Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Х. Д. Икрамов

УНИТАРНОЕ ПОДОБИЕ ПОЭЛЕМЕНТНО СОПРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ И УНИТАРНАЯ ДЕКОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ

1. Обозначим через $M_n(\mathbf{C})$ множество комплексных $n \times n$-матриц. В этой заметке мы обсуждаем связь между следующими двумя возможными свойствами матриц $A \in M_n(\mathbf{C})$:

А. Матрица A унитарно подобна матрице $\overline{A}$, получаемой из A взятием комплексного сопряжения от каждого элемента.

В. Матрица A может быть унитарным подобием преобразована в вещественную матрицу (т.е. декомплексифицирована).

Каждое из этих свойств, если оно имеет место для матрицы A, предполагает одни и те же ограничения на ее спектр и жорданову структуру, а именно:

а) Если невещественное число λ является собственным значением для A, то $\bar{\lambda}$ — также собственное значение, причем той же кратности.

б) Число и порядки жордановых клеток, относящихся к $\bar{\lambda}$, те же, что и для λ.

Значит ли это, что свойства А и В эквивалентны?

В разделе 2 мы показываем, что свойство В влечет за собой свойство А. Пример, построенный в разделе 3, показывает, что обратная импликация неверна. Таким образом, свойство В "сильнее" свойства А. В разделе 4 мы даем дополнительный комментарий к этому выводу.

2. Пусть найдется унитарная матрица Q, такая, что матрица

$$B = Q^* A Q \tag{1}$$

вещественна. Тогда

$$B = Q^t \bar{A} \bar{Q}$$

Ключевые слова: унитарное подобие, декомплексификация, приводимость, блочный кватернион.

и
$$\bar{A} = \bar{Q}Q^*AQQ^t = P^*AP, \tag{2}$$
где матрица
$$P = QQ^t, \tag{3}$$
трансформирующая A в $\bar{A}$, унитарна (и, сверх того, симметрична). Итак, свойство B $\Longrightarrow$ свойство A.

3. Пусть n — четное число: $n = 2m$. Положим
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Назовем *блочным кватернионом* всякую матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$, удовлетворяющую соотношению
$$\bar{A}J = JA. \tag{5}$$

Если блочный кватернион A представить в виде
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$
с блоками размера $m \times m$, то эти блоки связаны соотношениями
$$A_{21} = -\bar{A}_{12}, \quad A_{22} = \bar{A}_{11}. \tag{7}$$

Из определения (5) видно, что блочный кватернион A унитарно подобен матрице $\bar{A}$, т.е. обладает свойством A. Мы покажем сейчас, что равенство (1) с вещественной матрицей B может выполняться лишь в том случае, если блочный кватернион A имеет специальное свойство, называемое приводимостью.

Определение. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется приводимой, если A и A^* имеют нетривиальное общее инвариантное подпространство, и неприводимой в противном случае. Иначе эти определения можно сформулировать так: приводимая матрица имеет нетривиальную пару ортогонально дополнительных инвариантных подпространств; для неприводимой матрицы такой пары не существует.*

Лемма 1. *Блочный кватернион A, обладающий свойством B, является приводимой матрицей.*

Доказательство. Предположим, что

$$A = QRQ^*, \tag{8}$$

где $QQ^* = I_n$ и R – вещественная матрица. Подставляя (8) в (5), имеем

$$\bar{Q}RQ^tJ = JQRQ^*,$$

или

$$R(Q^tJQ) = (Q^tJQ)R. \tag{9}$$

Как и J, матрица

$$K = Q^tJQ$$

унитарная и кососимметричная. Поэтому равенство

$$K = \alpha I_n$$

невозможно ни при каком α. Следовательно, K имеет нетривиальную пару ортогональных инвариантных подпространств, отвечающих взаимно дополнительным частям ее спектра. В силу (9), те же подпространства инвариантны относительно R, т.е. являются общими инвариантными подпространствами для R и R^*. Итак, R приводима, а тогда приводима и унитарно подобная ей матрица A.

Рассмотрим теперь конкретный блочный кватернион

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

порядка $n = 4$. Покажем, что A – неприводимая матрица.

Переставляя в A вторую и третью строки, а затем второй и третий столбцы, получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -i & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Матрицы C и A приводимы или неприводимы одновременно. Мы покажем, что C неприводима.

Все собственные значения матрицы C простые. При этом собственными векторами для i и $-i$ являются координатные векторы

$$z_1 = (1, 0, 0, 0)^t$$

и

$$z_2 = (0, 1, 0, 0)^t.$$

Собственным значениям $2i$ и $-2i$ отвечают (ненормированные) собственные векторы

$$z_3 = (-i, i, 1, 0)^t$$

и

$$z_4 = (i, i, 0, 1)^t.$$

Очевидно, что $z_1 \perp z_2$ и $z_3 \perp z_4$. В то же время никакие другие пары z_i, z_j не являются ортогональными.

Инвариантные подпространства матрицы с простым спектром суть линейные оболочки всевозможных подсистем системы ее собственных векторов. Два таких подпространства ортогональны друг другу, если ортогональны их базисы. Однако систему z_1, z_2, z_3, z_4 нельзя разбить на две ортогональные подсистемы. Итак, матрица C неприводима и, вместе с тем, неприводим блочный кватернион A. Согласно лемме, это означает, что A не имеет свойства B.

4. Точное описание взаимосвязи свойств A и B получено в [1]. Оно содержится в следующем утверждении:

Теорема 1. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда может быть овеществлена унитарным подобием, когда A и $\bar{A}$ унитарно подобны и подобие между ними можно осуществить посредством матрицы P, одновременно унитарной и симметричной.*

Существование матрицы, трансформирующей A в $\bar{A}$ и при этом одновременно унитарной и симметричной, отмечено в разделе 2. Пример, построенный в разделе 3, показывает, что хотя всякий блочный кватернион A унитарно подобен матрице $\bar{A}$, это подобие не всегда можно осуществить посредством матрицы не только унитарной, но и симметричной.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам.* — Мат. заметки (принята к публикации) (2010).

Ikramov Kh. D. Unitary similarity of entrywise conjugate matrices and unitary decomplexification.

Assume that a complex $n \times n$ matrix A is unitarily similar to a real matrix. It is proved that in this case, A is unitarily similar to its entrywise conjugate $\bar{A}$. An example showing that the reverse implication is in general false is constructed.

Московский
государственный университет,
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 21 января 2010 г.