным. (Этот пример построен студентом факультета ВМК МГУ А. Абдикалыковым, которому мы выражаем свою благодарность.)

Для вещественных матриц понятия нормальности и сопряженной нормальности тождественны. Поскольку матрицы в нашем примере вещественны, будем говорить об их нормальности или отсутствии этого свойства.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \sqrt{5} & -1 \\ 2 & 0 & -2 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -\sqrt{5} & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта теплицева матрица не является нормальной. Действительно, 2-норма ее первой строки больше 2-нормы первого столбца. Положим

$$B\mathcal{P}_n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Складывая эту ганкелеву матрицу с матрицей A, получим $(T+H)$-матрицу

$$G = A + B\mathcal{P}_n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{5} & -19 & 10\sqrt{5} & -9 \\ 21 & 0 & -19 & 10\sqrt{5} \\ -10\sqrt{5} & 21 & 0 & -19 \\ 1 & -10\sqrt{5} & 21 & \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением матриц GG^t и G^tG можно убедиться, что матрица G нормальна.

Работа второго автора была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 08-01-00115) и программой фундаментальных исследований отделения математических наук РАН "Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач" по проекту "Матричные методы в интегральных и дифференциальных уравнениях".

Литература

1. V. N. Chugunov, Kh. D. Ikramov, *The conjugate-normal Toeplitz problem.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 2467–2473.
2. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *О теплицевых матрицах, являющихся одновременно нормальными и сопряженно-нормальными.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 67–74.
3. V. N. Chugunov, Kh. D. Ikramov, *A contribution to the normal Hankel problem.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 2094–2101.

Ikramov Kh. D, Chugunov V. N. On conjugate-normal $(T+H)$-circulants and skew-circulants.

A matrix A is called a $(T+H)$-circulant (skew-circulant) if A can be represented as a sum of a conventional (that is, Toeplitz) and a Hankel circulants (respectively, skew-circulants). A complete description of the sets of conjugate-normal $(T+H)$-circulants and skew-circulants is given.

Московский государственный университет
ГСП-1, Ленинские Горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 19 января 2010 г.

Институт вычислительной математики РАН
ул.Губкина 8,
119333 Москва, Россия
E-mail: vadim@bach.inm.ras.ru