Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Х. Д. Икрамов

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ УНИТАРНОЙ КОНГРУЭНЦИИ, ПРЕОБРАЗУЮЩЕЙ ЗАДАННУЮ КОМПЛЕКСНУЮ МАТРИЦУ В ВЕЩЕСТВЕННУЮ

1. Введение

Пусть $M_n(\mathbf{C})$ — пространство комплексных $n\times n$-матриц. Известно (см. [1, §4.6]), что всякую матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ можно превратить в некоторую вещественную матрицу B посредством псевдоподобия, т.е. преобразования вида

$$B = Q^{-1}A\overline{Q}, \tag{1}$$

где Q – невырожденная матрица.

Зададимся вопросом о том, можно ли для соотношения (1) подобрать унитарную матрицу Q. Если это возможно, то

$$Q^{-1} = Q^* = (\overline{Q})^T$$

и (1) становится описанием унитарной конгруэнции между A и вещественной матрицей B.

В общем случае ответ на поставленный вопрос отрицателен. Например, как показано в [2], матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & z & \overline{\alpha} & w \\ 0 & 0 & 0 & 2\overline{\alpha} \\ -\alpha & -\overline{w} & 0 & \overline{z} \\ 0 & -2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \quad w = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

не может быть сделана вещественной никакой унитарной конгруэнцией.

Необходимые и достаточные условия положительного ответа указаны в [2].

Ключевые слова: псевдоподобие, унитарная конгруэнция, унитарное подобие, псевдособственное значение, форма Юла, полулинейное матричное уравнение.

Теорема 1. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда может быть овеществлена унитарной конгруэнцией, когда A и $\overline{A}$ унитарно конгруэнтны и конгруэнцию между ними можно осуществить посредством матрицы P, одновременно унитарной и симметричной.*

Как обычно, черта над символом матрицы обозначает поэлементное комплексное сопряжение.

Будем писать $A \in \mathcal{U}R_n$, если $n \times n$-матрицу A можно сделать вещественной посредством унитарной конгруэнции. В настоящей статье мы хотим заменить трудно проверяемое условие теоремы 1, касающееся симметричности матрицы P, более простыми (хотя и лишь достаточными) условиями.

Предположим, что в жордановой форме матрицы $F \in M_n(\mathbf{C})$ каждому собственному значению отвечает ровно один жорданов блок. Матрицу с указанным свойством в англоязычной литературе называют a nonderogatory matrix. Общепринятого эквивалента этого термина в литературе на русском языке до сих пор не существует. Рекомендуемый в англо-русских словарях перевод "полная матрица" неудовлетворителен, поскольку никак не передает смысл свойства "nonderogatory", состоящего в том, что степень минимального многочлена матрицы совпадает со степенью ее характеристического многочлена (иными словами, при переходе от характеристического многочлена к минимальному понижения степени не происходит). Мы будем называть такие матрицы *непонижающими*. (За этот термин я благодарю Е. Е. Тыртышникова.)

Сопоставим матрице A матрицу

$$A_R = A\overline{A}. \tag{2}$$

Содержанием статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть A_R – непонижающая матрица с вещественным положительным спектром. Тогда A может быть овеществлена посредством унитарной конгруэнции в том и только том случае, если A и $\overline{A}$ унитарно конгруэнтны.*

Заметим, что необходимость унитарной конгруэнции между A и $\overline{A}$ имеет место без каких-либо предположений о вещественности спектра и непонижающей природе матрицы A_R (см. выше теорему 1). Таким образом, в обосновании нуждается лишь достаточность условий теоремы 2. Это обоснование проводится в разделе 3. Используемые в нем сведения о преобразованиях псевдоподобия и конгруэнции изложены в разделе 2.

2. Предварительные сведения

Условия теоремы 2 можно сформулировать, не привлекая явным образом A_R, а используя лишь величины, связанные с самой матрицей A. Напомним в связи с этим определение псевдособственных значений комплексной матрицы, как оно дано в [3]. Это определение существенно использует примечательные особенности спектра матриц типа (2). Если такая матрица имеет комплексное собственное значение λ, то $\overline{\lambda}$ также является собственным значением, причем кратности обоих чисел одинаковы. Отрицательные собственные значения (если таковые есть) обязательно имеют четную алгебраическую кратность.

Пусть $\sigma(A_R) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ есть спектр матрицы A_R.

Определение. *Псевдособственными значениями матрицы $A \in M_n(\mathbf{C})$ называются n чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, получаемых следующим образом:*

1) *Если $\lambda_i \in \sigma(A_R)$ не лежит на вещественной отрицательной полуоси, то соответствующее псевдособственное значение μ_i определяется как квадратный корень из λ_i, имеющий неотрицательную вещественную часть:*

$$\mu_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{Re} \mu_i \geq 0.$$

Кратность числа μ_i полагается равной кратности λ_i.

2) *С вещественным отрицательным числом $\lambda_i \in \sigma(A_R)$ связываем два сопряженных чисто мнимых псевдособственных значения*

$$\mu_i = \pm \lambda_i^{\frac{1}{2}}.$$

Кратность каждого из них считается равной половине кратности собственного значения λ_i.

Совокупность псевдособственных значений матрицы A будем называть ее псевдоспектром и обозначать символом $c\sigma(A)$. Условие теоремы 2 о том, чтобы A_R имела лишь положительные собственные значения, можно теперь заменить требованием положительности псевдоспектра матрицы A.

В теории псевдоподобий имеется важный результат, являющийся аналогом классической теоремы о жордановой форме (см. [4]).

Теорема 3. *Всякая $n \times n$-матрица A посредством подходящего псевдоподобия*

$$A \longrightarrow Y = P^{-1}A\overline{P} \tag{3}$$

может быть приведена к виду

$$Y = J_1 \oplus \cdots \oplus J_u \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_v \oplus G_{v+1} \oplus \cdots \oplus G_{v+w}, \tag{4}$$

где первые u прямых слагаемых суть обычные жордановы клетки, отвечающие неотрицательным псевдособственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_u$ (среди которых могут быть равные). Средние v слагаемых – это матрицы вида

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ J_l(\mu) & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $J_l(\mu)$ – жорданова клетка с числом μ на главной диагонали. Числа $\mu_1, \ldots, \mu_v$, соответствующие средним слагаемым, суть вещественные отрицательные собственные значения матрицы A_R, иначе говоря, квадраты чисто мнимых псевдособственных значений матрицы A. Последние w слагаемых – это снова матрицы типа (5), но отвечающие невещественным собственным значениям $\mu_{v+1}, \ldots, \mu_{v+w}$ матрицы A_R, причем, для определенности, из каждой сопряженной пары таких значений берется число, находящееся в верхней полуплоскости.

В условиях теоремы 2, каноническая форма (4) матрицы A не содержит слагаемых второго и третьего типов и является прямой суммой жордановых клеток, соответствующих положительным псевдособственным значениям. Непонижающий характер матрицы A_R означает, что каждому псевдособственному значению отвечает ровно одна жорданова клетка.

Понятие псевдоспектра позволяет дать удобную формулировку условий однозначной разрешимости полулинейных матричных уравнений вида

$$AX - \overline{X}B = C, \tag{6}$$

где $A \in M_m(\mathbf{C}), B \in M_n(\mathbf{C})$ и C – матрица размера $m \times n$.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *уравнение* (6) *имеет единственное решение для любой правой части C;*

б) *однородное уравнение*

$$AZ - \overline{Z}B = 0$$

имеет только тривиальное решение $Z = 0$;

в) *псевдоспектры матриц A и B имеют пустое пересечение.*

Как отмечено выше, унитарные конгруэнции суть частный случай преобразований псевдоподобия. Если ограничиться этим более узким классом преобразований, то каноническая форма (4) становится, вообще говоря, недостижимой. Однако есть другая (неканоническая) форма, являющаяся аналогом треугольной формы Шура в теории унитарных подобий. Это так называемая форма Юла (Youla).

Теорема 5. *Всякая матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ может быть посредством унитарной конгруэнции приведена к блочно-треугольной форме с диагональными блоками порядков 1 и 2. При этом диагональные блоки порядка 1 суть неотрицательные псевдособственные значения матрицы A, а каждый блок порядка 2 соответствует паре сопряженных комплексных псевдособственных значений (в том смысле, что такая пара составляет псевдособственные значения самого этого блока).*

Как и в теореме Шура, можно строить для данной матрицы A верхнюю или нижнюю (блочно-треугольную) форму Юла. Более того, для всякого упорядочения вещественных и сопряженных пар комплексных псевдособственных значений существует форма Юла матрицы A, в которой порядок диагональных блоков согласован с этим упорядочением. В частности, для матрицы, удовлетворяющей условиям теоремы 2, всякая форма Юла является треугольной матрицей (в связи с отсутствием 2×2-блоков), и можно выбрать такую форму, в которой для каждого псевдособственного значения кратности $m > 1$ его m копий занимают последовательные позиции главной диагонали. Именно такая форма Юла матрицы A используется в доказательстве теоремы 2.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть R – верхнетреугольная форма Юла матрицы A, выбранная, как описано в конце предыдущего раздела. Ее можно рассматривать как блочную матрицу

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1k} \\ & R_{22} & \cdots & R_{2k} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & R_{kk} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

каждый диагональный блок R_{ii} которой имеет единственное псевдособственное значение μ_i, причем числа μ_i и μ_j различны, если $i \neq j$.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть R – блочно-треугольная матрица*

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

диагональные блоки которой подчинены условию

$$c\sigma(R_{11}) \cap c\sigma(R_{22}) = \varnothing. \tag{9}$$

Предположим, что R унитарно конгруэнтна матрице $\overline{R}$, и представим унитарную матрицу P в соотношении

$$\overline{R} = P^T R P \tag{10}$$

в той же блочной форме, что и матрицу (8):

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда матрица P в действительности является блочно-диагональной:

$$P = P_{11} \oplus P_{22}.$$

Доказательство. Переписав (10) в виде

$$\overline{P R} = R P$$

и приравняв блоки в позиции (2,1), получим

$$\overline{P}_{21} \overline{R_{11}} = R_{22} P_{21}. \tag{12}$$

Рассматривая (12) как полулинейное матричное уравнение относительно P_{21}, видим, что при условии (9) это уравнение имеет только тривиальное решение

$$P_{21} = 0$$

(см. теорему 4; при этом нужно учесть, что матрицы R_{11} и $\overline{R_{11}}$ имеют один и тот же псевдоспектр). Из унитарности матрицы P теперь следует, что и

$$P_{12} = 0.$$

Лемма доказана.

Вернемся к построенной выше форме Юла R исходной матрицы A. По условию, матрицы R и $\overline{R}$ унитарно конгруэнтны, т.е. для некоторой унитарной матрицы P выполняется равенство (10). Применяя $k-1$ раз лемму 1, заключаем, что P должна быть блочно-диагональной матрицей:

$$P = P_{11} \oplus P_{22} \oplus \cdots \oplus P_{kk}. \tag{13}$$

При этом

$$\overline{R_{ii}} = P_{ii}^T R_{ii} P_{ii}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{14}$$

Напомним, что матрица R_{ii} в равенстве (14) имеет единственное псевдособственное значение μ_i и ее каноническая форма, описанная в теореме 3, состоит из единственной жордановой клетки.

Выясним, что можно сказать об унитарной матрице P_{ii}, удовлетворяющей соотношению (14). При исследовании этого соотношения опустим индекс i и будем считать, что порядок всех матриц равен n.

По условию,

$$R = UJ\overline{U^{-1}}, \tag{15}$$

где J – жорданова клетка порядка n. Подставляя (15) в (14), получаем

$$\overline{U}JU^{-1} = P^T UJ\overline{U^{-1}}P,$$

или

$$U^{-1}\overline{PU}J = J\overline{U^{-1}}PU. \tag{16}$$

Положим

$$W = \overline{U^{-1}}PU = W_1 + iW_2, \tag{17}$$

где W_1 и W_2 – вещественные матрицы. Равенство (16) принимает теперь вид

$$\overline{W}J = JW,$$

откуда

$$W_1 J = JW_1, \quad -W_2 J = JW_2. \tag{18}$$

По условию, жорданова клетка J соответствует положительному числу μ. Следовательно, матрицы J и $-J$ не имеют общих собственных значений, а потому второе уравнение в (18) имеет только тривиальное решение $W_2 = 0$ (см. [5, глава VIII, §1]). Итак, $W = W_1$ – вещественная матрица, перестановочная с (верхнетреугольной) жордановой клеткой J. Такая матрица сама должна быть верхнетреугольной теплицевой (см. [5, глава VIII, §2]). В отличие от P, она не является унитарной, но все же наследует некоторые хорошие свойства P. Так, переходу (17) от P к W соответствует преобразование подобия

$$W^2 = W\overline{W} = \overline{U^{-1}}P\overline{PU}.$$

Все собственные значения унитарной матрицы $P\overline{P}$ должны иметь модуль 1. Однако подобная ей матрица W^2 имеет единственное (причем неотрицательное) собственное значение, равное квадрату диагонального элемента матрицы W. Таким образом, на главной диагонали верхнетреугольной теплицевой матрицы W^2 стоит число 1. Как и $P\overline{P}$, матрица W^2 должна быть диагонализуемой, а это означает, что все ее внедиагональные элементы равны нулю. Итак,

$$W^2 = I,$$

а потому и

$$P\overline{P} = I.$$

Соединяя это равенство с соотношением $PP^* = I$, заключаем, что

$$P = P^T.$$

Оформим результат нашего исследования уравнения (14) в виде следующего утверждения.

Лемма 2. *Всякая унитарная матрица P, удовлетворяющая уравнению*

$$\overline{R} = P^T R P,$$

где $R\overline{R}$ – одноклеточная матрица, имеющая положительное собственное значение, должна быть симметричной.

Из леммы 2 следует, что симметрична и вся матрица (13). Теперь нужное утверждение вытекает из теоремы 1. Тем самым доказана теорема 2.

Литература

1. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
2. Kh. D. Ikramov, *A note on complex matrices that are unitarily congruent to real matrices.* — Linear Algebra Appl. (принята к печати).
3. A. George, Kh. D. Ikramov, E. V. Matushkina, W.-P. Tang, *On a QR-like algorithm for some structured eigenvalue problems.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **16** (1995), 1107–1126.
4. Y. Hong, R. A. Horn, *A canonical form for matrices under consimilarity.* — Linear Algebra Appl. **102** (1988), 143–168.
5. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М., 1966.

Ikramov Kh. D. On sufficient conditions for the existence of a unitary congruence transformation of a given complex matrix into a real one.

A complex $n\times n$ matrix A is said to be nonderogatory if the degree of its minimal polynomial is equal to the degree of the characteristic polynomial. The aim of the paper is to prove the following proposition: Let $A\overline{A}$ be a nonderogatory matrix with real positive spectrum. Then A can be made real by a unitary congruence transformation if and only if A and $\overline{A}$ are unitarily congruent.

Московский государственный университет
ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 2 апреля 2010 г.