Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Х. Д. Икрамов

О ЛАТЕНТНО-ВЕЩЕСТВЕННЫХ МАТРИЦАХ И БЛОЧНЫХ КВАТЕРНИОНАХ

1. Обозначим через $M_n(\mathbf{C})$ множество комплексных $n \times n$-матриц. Предположим, что матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобна матрице $\overline{A}$, получаемой из A взятием комплексного сопряжения от каждого элемента, и будем в этом случае писать $A \sim_U \overline{A}$.

Подобие (даже и неунитарное) между A и $\overline{A}$ накладывает следующие ограничения на спектр и жорданову структуру матрицы A:

а) Если невещественное число λ является собственным значением для A, то $\overline{\lambda}$ – также собственное значение, причем той же кратности.

б) Число и порядки жордановых клеток, относящихся к $\overline{\lambda}$, те же, что и для λ.

Назовем матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ *неприводимой,* если A и A^* не имеют нетривиальных общих инвариантных подпространств. Иначе говоря, A неприводима, если не существует унитарного подобия, которое превращало бы A в прямую сумму матриц меньшего порядка. Эффективный способ проверки неприводимости указан в [1].

Теорема 1. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ неприводима и $A \sim_U \overline{A}$, то унитарная матрица P в соотношении*

$$\overline{A} = P^* A P \tag{1}$$

должна быть симметричной или кососимметричной.

Доказательство. Из (1) выводим $A = P^T \overline{AP}$ и

$$A = P^T P^* A P \overline{P} = (P\overline{P})^* A (P\overline{P}).$$

Итак, унитарная матрица $Q = P\overline{P}$ перестановочна с A. Если Q не является скалярной матрицей, то в ее спектре $\sigma(Q)$ есть по меньшей

Ключевые слова: унитарное подобие, блочный кватернион, неприводимость, элементарные делители, билинейно метрические пространства.

мере два различных собственных значения. Рассмотрим произвольное разбиение

$$\sigma(Q) = \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad \sigma_1 \neq \varnothing, \quad \sigma_2 \neq \varnothing, \quad \sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing.$$

Подмножествам σ_1 и σ_2 отвечают ортогональные инвариантные подпространства матрицы Q, дополняющие друг друга до $\mathbb{C}^n$. Эти же подпространства будут инвариантными для перестановочной с Q матрицы A, что противоречит ее неприводимости.

Таким образом, $Q = P\overline{P}$ должна быть скалярной матрицей, что возможно лишь в двух случаях, а именно

$$P\overline{P} = I \tag{2}$$

или

$$P\overline{P} = -I. \tag{3}$$

Соединяя условие унитарности $PP^* = I$ соответственно с (2) и (3), получаем нужное утверждение.

Назовем матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ *латентно-вещественной*, если $A \sim_U \overline{A}$ и унитарную матрицу P в соотношении (1) можно выбрать симметричной. Смысл этого термина объясняет следующий результат, полученный в [2].

Теорема 2. *Унитарное подобие*

$$A \longrightarrow R = Q^*AQ,$$

преобразующее матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ в вещественную матрицу R, существует тогда и только тогда, когда $A \sim_U \overline{A}$ и унитарную матрицу P в соотношении (1) *можно выбрать симметричной.*

Вторая возможность, указываемая теоремой 1, реализуется, например, *блочными кватернионами*. Так называются матрицы четного порядка $n = 2m$, удовлетворяющие условию

$$\overline{A}J = JA, \tag{4}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Если блочный кватернион A представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

с блоками размера $m \times m$, то эти блоки связаны соотношениями

$$A_{21} = -\overline{A}_{12}, \quad A_{22} = \overline{A}_{11}. \tag{7}$$

В отношении свойства унитарной приводимости к вещественному виду блочные кватернионы в известной мере противоположны латентно-вещественным матрицам. Так, в [2] показано, что неприводимый блочный кватернион нельзя сделать вещественным никаким унитарным подобием. Аналогичное утверждение справедливо для любой матрицы A, удовлетворяющей соотношению (1) с унитарной кососимметричной матрицей P (будем называть такие матрицы *обобщенными блочными кватернионами*). В самом деле, матрица P должна иметь четный порядок $n = 2m$ и может быть приведена посредством унитарной конгруэнции

$$P \longrightarrow K = U^T P U, \quad U^* U = I, \tag{8}$$

к прямой сумме m блоков второго порядка

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Это вытекает, например, из [3, §4.4, задача 26], где следует учесть, что матрица P невырожденна, а преобразование (8) сохраняет и унитарность, и косую симметрию.) Матрица

$$K = K_2 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_2$$

лишь порядком строк и столбцов отличается от матрицы (5). Тем самым существует унитарная конгруэнция, преобразующая P в J:

$$P \longrightarrow J = V^T P V, \quad V^* V = I.$$

Полагая

$$B = V^T A \overline{V},$$

получаем $\overline{B} J = J B$, т.е. матрица B, унитарно подобная исходной матрице A, является блочным кватернионом. Если A неприводима, то блочный кватернион B также неприводим.

2. Изучим следующий вопрос: имеются ли сущностные спектральные различия между латентно-вещественными матрицами и блочными кватернионами, препятствующие последним быть унитарно приводимыми к вещественному виду?

В поисках ответа примем в качестве образца два результата из теории линейных пространств с билинейной метрикой (см. [4, глава VII]). Рассмотрим вначале комплексные евклидовы пространства. Без ограничения общности, в качестве такого пространства $\mathcal{L}$ можно взять $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

Теорема 3. *Пусть $(\lambda - \rho_1)^{m_1}, \dots, (\lambda - \rho_s)^{m_s}$ – произвольная система многочленов указанного вида такая, что $m_1 + \cdots + m_s = n$. Тогда найдется симметричный оператор пространства $\mathcal{L}$, для которого эти многочлены составляют полную систему элементарных делителей.*

Отметим, что в пространстве $\mathbb{C}^n$ с метрической матрицей $P = P^T$ симметричные операторы могут быть отождествлены с матрицами A, для которых

$$A^T = PAP^*. \tag{9}$$

(В частности, при $P = I$ получаем комплексные симметричные матрицы.) Мы рассматриваем (9) как аналог соотношения (1) в случае латентно-вещественной матрицы A.

Пусть теперь $n = 2m$ есть четное число, а $\mathcal{L}$ является симплектическим пространством. Снова не ограничивая общности, таким пространством можно считать $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением, задаваемым кососимметричной матрицей J.

Теорема 4. *Пусть A – симметричный оператор симплектического пространства $\mathcal{L}$. Тогда всякий многочлен из системы элементарных делителей оператора A имеет четное число вхождений в эту систему. Обратно, всякая совокупность многочленов вида $(\lambda - \rho_i)^{m_i}$, обладающая указанным свойством, может быть реализована как система элементарных делителей некоторого симметричного оператора, действующего в $\mathcal{L}$.*

Отметим, что в симплектическом пространстве $\mathbb{C}^n$ с метрической матрицей $P = -P^T$ симметричные операторы могут быть отождествлены с матрицами, удовлетворяющими соотношению (9). (В частности, при $P = J$ получаем так называемые косогамильтоновы матрицы.) Мы рассматриваем (9) как аналог равенства (4) или более общего равенства, определяющего обобщенные блочные кватернионы.

3. Возвращаясь к вопросу, сформулированному в предыдущем разделе, докажем утверждения, которые можно рассматривать как аналоги теорем 3 и 4.

Теорема 5. *Пусть система многочленов*

$$(\lambda - \rho_1)^{m_1}, \dots, (\lambda - \rho_s)^{m_s} \tag{10}$$

обладает следующим свойством симметрии относительно вещественной оси: если

$$\mathrm{Im}\rho_i \neq 0, \tag{11}$$

то наряду с многочленом $(\lambda - \rho_i)^{m_i}$ *в систему* (10) *входит многочлен* $(\lambda - \overline{\rho_i})^{m_i}$, *причем число вхождений обоих в эту систему одинаково. Тогда найдется латентно-вещественная матрица, для которой* (10) *является системой элементарных делителей.*

Доказательство. Сопоставим каждой паре многочленов вида

$$(\lambda - \rho_i)^{m_i}, \quad (\lambda - \overline{\rho_i})^{m_i}, \tag{12}$$

где ρ_i подчинено условию (11), матрицу

$$A_i = J_{m_i}(\rho_i) \oplus J_{m_i}(\overline{\rho_i}). \tag{13}$$

Символ $J_m(\rho)$ обозначает жорданову клетку порядка m с числом ρ на главной диагонали. Положим

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & I_{m_i} \\ I_{m_i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где I_{m_i} – единичная матрица порядка m_i. Тогда

$$\overline{A_i} = P_i A_i P_i. \tag{15}$$

Исходя из этого наблюдения, построим по системе (10) матрицу

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_c \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_r. \tag{16}$$

Здесь $A_1, \ldots, A_c$ – матрицы вида (13), отвечающие парам многочленов (12) для невещественных ρ_i, а $J_1, \ldots, J_r$ – жордановы клетки, отвечающие вещественным многочленам $(\lambda - \rho_j)^{m_j}$ системы (10) и имеющие порядки, равные соответствующим степеням m_j. По матрице (16) сконструируем унитарную (даже вещественную ортогональную) и симметричную матрицу

$$P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_c \oplus I_{m_1} \oplus \cdots \oplus I_{m_r}.$$

Слагаемые P_i $(1 \leqslant i \leqslant c)$ суть матрицы вида (14), а порядки единичных матриц I_{m_j} равны степеням соответствующих многочленов $(\lambda - \rho_j)^{m_j}$. Нетрудно видеть, что $\overline{A} = PAP$. Согласно теореме 2, матрица A должна быть латентно-вещественной.

Теорема 6. *В системе элементарных делителей обобщенного блочного кватерниона всякий вещественный многочлен $(\lambda - \rho_j)^{m_j}$ появляется четное число раз. Обратно, всякая совокупность многочленов вида $(\lambda - \rho_i)^{m_i}$, обладающая свойством симметрии относительно вещественной оси, описанным в теореме 5, и дополнительным свойством четного вхождения вещественных многочленов $(\lambda - \rho_j)^{m_j}$, может быть реализована как система элементарных делителей некоторого обобщенного блочного кватерниона.*

Доказательство. Как показано в разделе 1, всякий обобщенный блочный кватернион может быть сведен к стандартному посредством унитарного подобия. Поэтому оба утверждения теоремы достаточно проверить для стандартных блочных кватернионов.

Доказательство четного вхождения вещественных многочленов в систему элементарных делителей блочного кватерниона составляет содержание разделов 2 и 3 статьи [5]. Это позволяет нам сразу перейти к обоснованию второго утверждения теоремы.

Будем строить блочный кватернион как прямую сумму

$$A = B \oplus \overline{B}. \tag{17}$$

Матрица B, в свою очередь, является прямой суммой, конструируемой по заданной системе многочленов (10) следующим образом: 1) для каждой пары многочленов (12) в B в качестве прямого слагаемого включается жорданова клетка $J_{m_i}(\rho_i)$; для определенности, в качестве ρ_i выбираем то число в сопряженной паре, которое принадлежит верхней полуплоскости; 2) для каждого вещественного многочлена $(\lambda - \rho_j)^{m_j}$ с числом вхождений в систему (10), равным $k_j = 2\ell_j$, включаем в B в качестве прямых слагаемых ℓ_j экземпляров жордановой клетки $J_{m_j}(\rho_j)$. Ясно, что элементарные делители полученной матрицы B вместе с элементарными делителями матрицы $\overline{B}$ составляют исходную систему многочленов (10).

4. Обсудим еще один результат из [2].

Теорема 7. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ нечетного порядка n неприводима и $A \sim_U \overline{A}$, то A является латентно-вещественной матрицей.*

Теоремы 1 и 2 делают этот результат почти очевидным. Действительно, унитарная матрица P в соотношении (1) должна быть симметричной либо кососимметричной. Однако при нечетном n косая симметрия несовместима с унитарностью. Поэтому P может быть только симметричной матрицей, что, согласно теореме 2, обеспечивает латентную вещественность матрицы A.

Опираясь на результаты предыдущего раздела, можно доказать утверждение, в известной степени параллельное теореме 7 для случая четного n.

Теорема 8. *Пусть матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ четного порядка n неприводима и $A \sim_U \overline{A}$. Если среди ее собственных значений имеются вещественные и хотя бы к одному из них относится элементарный делитель с нечетным числом вхождений в систему элементарных делителей, то A является латентно-вещественной матрицей.*

Доказательство. Согласно первому утверждению теоремы 6, A не может быть обобщенным блочным кватернионом. По теоремам 1 и 2, A должна быть латентно-вещественной матрицей.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *О конечном рациональном критерии неприводимости матриц.* — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика, No. 3 (2007), 16–18.
2. Х. Д. Икрамов, *О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам.* — Мат. заметки (принята к публикации) (2010).
3. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
4. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры.* Наука, М., 1975.
5. Х. Д. Икрамов, *Четность жордановой структуры блочных кватернионов с вещественным спектром и ее вычислительные следствия.* — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **37** (1997), 1029–1033.

Ikramov Kh. D. On latently real matrices and block quaternions.

Let a complex $n \times n$ matrix A be unitarily similar to its entrywise conjugate matrix $\overline{A}$. If the unitary matrix P in the relation $\overline{A} = P^*AP$ can be chosen symmetric (skew-symmetric), then A is called a latently real matrix (respectively, a generalized block quaternion). The differences in the systems of elementary divisors of these two matrix classes are found that explain why latently real matrices can be made real via unitary similarities, whereas, normally, block quaternions cannot.

Московский государственный
университет ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 15 апреля 2010 г.