Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Ю. К. Демьянович

ВЛОЖЕННОСТЬ ПРОСТРАНСТВ И ВЭЙВЛЕТЫ НА МНОГООБРАЗИИ

Вэйвлетные разложения потоков, естественным образом связанных с многообразиями (в частности, с поверхностями), необходимы при обработке поверхностных излучений, при сжатии изображений, при анализе распределения значений тех или иных параметров во внутренних точках трехмерных объектов и в других случаях. Широко известны вэйвлетные разложения в случае равномерной сетки на вещественной прямой (см. [1–2] и имеющуюся там библиографию). Многомерные вэйвлеты рассматривались на равномерных сетках (см. [3–4]), а также на неравномерных сетках (см., например, [5]); при этом одним из центральных вопросов является построение системы вложенных пространств. Что касается многообразий, то для них ранее строились локальные аппроксимации (см. [6]), а также вэйвлетные разложения в предположении, что система вложенных пространств дана (см. [7]): проверка сформулированных в [7] достаточных условий вложенности упомянутых пространств представляется достаточно трудной задачей.

В настоящей работе даны простые способы построения систем вложенных пространств на последовательности измельчающихся покрытий многообразия; в связи с этим введены понятия простого и элементарного измельчения покрытия, а также понятие продолжения исходного оснащения покрытия на измельчение последнего. Полученные результаты применены к построению вложенных пространств минимальных сплайнов лагранжева типа.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения. Многообразие и его покрытие

Рассмотрим гладкое n-мерное (вообще говоря, некомпактное) многообразие $\mathfrak{M}$ (т.е. топологическое пространство, в котором ка-

Ключевые слова: сплайны, вэйвлеты на многообразии, аппроксимационные соотношения, калибровочные соотношения, вложенность пространств.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00245 и 10-01-00297.

ждая точка обладает окрестностью, диффеоморфной открытому n-мерному шару евклидова пространства $\mathbb{R}^n$). Введем систему дифференцируемых координат на $\mathfrak{M}$, т.е. семейство открытых множеств $\{U_\zeta\}_{\zeta\in\mathcal{Z}}$, покрывающих $\mathfrak{M}$, и таких гомеоморфизмов ψ_ζ, $\psi_\zeta : E_\zeta \mapsto U_\zeta$ открытых шаров E_ζ пространства $\mathbb{R}^n$, что отображения

$$\psi_\zeta^{-1}\psi_{\zeta'} : \psi_{\zeta'}^{-1}(U_\zeta \cap U_{\zeta'}) \mapsto \psi_\zeta^{-1}(U_\zeta \cap U_{\zeta'})$$

(при всех тех $\zeta, \zeta' \in \mathcal{Z}$, для которых $U_\zeta \cap U_{\zeta'} \neq \varnothing$) непрерывно дифференцируемы (нужное число раз); здесь $\mathcal{Z}$ — некоторое множество индексов. Тройка $\psi_\zeta : E_\zeta \mapsto U_\zeta$ называется картой, а множество $\{\psi_\zeta : E_\zeta \mapsto U_\zeta \mid \zeta \in \mathcal{Z}\}$ — атласом (см., например, [8]), представляющим многообразие $\mathfrak{M}$.

Говорят, что на $\mathfrak{M}$ задана функция u, если при каждом $\zeta \in \mathcal{Z}$ определена функция $u_\zeta(x)$, $x \in E_\zeta$, так что справедливы соотношения

$$u_\zeta(\psi_\zeta^{-1}(\xi)) \equiv u_\zeta(\psi_{\zeta'}^{-1}(\xi)) \quad \forall \xi \in U_\zeta \cap U_{\zeta'}, \quad \zeta, \zeta' \in \mathcal{Z};$$

при $\xi \in U_\zeta$ полагают $u(\xi) = u_\zeta(\psi_\zeta^{-1}(\xi))$. Линейные пространства функций, заданных на $\mathfrak{M}$, определяются с помощью введенного атласа через соответствующие пространства функций u_ζ, заданных на шарах E_ζ.

Введем линейные пространства $\mathbb{X}(\mathfrak{M})$ (измеримых по Лебегу) функций, заданных на многообразии $\mathfrak{M}$, где под символом $\mathbb{X}$ подразумеваются символы C^s или L_q^s; итак, пространства $\mathbb{X}(\mathfrak{M})$ определяются равенствами

$$\mathbb{X}(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u \circ \psi_\zeta \in \mathbb{X}(E_\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathcal{Z}\},$$

где при $\mathbb{X} = C^s$ в качестве $C^s(E_\zeta)$ фигурирует пространство s раз непрерывно дифференцируемых в E_ζ функций, а при $\mathbb{X} = L_q^s$ в качестве $L_q^s(E_\zeta)$ – пространство заданных на E_ζ функций с суммируемыми с q-й степенью производными до порядка s ($1 \le q \le +\infty$, $s = 0, 1, 2, \dots$). Сопряженное пространство $\mathbb{X}^*$ к $\mathbb{X}$ состоит из функционалов f, задаваемых на $u \in \mathbb{X}$ с помощью упомянутого выше атласа тождеством

$$\langle f, u\rangle \equiv \langle f_\zeta, u_\zeta\rangle_\zeta,$$

где $f_\zeta \in (\mathbb{X}(E_\zeta))^*$ $\forall \zeta \in \mathcal{Z}$; $\{f_\zeta\}_{\zeta\in\mathcal{Z}}$ – семейство функционалов, представляющих функционал f.

Если для любой функции $u \in \mathbb{X}(\mathfrak{M})$ значение $\langle f, u\rangle$ функционала $f \in (\mathbb{X}(\mathfrak{M}))^*$ определяется значениями функции u на множестве $\Omega \subset \mathfrak{M}$, то будем писать $\operatorname{supp} f \subset \Omega$; а если к тому же Ω – компакт, то будем говорить, что носитель функционала f компактен. В дальнейшем здесь рассматриваются лишь функционалы с компактными носителями.

Рассмотрим покрытие многообразия $\mathfrak{M}$ семейством $\mathfrak{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ подмножеств $\mathfrak{S}_j$, каждое из которых гомеоморфно открытому n-мерному шару:

$$\bigcup_{j\in\mathcal{J}} \mathfrak{S}_j = \mathfrak{M},$$

$\mathcal{J}$ – некоторое упорядоченное не более чем счетное множество индексов. Множества $\mathfrak{S}_j$ назовем элементами покрытия $\mathfrak{S}$; границу множества $\mathfrak{S}_j$ обозначим $\partial\mathfrak{S}_j$.

Пусть M – некоторое подмножество в $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что множество M разбито на множества M_i, $i \in I$, если $M_i \cap M_{i'} = \varnothing \; \forall i, i' \in I$, $i \neq i'$, и $\mathrm{Cl}(M) = \mathrm{Cl}(\cup_{i\in I} M_i)$, где символ Cl означает замыкание. Совокупность внутренних точек множества M будем обозначать $'(M)$.

Для каждой точки $t \in \mathfrak{M} \setminus \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} \partial\mathfrak{S}_j$ рассмотрим содержащее ее множество

$$\mathfrak{C}_{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j\in\mathcal{J}, \mathfrak{S}_j \ni t} \mathfrak{S}_j.$$

Совокупность $\mathfrak{C}$ различных множеств $\mathfrak{C}_{(t)}$ для упомянутых t не более чем счетна; в дальнейшем их обозначаем $\mathfrak{C}_i$, $i \in \mathcal{K}$ (здесь $\mathcal{K}$ – упорядоченное множество индексов). Итак, $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_i \mid i \in \mathcal{K}\}$, и справедливы соотношения:

$$\mathfrak{C}_{i'} \cap \mathfrak{C}_{i''} = \varnothing \quad \text{при} \quad i' \neq i'', \quad i', i'' \in \mathcal{K},$$

$$\mathrm{Cl}(\mathfrak{S}_j) = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{\mathfrak{C}_i \subseteq \mathfrak{S}_j} \mathfrak{C}_i\right), \quad \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i\in\mathcal{K}} \mathfrak{C}_i\right) = \mathrm{Cl}(\mathfrak{M}). \tag{1.1}$$

Таким образом, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{S}_j$ разбиты на клетки $\mathfrak{C}_i$. Ввиду сказанного покрытию $\mathfrak{S}$ сопоставляется совокупность $\mathfrak{C}$; описанное выше правило сопоставления обозначим $\mathfrak{F}$, так что $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}(\mathfrak{S})$; совокупность $\mathfrak{C}$ будем называть *дроблением* покрытия $\mathfrak{S}$.

Определение 1. *Говорят, что покрытие $\mathfrak{S}$ имеет простую структуру, если все множества $\mathfrak{C}_i$ из его дробления $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ гомеоморфны открытому шару. Множества $\mathfrak{C}_i$ в этом случае называем клетками.*

Будем предполагать, что все рассматривемые здесь покрытия имеют простую структуру.

Определение 2. *Для фиксированной точки $t \in \mathfrak{M}$ число $\varkappa_t(\mathfrak{S})$ элементов множества $\{j \mid t \in \mathfrak{S}_j\}$ называется кратностью накрытия точки t семейством $\mathfrak{S}$.*

Определение 3. *Если существует такое натуральное число q, что для почти всех точек $t \in \mathfrak{M}$ справедливо равенство*

$$\varkappa_t(\mathfrak{S}) = q, \tag{1.2}$$

то семейство $\mathfrak{S}$ называется q-накрывающим (для $\mathfrak{M}$), а число q — кратностью накрытия $\mathfrak{M}$ семейством $\mathfrak{S}$.

Определение 4. *Клетка $\mathfrak{C}_{i'}$ называется соседней для клетки $\mathfrak{C}_i$ ($i, i' \in \mathcal{K}$) в дроблении семейства $\mathfrak{S}$, если $i \neq i'$ и существует точка t, лежащая на границе $\partial\mathfrak{C}_i$ клетки $\mathfrak{C}_i$, некоторая окрестность которой принадлежит объединению $\mathfrak{C}_{i'} \bigcup \mathrm{Cl}(\mathfrak{C}_i)$.*

Очевидно, что если клетка $\mathfrak{C}_{i'}$ является соседней для клетки $\mathfrak{C}_i$, то и $\mathfrak{C}_i$ является соседней для $\mathfrak{C}_{i'}$; клетки $\mathfrak{C}_i$ и $\mathfrak{C}_{i'}$ в дальнейшем называем соседними клетками (в дроблении $\mathfrak{C}$ семейства $\mathfrak{S}$).

Определение 5. *Если в q-накрывающем семействе $\mathfrak{S}$ для любых двух соседних клеток $\mathfrak{C}_i$ и $\mathfrak{C}_{i'}$ из его дробления $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ разность $\{j \mid \mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{C}_i\} \backslash \{j' \mid \mathfrak{S}_{j'} \supset \mathfrak{C}_{i'}\}$ содержит ровно p элементов (где $p \geq 1$), то семейство $\mathfrak{S}$ называется p-ступенчатым покрытием многообразия $\mathfrak{M}$.*

Ясно, что $p \leq q$.

2. Оснащение покрытия

Каждому множеству $\mathfrak{S}_j$ семейства $\mathfrak{S}$ сопоставим вектор $\mathbf{a}_j$ из q-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^q$, $j \in \mathcal{J}$; множество $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathcal{J},\ \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^q\}$ называется оснащением семейства $\mathfrak{S}$. В дальнейшем для оснащения A семейства $\mathfrak{S}$ иногда используется обозначение $A_{(\mathfrak{S})}$, а для вектора, соответствующего множеству $\mathfrak{S}_j$, – обозначение $A\big|_{\mathfrak{S}_j}$ (таким образом, в рассматриваемом случае $A\big|_{\mathfrak{S}_j} = \mathbf{a}_j$).

Определение 6. *Говорят, что q-накрывающее семейство $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ многообразия $\mathfrak{M}$ оснащено полной системой векторов $A = \{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathcal{J},\ \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^q\}$, если для почти всех точек $t \in \mathfrak{M}$ система векторов*

$$A_{\langle t\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathcal{J}, \mathfrak{S}_j \ni t\} \tag{2.1}$$

является базисом пространства $\mathbb{R}^q$; в этом случае система векторов A называется полным оснащением семейства $\mathfrak{S}$.

Из (1.1)–(1.2), (2.1) следует, что если A – полное оснащение семейства $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}(\mathfrak{S})$, то при фиксированном $i \in \mathcal{K}$ для $\mathfrak{C}_i \in \mathfrak{C}$ верны соотношения

$$A_{\langle t'\rangle} = A_{\langle t''\rangle} \qquad \text{при} \quad \forall t',\ \ t'' \in \mathfrak{C}_i, \tag{2.2}$$

благодаря чему можно ввести обозначение

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} A_{\langle t\rangle} \quad \text{при} \quad t \in \mathfrak{C}_i. \tag{2.3}$$

Ясно также, что если покрытие p-ступенчатое, а $\mathfrak{C}_i$ и $\mathfrak{C}_{i'}$ соседние, то число векторов во множествах $A_i \backslash A_{i'}$ равно p.

3. Измельчение покрытия. Продолжение оснащения

Пусть $\overline{\mathfrak{S}}$ – еще одно покрытие многообразия $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{\mathfrak{S}}_j \mid j \in \overline{J}\}$, $\overline{J}$ – упорядоченное, не более чем счетное множество индексов. Рассмотрим дробления $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_i \mid i \in \mathcal{K}\}$, $\overline{\mathfrak{C}} = \{\overline{\mathfrak{C}}_i \mid i \in \overline{\mathcal{K}}\}$ покрытий $\mathfrak{S}$ и $\overline{\mathfrak{S}}$ соответственно; (здесь $\mathcal{K}$ и $\overline{\mathcal{K}}$ – некоторые упорядоченные множества индексов); таким образом, $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ и $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{F}(\overline{\mathfrak{S}})$.

Определение 7. *Если для каждого $\overline{i} \in \overline{\mathcal{K}}$ найдется индекс $i \in \mathcal{K}$ такой, что $\overline{\mathfrak{C}}_{\overline{i}} \subset \mathfrak{C}_i$, то говорим, что $\overline{\mathfrak{C}}$ является измельчением для $\mathfrak{C}$. В этом случае покрытие $\overline{\mathfrak{S}}$ называется измельчением покрытия $\mathfrak{S}$.*

Определение 8. *Измельчение $\overline{\mathfrak{S}}$ покрытия $\mathfrak{S}$ называется консервативным, если для почти всех точек $t \in \mathfrak{M}$ верно соотношение $\varkappa_t(\mathfrak{S}) = \varkappa_t(\overline{\mathfrak{S}})$.*

В дальнейшем рассматриваются только консервативные измельчения.

Определение 9. *Измельчение $\overline{\mathfrak{S}}$ покрытия $\mathfrak{S}$ называется простым, если множество $\mathfrak{S}\backslash\overline{\mathfrak{S}}$ непусто и существует единственное $k \in \mathcal{K}$ такое,* *что верно соотношение* $\mathfrak{S}\backslash\overline{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{Z}_k$, *где* $\mathfrak{Z}_k \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{S}_j \mid \mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{C}_k\}$. *Множество* $\mathfrak{Z}_k$ *назовем звездой с центром* $\mathfrak{C}_k$, *а рассматриваемое простое покрытие обозначим* $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$.

Таким образом, при простом измельчении в покрытии $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ сохраняются все те множества $\mathfrak{S}_j$ из $\mathfrak{S}$, которые не входят в звезду $\mathfrak{Z}_k$. Для удобства сохраняем нумерацию этих множеств и в измельчении: $\overline{\mathfrak{S}}_j = \mathfrak{S}_j$ при $\mathfrak{S}_j \notin \mathfrak{Z}_k$.

Теперь введем понятие простого продолжения оснащения $A_{(\mathfrak{S})}$ на простое измельчение $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ покрытия $\mathfrak{S}$.

Определение 10. *Если оснащение* $\overline{A}$ *простого измельчения* $\overline{\mathfrak{S}}$ *покрытия* $\mathfrak{S}$ *с оснащением* $A = A_{(\mathfrak{S})}$ *обладает свойством*

$$\overline{A}\big|_{\mathfrak{S}_j} = A\big|_{\mathfrak{S}_j} \quad \forall\, \mathfrak{S}_j \in \mathfrak{S} \cap \overline{\mathfrak{S}},$$

то $\overline{A}$ *называется простым продолжением оснащения* $A_{(\mathfrak{S})}$; *такое оснащение обозначим* $\overline{A}^{(k)}$.

Определение 11. *Измельчение* $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ *покрытия* $\mathfrak{S}$ *называется элементарным (с центром в* $\mathfrak{C}_k$*), если оно простое и справедливо следующее:*

(1) *клетка* $\mathfrak{C}_k$ *разбита на множества* $\mathfrak{C}_{k,i}$, *гомеоморфные открытому шару, так что* $\mathrm{Cl}(\mathfrak{C}_k) = \mathrm{Cl}(\cup_{i\in I_k}\mathfrak{C}_{k,i})$; *здесь* I_k — *некоторое множество индексов;*

(2) *для каждого* $\mathfrak{S}_j \in \mathfrak{Z}_k$ *найдутся единственные* $j' \in \overline{\mathcal{J}}$ *и* $i \in I_k$ *такие, что множество* $\overline{\mathfrak{S}}_{j'} = {}'\Big(\mathrm{Cl}((\mathfrak{S}_j\backslash\mathfrak{C}_k) \cup \mathfrak{C}_{k,i})\Big)$ *гомеоморфно открытому шару и лежит в семействе* $\overline{\mathfrak{S}}$.

При элементарном подразделении каждому множеству $\mathfrak{S}_j$ из $\mathfrak{S}$ ставится в однозначное соответствие множество $\overline{\mathfrak{S}}_{j'}$. Для удобства индексацию множеств $\{\overline{\mathfrak{S}}_{j'}\}$ сохраняем, т.е. полагаем $j' = j$ и считаем, что $\mathcal{J} \subset \overline{\mathcal{J}}$.

В случае элементарного измельчения $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ покрытия $\mathfrak{S}$ определим отображение $V_k : \mathfrak{S} \mapsto \overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ семейства $\mathfrak{S}$ в семейство $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$, сопоставляя множеству $\mathfrak{S}_j \in \mathfrak{Z}_k$ множество $\overline{\mathfrak{S}}_j$, фигурирующее в определении 11, а на множестве $\mathfrak{S}_j \notin \mathfrak{Z}_k$ мы считаем эту операцию тождественной. Таким образом,

$$V_k(\mathfrak{S}_j) = \begin{cases} \mathfrak{S}_j & \text{при } \ \mathfrak{S}_j \notin \mathfrak{Z}_k, \\ \overline{\mathfrak{S}}_j & \text{при } \ \mathfrak{S}_j \notin \mathfrak{Z}_k. \end{cases}$$

Операцию V_k назовем *операцией вложения* $\mathfrak{S}$ в $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$.

Элементарное измельчение покрытия $\mathfrak{S}$ приводит к покрытию $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$, состоящему из множеств трех типов: к первому типу относятся множества, оставшиеся неизмененными при измельчении, т.е. множества $\mathfrak{S}_j \notin \mathfrak{Z}_k$; ко второму типу отнесем множества покрытия $\overline{\mathfrak{S}}$, полученные измененением множеств $\mathfrak{S}_j$ исходного покрытия $\mathfrak{S}$ (см. (2) определения 11), т.е. образы $\overline{\mathfrak{S}}_j$ множеств $\mathfrak{S}_j \in \mathfrak{Z}_k$; наконец, к третьему типу относятся остальные множества семейства $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$. Заметим, что количество множеств второго и третьего типов конечно (количество множеств второго типа совпадает с числом множеств в $\mathfrak{Z}_k$, а число множеств третьего типа ограничено ввиду консервативности измельчения).

Построение оснащения $\overline{A}^{(k)}$ полученного покрытия $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ начнем с множеств первого и второго типов, сопоставляя образу $V_k(\mathfrak{S}_j)$ тот вектор, который соответствовал прообразу $\mathfrak{S}_j$ (при вложении V_k). Каждому множеству третьего типа сопоставим некоторый новый вектор пространства $\mathbb{R}^q$; множество последних назовем *дополнением к исходному оснащению* и обозначим его $W^{\langle k\rangle}$.

Определение 12. *Оснащение $\overline{A}^{(k)}$ назовем элементарным продолжением оснащения $A = A_{(\mathfrak{S})}$ на измельчение $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ (или просто элементарным продолжением оснащения A).*

Легко видеть, что элементарное продолжение является также и простым продолжением.

Лемма 1. *Пусть A – полное оснащение семейства $\mathfrak{S}$, которое назовем исходным; пусть $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ – элементарное консервативное измельчение семейства $\mathfrak{S}$. Тогда полное оснащение покрытия $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$ существует и может быть получено дополнением $W^{\langle k\rangle}$ к исходному оснащению; при этом существует континуальное множество указанных дополнений, а значит и континуальное множество оснащений покрытия $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$.*

Доказательство следует из конечности числа множеств второго и третьего типов, благодаря чему возможно континуальное количество способов выбора векторов дополнения $W^{\langle k\rangle}$ в $\mathbb{R}^q$. $\square$

4. Пространство минимальных сплайнов

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi: \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами $[\varphi]_j(t)$ из пространства $\mathbb{X}(\mathfrak{M})$ (здесь $m \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $t \in \mathfrak{M}$).

В дальнейшем рассматриваются покрытия кратности $q = m+1$ и их консервативные измельчения.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — $m+1$-накрывающее (для $\mathfrak{M}$) семейство, а система векторов-столбцов $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ – полное оснащение семейства $\mathfrak{S}$. Тогда существует единственная вектор-функция (столбец) $\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_j(t))_{j\in\mathcal{J}}$, почти везде удовлетворяющая соотношениям*

$$A\omega(t) = \varphi(t), \quad \omega_j(t) = 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_j; \tag{4.1}$$

здесь и ниже обозначение A используется также для матрицы, состоящей из вектор-столбцов $\mathbf{a}_j$, $A \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_j)_{j\in\mathcal{J}}$.

Доказательство. В соответствии с определением множества A_i (см. также формулы (2.2)–(2.3)) из (4.1) имеем

$$\sum_{\mathbf{a}_j\in A_i} \mathbf{a}_j\omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathfrak{C}_i \quad \forall i \in \mathcal{K}. \tag{4.2}$$

Поскольку, по определению полного оснащения, множество векторов $\{\mathbf{a}_j \mid \mathbf{a}_j \in A_i\}$ является базисом в $\mathbb{R}^{m+1}$, матрица системы (4.2) неособенная, так что неизвестные $\omega_j(t)$, рассматриваемые при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{C}_i$ для каждого $i \in \mathcal{K}$, определяются однозначно. Теорема доказана. □

Линейное пространство $\mathbb{S}_m(\mathfrak{S}, A, \varphi)$, полученное замыканием линейной оболочки множества $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ в топологии поточечной сходимости, называется *пространством минимальных* $(\mathfrak{S}, A, \varphi)$*-сплайнов (порядка m)* на многообразии $\mathfrak{M}$,

$$\mathbb{S}_m(\mathfrak{S}, A, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cl}_p\{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\omega_j(t) \quad \forall t \in \mathfrak{M} \;\; \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$$

(символ Cl_p означает замыкание в упомянутой топологии); тройка $(\mathfrak{S}, A, \varphi)$ называется *генератором* пространства $\mathbb{S}_m(\mathfrak{S}, A, \varphi)$, а функции ω_j – *образующими* пространства $\mathbb{S}_m(X, \mathbf{A}, \varphi)$, порожденными тройкой $(\mathfrak{S}, A, \varphi)$; соотношения (4.1) называются *аппроксимационными соотношениями.*

Если семейство $\mathfrak{S}$ является $(r+1)$-ступенчатым покрытием (r – неотрицательное целое), то говорят, что $(\mathfrak{S}, A, \varphi)$-сплайны имеют высоту r (при $r = 0$ сплайны называем сплайнами лагранжева типа, а при $r > 0$ — сплайнами эрмитова типа); в противном случае говорят о сплайнах переменной высоты.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 линейная независимость компонент вектор-функции $\varphi(t)$ на клетке $\mathfrak{C}_i$ эквивалентна линейной независимости системы функций $\{\omega_j(t) \mid \mathfrak{C}_i \subseteq \mathfrak{S}_j\}$ на этой клетке.*

Доказательство получается при рассмотрении системы (4.2): матрица упомянутой системы в условиях теоремы 1 неособенная. $\square$

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 1 компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ линейно независимы на каждой клетке $\mathfrak{C}_i$, $i \in \mathcal{K}$, то система функций $\{\omega_j(t)\}_{j\in\mathcal{J}}$ – линейно независимая система на многообразии $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Рассматривая равенство $\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} c_j\omega_j(t) \equiv 0$ при $t \in \mathfrak{C}_i$, видим, что в сумме останутся лишь слагаемые с теми индексами j, которые принадлежат множеству $\{j \mid \mathfrak{C}_i \subseteq \mathfrak{S}_j\}$. Из-за того, что матрица системы (4.2) неособенная, и благодаря линейной независимости компонент вектор-функции $\varphi(t)$ на клетке $\mathfrak{C}_i$, приходим к выводу, что все коэффициенты c_j с упомянутыми индексами равны нулю. Поскольку для каждого $j \in \mathcal{J}$ найдется такое $i = i(j)$, что $\mathfrak{C}_i \subseteq \mathfrak{S}_j$, то все коэффициенты c_j окажутся равными нулю. $\square$

5. Калибровочные соотношения

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы* 1, *а матрица $\mathfrak{P}$ такова, что при*[1]

$$\overline{A} = A\mathfrak{P} \tag{5.1}$$

существует вектор-функция (столбец) $\overline{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\omega}_j(t))_{j\in\overline{\mathcal{J}}}$ со свойствами

$$\overline{A}\overline{\omega}(t) = \varphi(t), \quad [\mathfrak{P}\overline{\omega}]_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_j \quad \forall j \in \mathcal{J}, \tag{5.2}$$

то справедлива формула

$$\omega(t) \equiv \mathfrak{P}\overline{\omega}(t). \tag{5.3}$$

Доказательство. Подставляя (5.1) в первое из соотношений (5.2), перепишем (5.2) в виде

$$A\mathfrak{P}\overline{\omega}(t) = \varphi(t), \quad [\mathfrak{P}\overline{\omega}]_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_j \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

[1] Всюду, где фигурирует сумма чисел с бесконечным числом слагаемых, считается, что ненулевых слагаемых в сумме конечное число.

Итак, наряду с вектор-функцией $\omega(t)$ соотношениям (4.1) удовлетворяет также и вектор-функция $\mathfrak{P}\overline{\omega}(t)$. Ввиду справедливости предположений теоремы 1 такая функция единственна; поэтому верно соотношение (5.3). $\square$

Записанные покомпонентно тождества (5.3) называются *калибровочными соотношениями*, а матрица $\mathfrak{P}$ – *калибровочной матрицей.*

Лемма 2. *Пусть $\omega(t)$ и $\overline{\omega}(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$A\omega(t) = \varphi(t) \quad \text{и} \quad \overline{A}\overline{\omega}(t) = \varphi(t) \tag{5.4}$$

соответственно, а система функционалов $\overline{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{g}_j)_{j\in\overline{\mathcal{J}}}$ биортогональна системе функций $\overline{\omega}^T$,

$$\overline{g\omega}^T = I, \tag{5.5}$$

где $\overline{g}$ – вектор-столбец функционалов $\overline{g}_j$, а I – единичная матрица. Тогда матрица

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{g}\omega^T)^T \tag{5.6}$$

удовлетворяет условию

$$A\mathfrak{P} = \overline{A}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Из (5.4) имеем

$$\omega^T A^T = \overline{\omega}^T \overline{A}^T. \tag{5.8}$$

Применяя $\overline{g}$ к (5.8), благодаря (5.5) находим: $\overline{g}\omega^T A^T = \overline{A}^T$; ввиду обозначения (5.6) получаем $\mathfrak{P}^T A^T = \overline{A}^T$, что эквивалентно (5.7). $\square$

6. Вложенность пространств при измельчении покрытия

Предположим, что кроме семейства $\mathfrak{S}$ на многообразии $\mathfrak{M}$ имеется еще одно $(m+1)$-накрывающее (для $\mathfrak{M}$) семейство подмножеств $\overline{\mathfrak{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{\mathfrak{S}}_{j'}\}_{j'\in\overline{\mathcal{J}}}$, и $\overline{A}$ – его полное оснащение.

Из теоремы 4 и леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Если A и $\overline{A}$ – полные оснащения систем $\mathfrak{S}$ и $\overline{\mathfrak{S}}$, вектор-функции ω и $\overline{\omega}$ удовлетворяют соотношениям* (5.4), *$\varphi(t)$ – вектор-функция с линейно независимыми компонентами на клетках $\mathfrak{C}_i$, $i \in \mathcal{K}$, и $\overline{\mathfrak{C}}_{i'}$, $i' \in \overline{\mathcal{K}}$, а матрица $\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{g}\omega^T)^T$ удовлетворяет соотношению*

$$[\mathfrak{P}\overline{\omega}]_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_j \quad \forall j \in \mathcal{J}, \tag{6.1}$$

то справедливы калибровочные соотношения (5.3).

Доказательство. Легко видеть, что выполнены условия леммы 1, и потому $\overline{A} = A\mathfrak{P}$, т.е. выполнено (5.1). По условию доказываемой теоремы справедливы соотношения (5.4), так что вместе с (6.1) это ведет к выполнению условий теоремы 4, откуда и следует соотношение (5.3). □

До сих пор не рассматривался способ построения оснащения A (и оснащения $\overline{A}$); очевидно, что указание способа построения оснащения вместе с аппроксимационными соотношениями определяет алгоритм построения координатных функций $\omega_j(t)$ (соответственно, функций $\overline{\omega}_j(t)$).

Рассмотрим условие

(U) Оснащение $\overline{A}^{(k)}$ является простым продолжением полного оснащения $A = A_{\mathfrak{S}}$ на покрытие $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}$, а алгоритм построения координатных функций таков, что

$$\overline{\omega}_j = \omega_j \quad \forall j \in \{j' \mid \mathfrak{S}_{j'} \notin \mathfrak{Z}_k\}.$$

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (U) *и справедливы равенства* (5.4). *Тогда с некоторой матрицей $\mathfrak{P}$ верны калибровочные соотношения* (5.3).

Доказательство. Из (5.4) имеем $A\omega = \overline{A}\overline{\omega}$, или в подробной записи

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} \mathbf{a}_j\omega_j = \sum_{j'\in\overline{\mathcal{J}}} \overline{\mathbf{a}}_{j'}\overline{\omega}_{j'}. \tag{6.2}$$

Ввиду условия (U) все слагаемые, соответствующие множествам $\mathfrak{S}_j$ первого типа, встречаются как в левой, так и в правой части тождества (6.2); после их взаимного уничтожения получаем

$$\sum_{j\in\mathcal{J},\mathfrak{S}_j\in\mathfrak{Z}_k} \mathbf{a}_j\omega_j = \sum_{j'\in\overline{\mathcal{J}}\setminus\{j \mid \mathfrak{S}_j\notin\mathfrak{Z}_k\}} \overline{\mathbf{a}}_{j'}\overline{\omega}_{j'}. \tag{6.3}$$

Ввиду полноты оснащения A система векторов $A_k = \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathcal{J},\mathfrak{S}_j\in\mathfrak{Z}_k}$ является базисом пространства $\mathbb{R}^{m+1}$, так что система (6.3) однозначно разрешима относительно $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J},\mathfrak{S}_j\in\mathfrak{Z}_k}$. Теорема доказана. □

Рассмотрим введенное ранее пространство

$$\mathbb{S}_m = \mathbb{S}_m(\mathfrak{S}, A, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cl}_p(\mathcal{L}(\{\omega_i\}_{i\in\mathcal{J}})),$$

где символ $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку перечисленных векторов. Аналогичным образом введем пространство

$$\overline{\mathbb{S}}_m = \mathbb{S}_m(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{A}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cl}_p(\mathcal{L}(\{\overline{\omega}_i\}_{i\in\mathcal{J}})).$$

Здесь ω и $\overline{\omega}$ – решения соответствующих уравнений из (5.4).

Теорема 7. *Пусть A — полное оснащение покрытия $\mathfrak{S}$, а $\overline{\mathfrak{S}}$ – элементарное консервативное измельчение этого покрытия. Тогда существует континуальное количество пространств $\overline{\mathbb{S}}_m$, содержащих пространство $\mathbb{S}_m$.*

Доказательство. Пусть k — индекс, указанный в определении 11. Заключение доказываемой теоремы вытекает из леммы 1 и того факта, что имеется не менее чем континуальное количество разбиений множества $\mathfrak{C}_k$ на подмножества $\mathfrak{C}_{k,i}$ (см. определение, упомянутое выше), а различные разбиения, очевидно, порождают различные пространства $\overline{\mathbb{S}}_m = \mathbb{S}_m(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{A}, \varphi)$. □

Теорема 8. *Если выполнены условия теорем 6 и 7, а функции $[\varphi]_s$, $s = 0, 1, \ldots, m$, представляют собой линейно независимую систему на каждой клетке $\mathfrak{C}_k$, $k \in \mathcal{K}$, то элементы матрицы $\mathfrak{P}$ могут быть вычислены по формулам*

$$\mathfrak{p}_{ij} = \langle \overline{g}_j, \omega_i \rangle, \tag{6.4}$$

где $\{\overline{g}_j\}_{j\in\overline{\mathcal{J}}}$ – система функционалов, биортогональная системе $\{\overline{\omega}_i\}_{i\in\overline{\mathcal{J}}}$.

Доказательство. Соотношение (5.3) перепишем в виде

$$\omega_i(t) = \sum_{s\in\mathcal{J}} \mathfrak{p}_{is}\overline{\omega}_s(t), \qquad i \in \mathcal{J},$$

и применим функционал $\overline{g}_j$ к обеим частям этого соотношения. В результате получим (6.4). □

7. О продолжении биортогональной системы функционалов

Способ продолжения системы функционалов, биортогональных к координатным сплайнам, предложен в работе [5]; здесь проведем аналогичные построения.

Обозначим $\mathbb{X}(\mathfrak{C}_k)$ линейное пространство следов на $\mathfrak{C}_k$ всех функций из пространства $\mathbb{X}(\mathfrak{M})$ и рассмотрим пространство $\mathbb{Y}_{\mathcal{T}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigotimes_{k\in\mathcal{K}} \mathbb{X}(\mathfrak{C}_k)$; аналогичным образом строится пространство $\mathbb{Y}_{\overline{\mathcal{T}}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigotimes_{k\in\overline{\mathcal{K}}} \mathbb{X}(\overline{\mathfrak{C}_k})$. Если $\{\overline{\mathfrak{C}_k}\}_{k\in\overline{\mathcal{K}}}$ является измельчением подразделения $\{\mathfrak{C}_k\}_{k\in\mathcal{K}}$, то $\mathbb{Y}_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{Y}_{\overline{\mathcal{T}}}$.

Символом $(\mathbb{Y}_{\mathcal{T}})^*$ обозначим пространство, сопряженное к пространству $\mathbb{Y}_{\mathcal{T}}$. Очевидно, что при условии $[\varphi]_j \in \mathbb{X}(\mathfrak{M})$ пространство $\mathbb{S}_m(\mathfrak{S}, A, \varphi)$ лежит в пространстве $\mathbb{Y}_{\mathcal{T}}$.

Как и прежде, если значение $\langle f, u\rangle$ функционала $f \in (\mathbb{Y}_{\mathcal{T}})^*$ определяется значениями функции $u \in \mathbb{Y}_{\mathcal{T}}$ на множестве Ω, то будем писать $\mathrm{supp} f \subset \Omega$.

Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{B}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{B}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{B}$; на элементе $v \in \mathfrak{B}$ функционал f имеет значение $\langle f, v\rangle$. Множество $(m+1)$-компонентных векторов-столбцов с компонентами из пространства $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathfrak{B}^{m+1}$. Будем рассматривать также $(m+1)$-компонентные вектор-столбцы, компоненты которых лежат в пространстве $\mathfrak{B}^*$; образуемое этими векторами линейное пространство обозначим $(B^*)^{m+1}$. Транспонирование матриц и вектор-столбцов обозначаем, как и ранее, буквой T, так что, например, для векторов $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_m)^T \in (B^*)^{m+1}$ и $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m)^T \in \mathfrak{B}^{m+1}$ выражение $\mathbf{f}^T\mathbf{v} = \sum\limits_{j=0}^{m} \langle f_j, v_j\rangle$ представляет собой вещественное число, а $\mathbf{f}\mathbf{v}^T = \Big(\langle f_p, v_q\rangle\Big)_{p,q=0,1,2,\ldots,m}$ – числовую матрицу $(m+1)$-го порядка.

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{f} \in (B^*)^{m+1}$ и $\mathbf{v} \in \mathfrak{B}^{m+1}$ таковы, что матрица $\mathbf{f}\mathbf{v}^T$ неособенная; пусть вектор*

$$\mathbf{u} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathfrak{B}^{m+1}$$

удовлетворяет соотношению

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}, \tag{7.1}$$

где A – неособенная квадратная числовая матрица. Тогда система из компонентов l_r вектора $\mathbf{l} \stackrel{\mathrm{def}}{=} A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}$, $r = 0,1,2,\dots,m$, представляет собой систему функционалов, биортогональную к системе элементов $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$, так что $l_r(u_j) = \delta_{r,j}$, $r, j = 0,1,2,\dots,m$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T$; поскольку из (7.1) следует соотношение $\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{v}$, то из определения вектора $\mathbf{l}$ находим

$$\begin{aligned}\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T &= A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{u}^T = A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}(A^{-1}\mathbf{v})^T \\ &= A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{v}^T(A^{-1})^T = I,\end{aligned}$$

где I — единичная матрица $(m+1)$-го порядка. Итак, получено соотношение $\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T = I$, т.е. $l_r(u_j) = \delta_{r,j}$. Лемма доказана. □

Замечание 1. Очевидно, что $\mathbf{l}\,\mathbf{v}^T = A^T$; действительно, $\mathbf{l}\,\mathbf{v}^T = A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{v}^T = A^T$.

Лемма 3 позволяет построить биортогональную систему к системе сплайнов $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, если известна биортогональная система функционалов к компонентам $[\varphi]_i$ вектор-функции φ, $i = 0,1,2,\dots,m$.

Для вэйвлетного разложения необходимы значения биортогональной системы функционалов на компонентах вектор-функции $\varphi(t)$; они вычисляются в следующей лемме.

Лемма 4. *Если система функционалов $\{g_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ биорогональна системе сплайнов $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathcal{J}}$, то*

$$\langle g_j, \varphi\rangle = \mathbf{a}_j \quad \forall j \in \mathcal{J}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Применим функционал g_j к аппроксимационным соотношениям (4.1); используя компактность носителя его носителя, получим равенство

$$\sum_{j'\in\mathcal{J}} \mathbf{a}_{j'}\langle g_j, \omega_{j'}\rangle = \langle g_j, \varphi\rangle.$$

Поскольку, согласно условиям леммы, $\langle g_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}$, то из последнего равенства получаем (7.2). □

8. Вэйвлетное (всплесковое) разложение

Пусть вектор-функция $\omega(t)$ состоит из линейно независимых компонент и выполнено соотношение (5.3).

Обозначим $g \stackrel{\text{def}}{=} \{g_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ систему линейных функционалов, биортогональную системе ω; записывая систему g в виде одностолбцовой матрицы, имеем

$$g\,\omega^T = I. \tag{8.1}$$

Ввиду предположения (5.3) верно соотношение

$$\mathbb{S}_m(A,\mathfrak{G},\varphi) \subseteq \overline{\mathbb{S}}_m = \mathbb{S}_m(\overline{A},\overline{\mathfrak{G}},\varphi) \subseteq \mathbb{Y}_{\overline{\mathcal{T}}}.$$

Пусть выполнено следующее условие:

(A) *существуют линейные продолжения фунционалов g_i на пространство $\overline{\mathbb{S}}_m$ такие, что для любого $j \in \overline{\mathcal{J}}$ количество ненулевых элементов во множестве $\{\langle g_i, \overline{\omega}_j\rangle\}_{i\in\mathcal{J}}$ конечно.*

Теорема 9. *Если выполнены соотношение* (5.3) *и предположение* (A), *то матрица $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} g\overline{\omega}^T$ с элементами $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_i, \overline{\omega}_j\rangle$, $i \in \mathcal{J}, j \in \overline{\mathcal{J}}$, является левой обратной к матрице $\mathfrak{P}^T$.*

Доказательство. Транспонируем соотношение (5.3) и умножим его на одностолбцовую матрицу g слева; учитывая формулу (8.1) и предположение (A), находим $I = g\overline{\omega}^T\,\mathfrak{P}^T$; последнее эквивалентно равенству

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I. \tag{8.2}$$

Теорема доказана. □

Определим линейную операцию проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\overline{\mathbb{S}}_m$ на $\mathbb{S}_m$ равенством

$$\mathcal{P}\overline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathcal{J}} \langle g_i, \overline{u}\rangle\,\omega_i \quad \forall \overline{u} \in \overline{\mathbb{S}}_m \tag{8.3}$$

и введем линейное пространство $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{I} - P)\overline{\mathbb{S}}_m$, где $\mathcal{I}$ – тождественная операция. Очевидно, что пространство $\overline{\mathbb{S}}_m$ может быть представлено в виде прямой суммы: $\overline{\mathbb{S}}_m = \mathbb{S}_m \dot{+} \mathbb{W}$. Эта формула дает вэйвлетное разложение пространства $\overline{\mathbb{S}}_m$; первое слагаемое в этом разложении называем *основным* пространством, а второе – *вэйвлетным* пространством.

9. Декомпозиция и реконструкция числовых потоков

Пусть $\mathbb{R}_0$ – пространство последовательностей $\{c_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ с конечным числом ненулевых элементов $c_j \in \mathbb{R}^1$; будем представлять их вектор-столбцами $\mathbf{c} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (c_j)_{j\in\mathcal{J}}$. Если элемент $\overline{u}$ лежит в пространстве $\overline{\mathbb{S}}_m$, то с некоторыми коэффициентами $\overline{c}_j \in \mathbb{R}^1$ верно равенство $\overline{u} = \sum\limits_{j\in\overline{\mathcal{J}}} \overline{\omega}_j \overline{c}_j$; полагая $\overline{\mathbf{c}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\overline{c}_j)_{j\in\overline{\mathcal{J}}}$, запишем это в виде $\overline{u} = \overline{\omega}^T\overline{\mathbf{c}}$, $\overline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}_0$.

Предположим, что

(B) *система* $\{\overline{\omega}_i\}_{i\in\overline{\mathcal{J}}}$ *состоит из линейно независимых элементов.*

Введем систему линейных функционалов $\{\overline{g}_i\}_{i\in\overline{\mathcal{J}}}$ со свойством (5.5).

Теорема 10. *Пусть выполнены предположения* (5.3), (A) *и* (B), *а элемент* $\overline{u} \in \overline{\mathbb{S}}_m$ *представлен в виде суммы* $\overline{u} = u + w$, *где* $u \in \mathbb{S}_m$, $w \in \mathbb{W}$. *Тогда для векторов* $\overline{\mathbf{c}}$, $\mathbf{c}$ *и* $\mathbf{b}$, *составленных из коэффициентов разложения элементов* $\overline{u}$, u, w *по базисам* $\overline{u} = \overline{\omega}^T\overline{\mathbf{c}}$, $u = \omega^T\mathbf{c}$, $w = \overline{\omega}^T\mathbf{b}$, *справедливы формулы декомпозиции*

$$\mathbf{c} = \mathfrak{Q}\overline{\mathbf{c}}, \quad \mathbf{b} = \overline{\mathbf{c}} - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\overline{\mathbf{c}}, \tag{9.1}$$

и формула реконструкции

$$\overline{\mathbf{c}} = \mathfrak{P}^T\mathbf{c} + \mathbf{b}. \tag{9.2}$$

Доказательство. Из определения (8.3) для $u = \omega^T\mathbf{c}$ имеем

$$u = \mathcal{P}\overline{u} = \sum_{i\in\mathcal{J}} \omega_i \sum_{j\in\overline{\mathcal{J}}} \langle g_i, \overline{\omega}_j\rangle \overline{c}_j = \omega^T\mathfrak{Q}\overline{\mathbf{c}},$$

откуда, учитывая единственность разложения по базису ω, выводим первое из соотношений (9.1). Из (5.3) и (5.5) получаем $\overline{g}\omega^T = \overline{g\omega}^T\mathfrak{P}^T$, откуда $\mathfrak{P}^T = \overline{g}\omega^T$. Переписывая представление $\overline{u} = u + w$ в виде $\overline{\omega}^T\overline{\mathbf{c}} = \omega^T\mathbf{c} + \overline{\omega}^T\mathbf{b}$ и умножая последнее соотношение слева на $\overline{g}$, а затем используя определение матрицы $\mathfrak{Q}$ и равенство (5.5), находим (9.2). Благодаря применению в формуле (9.2) только что установленного первого из соотношений (9.1), получаем второе соотношение в (9.1). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пространство вэйвлетов* $\mathbb{W}$ *представимо в виде*

$$\mathbb{W} = \{w \mid w = \overline{\omega}^T \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{b} \in \ker \mathfrak{Q}\}, \tag{9.3}$$

где $\ker \mathfrak{Q}$ – *множество векторов пространства* $\mathbb{R}_0$, *преобразуемых матрицей* $\mathfrak{Q}$ *в нуль.*

Доказательство. Соотношение (9.3) легко получается применением матрицы $\mathfrak{Q}$ ко второму соотношению в (9.1) и использованием формулы (8.2). □

10. Вложенность сплайнов лагранжева типа

1. *Покрытие интервала* (α, β)

В качестве многообразия $\mathfrak{M}$ рассмотрим (конечный или бесконечный) интервал (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$, $\mathfrak{M} = (\alpha, \beta)$; на $\mathfrak{M}$ введем сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X: \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \quad \alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j, \ \beta = \lim_{j\to+\infty} x_j,$$

с помощью которой построим покрытие интервала $\mathfrak{M}$ множествами $\mathfrak{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+3})$, $j \in \mathbb{Z}$. Кратность накрытия интервала $\mathfrak{M}$ упомянутыми множествами равна трем, их семейство $\mathfrak{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{S}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ является q-накрывающим и p-ступенчатым при $q = 3$ и $p = 1$. Клетками $\mathfrak{C}_i$ здесь являются интервалы (x_i, x_{i+1}):

$$\mathfrak{C}_i \stackrel{\text{def}}{=} (x_i, x_{i+1}), \quad i \in \mathbb{Z};$$

кроме того, в данном случае следует положить $\mathcal{K} = \mathcal{J} = \mathbb{Z}$.

2. *Оснащение покрытия*

Оснащение полученного покрытия получаем, сопоставляя каждому множеству $\mathfrak{S}_j = (x_j, x_{j+3})$ вектор $\mathbf{a}_j$; каждой клетке $\mathfrak{C}_i = (x_i, x_{i+1})$ поставим в соответствие множество

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j \mid \mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{C}_i\}.$$

Предположим, что оснащение $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ покрытия $\mathfrak{S}$ полное, т.е. множество A_i указанных векторов является базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ (в рассматриваемом случае полагаем $\overline{\mathcal{J}} = \mathbb{Z}$).

3. *Простое измельчение покрытия*

Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и в клетке $\mathfrak{C}_k = (x_k, x_{k+1})$ выберем точку ξ, $\xi \in \mathfrak{C}_k$. Согласно определению звезды $\mathfrak{Z}_k$, имеем

$$\mathfrak{Z}_k = \{\mathfrak{S}_{k-2}, \mathfrak{S}_{k-1}, \mathfrak{S}_k\} = \{(x_{k-2}, x_{k+1}), (x_{k-1}, x_{k+2}), (x_k, x_{k+3})\}.$$

Рассмотрим сетку

$$\overline{X}:\ \ldots < \overline{x}_{-1} < \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots,$$

где $\overline{x}_j = x_j$ при $j \le k$, $\overline{x}_{k+1} = \xi$, $\overline{x}_j = x_{j-1}$ при $j > k+1$.

С помощью этой сетки построим новое покрытие $\overline{\mathfrak{S}}$ интервала $\mathfrak{M}$, полагая

$$\overline{\mathfrak{S}}_j = (\overline{x}_j, \overline{x}_{j+3});$$

сопоставим каждому множеству $\overline{\mathfrak{S}}_j$ некоторый вектор $\overline{\mathbf{a}_j}$ пространства $\mathbb{R}^3$, а каждой клетке $\overline{\mathfrak{C}}_i = (\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1})$ поставим в соответствие множество

$$\overline{A}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\overline{\mathbf{a}}_j \mid \overline{\mathfrak{S}}_j \supset \overline{\mathfrak{C}}_i\}.$$

Предположим, что оснащение $\overline{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\overline{\mathbf{a}}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ покрытия $\overline{\mathfrak{S}}$ полное.

4. *Пространства минимальных сплайнов*

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^3$ с компонентами из пространства $C(\alpha, \beta)$ и (согласно теореме 1) определим единственную вектор-функцию (столбец) $\omega(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\omega_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$, почти везде удовлетворяющую соотношениям

$$A\omega(t) = \varphi(t), \quad \omega_j(t) = 0 \quad \forall t \notin \mathfrak{S}_j; \tag{10.1}$$

здесь символ A используется также и для матрицы, состоящей из вектор-столбцов $\mathbf{a}_j$, $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$.

Линейное пространство $\mathbb{S}_2(\mathfrak{S}, A, \varphi)$, полученное замыканием линейной оболочки множества $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в топологии поточечной сходимости, называется *пространством минимальных* $(\mathfrak{S}, A, \varphi)$*-сплайнов (второго порядка) лагранжева типа*,

$$\mathbb{S}_2(\mathfrak{S}, A, \varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Cl}_p\{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\omega_j(t)\ \forall t \in \mathfrak{M}\ \ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Генератором этого пространства является тройка

$$(\{(x_j, x_{j+1})\}_{j\in\mathbb{Z}}, \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, \varphi).$$

Аналогичным образом строится вектор-функция (столбец) $\overline{\omega}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\overline{\omega}_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$, почти везде удовлетворяющая соотношениям

$$\overline{A}\overline{\omega}(t) = \varphi(t), \quad \overline{\omega}_j(t) = 0 \quad \forall t \notin \overline{\mathfrak{S}}_j; \tag{10.2}$$

здесь $\overline{A}$ – матрица, состоящая из вектор-столбцов $\overline{\mathbf{a}}_j$, $\overline{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\overline{\mathbf{a}}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$.

Полученный результат используем для построения линейного пространства минимальных сплайнов второго порядка с генератором $(\{(\overline{x}_j, \overline{x}_{j+1})\}_{j\in\mathbb{Z}}, \{\overline{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, \varphi)$:

$$\overline{\mathbb{S}}_2 = \mathbb{S}_2(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{A}, \varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Cl}_p\{\overline{u} \mid \overline{u}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{c}_j\overline{\omega}_j(t) \quad \forall t \in \mathfrak{M} \ \ \forall \overline{c}_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

5. *Калибровочные соотношения*

Калибровочные соотношения дают представление образующих функции ω_i пространства $\mathbb{S}_2(\mathfrak{S}, A, \varphi)$ через линейную комбинацию образующих функций $\overline{\omega}_i$ пространства $\mathbb{S}_2(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{A}, \varphi)$.

Однако в действительности такие представления существуют не всегда.

5.1. *Пример нарушения калибровочных соотношений*

Полагая $\varphi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1, t, t^2)^T$, $\mathbf{a}_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(x_{j+1})$ $\forall j \in \mathbb{Z}$, из аппроксимационных соотношений находим:

$$\omega_j(t) = \frac{(t - x_j)(t - x_{j-1})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j-1})} \qquad \text{при} \qquad t \in (x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{(x_{j+2} - t)(t - x_j)}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+1} - x_j)} \qquad \text{при} \qquad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{(x_{j+3} - t)(x_{j+2} - t)}{(x_{j+3} - x_{j+1})(x_{j+2} - x_{j+1})} \qquad \text{при} \qquad t \in (x_{j+2}, x_{j+3}).$$

Аналогичным образом, полагая $\overline{\mathbf{a}_j} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(\overline{x}_{j+1})$, получаем:

$$\overline{\omega}_j(t) = \frac{(t - \overline{x}_j)(t - \overline{x}_{j-1})}{(\overline{x}_{j+1} - \overline{x}_j)(\overline{x}_{j+1} - \overline{x}_{j-1})} \qquad \text{при} \qquad t \in (\overline{x}_j, \overline{x}_{j+1}),$$

$$\overline{\omega}_j(t) = \frac{(\overline{x}_{j+2} - t)(t - \overline{x}_j)}{(\overline{x}_{j+2} - \overline{x}_{j+1})(\overline{x}_{j+1} - \overline{x}_j)} \qquad \text{при} \qquad t \in (\overline{x}_{j+1}, \overline{x}_{j+2}),$$

$$\overline{\omega}_j(t) = \frac{(\overline{x}_{j+3} - t)(\overline{x}_{j+2} - t)}{(\overline{x}_{j+3} - \overline{x}_{j+1})(\overline{x}_{j+2} - \overline{x}_{j+1})} \qquad \text{при} \qquad t \in (\overline{x}_{j+2}, \overline{x}_{j+3}).$$

Легко видеть, что функции ω_j и $\overline{\omega}_j$ непрерывны на интервале (α, β), а каждая из систем функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\overline{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является линейно независимой системой. Рассмотрим функционалы $\overline{g}_i(u) \stackrel{\text{def}}{=} u(\overline{x}_{i+1})$. Система функционалов $\{\overline{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{\overline{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Ввиду определения сетки $\overline{X}$ имеем

$$\omega_j(t) = \overline{\omega}_j(t) \quad \text{при} \quad j \le k-3, \quad \omega_j(t) = \overline{\omega}_{j+1}(t) \quad \text{при} \quad j \ge k+2;$$

эти соотношения являются калибровочными для функций $\omega_j(t)$ с индексами $j \in \mathbb{Z}\backslash\{k-2, k-1, k\}$. Предположим, что выполнено калибровочное соотношение для функции ω_{k-2}: с некоторыми константами c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1 выполнено соотношение

$$\omega_{k-2} = c_{-2}\overline{\omega}_{k-2} + c_{-1}\overline{\omega}_{k-1} + c_0\overline{\omega}_k + c_1\overline{\omega}_{k+1}$$

(легко видеть, что привлекать слагаемые с другими образующими $\overline{\omega}_j$ нет необходимости). Применяя к последнему соотношению функционалы $\overline{g}_i$ при $i = k-2, k-1, k, k+1$, приходим к неверной формуле

$$\omega_{k-2}(t) = \overline{\omega}_{k-2(t)} + \omega_{k-2}(\overline{x}_k)\overline{\omega}_k(t).$$

Таким образом, наше предположение о том, что выполнено калибровочное соотношение для функции ω_{k-2}, оказалось неверным; нетрудно видеть, что здесь нарушено условие (U).

5.2. *Калибровочные соотношения для минимальных сплайнов второго порядка*

Подходящим выбором системы векторов $\mathbf{a}_j$ добьемся выполнения условия (U), которое, согласно теореме 6, влечет справедливость калибровочных соотношений.

Предположим, что компоненты трехкомпонентной вектор-функции $\varphi(t)$ лежат в пространстве $C^1(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим системы векторов $A = A^\star \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_j^\star)_{j\in\mathbb{Z}}$, $\overline{A} = \overline{A}^\star \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathbf{a}}_j^\star)_{j\in\mathbb{Z}}$, полученных векторными произведениями

$$\mathbf{a}_j^\star = (\varphi_{j+1} \times \varphi'_{j+1}) \times (\varphi_{j+2} \times \varphi'_{j+2}), \tag{10.3}$$

$$\overline{\mathbf{a}}_j^\star = (\overline{\varphi}_{j+1} \times \overline{\varphi}'_{j+1}) \times (\overline{\varphi}_{j+2} \times \overline{\varphi}'_{j+2}); \tag{10.4}$$

здесь использованы обозначения $\varphi_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_s)$, $\varphi'_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_s)$, $\overline{\varphi}_s \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\varphi}(x_s)$, $\overline{\varphi}'_s \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\varphi}'(x_s)$, $s \in \mathbb{Z}$.

Для достаточно мелких локально квазиравномерных сеток X и $\overline{X}$ системы $A^\star$ и $\overline{A}^\star$ являются полными оснащениями покрытий $\mathfrak{S}$ и $\overline{\mathfrak{S}}$ соответственно.

Рассмотрим векторное произведение $\mathbf{n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t) \times \varphi'(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$. Предполагая, что

$$\det(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(v), \mathbf{n}(w)) \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha < u < v < w < \beta, \tag{10.5}$$

введем функцию $\omega^\star(u, v, w, y, t)$, заданную в области $\mathfrak{D}$ вида $\mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v, w, y, t) \mid a < u < v < w < y < b,\ t \in (a, v) \cup (v, w) \cup (w, x) \cup (x, y) \cup (y, b)\}$ следующими формулами:

$$\omega^\star(u, v, w, y, t) \equiv 0 \qquad \forall t \in (\alpha, u) \cup (y, \beta),$$

$$\omega^\star(u, v, w, y, t) \equiv \frac{\mathbf{n}(u) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(v), \mathbf{n}(w))} \qquad \forall t \in (u, v),$$

$$\omega^\star(u, v, w, y, t) \equiv \frac{\mathbf{n}(u) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(v), \mathbf{n}(w))}$$

$$- \frac{\det(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(w), \mathbf{n}(y)))\mathbf{n}(v) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{n}(u), \mathbf{n}(v), \mathbf{n}(w))\det(\mathbf{n}(v), \mathbf{n}(w), \mathbf{n}(y))} \quad \forall t \in (v, w),$$

$$\omega^\star(u, v, w, y, t) \equiv \frac{\mathbf{n}(y) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{n}(v), \mathbf{n}(w), \mathbf{n}(y))} \qquad \forall t \in (w, y).$$

Используя введенную функцию $\omega^\star$, положим

$$\omega_j^\star(t) \equiv \omega^\star(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, t), \tag{10.6}$$

$$\overline{\omega}_j^\star(t) \equiv \omega^\star(\overline{x}_j, \overline{x}_{j+1}, \overline{x}_{j+2}, \overline{x}_{j+3}, t). \tag{10.7}$$

Можно показать, что функции (10.6) и (10.7) лежат в пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ и удовлетворяют аппроксимационным соотношениям (10.1) и (10.2) соответственно при $A = A^\star$, $\overline{A} = \overline{A}^\star$.

Из (10.6) и (10.7) для $j \notin \{k-2, k-1, k\}$ следуют соотношения

$$\omega_j^\star(t) \equiv \overline{\omega}_j^\star(t) \quad \forall j \leq k-3; \quad \omega_j^\star(t) \equiv \overline{\omega}_{j+1}^\star(t) \quad \forall j \geq k+1; \tag{10.8}$$

кроме того, из (10.3) и (10.4) находим

$$\mathbf{a}_j^\star = \overline{\mathbf{a}}_j^\star \quad \text{при } j \leq k-3, \quad \mathbf{a}_j^\star = \overline{\mathbf{a}}_{j+1}^\star \quad \text{при } j \geq k+1. \tag{10.9}$$

Таким образом, с точностью до нумерации функций $\overline{\omega}_j$ и $\overline{\mathbf{a}}_j^\star$ условие (U) выполнено, а значит справедливы калибровочные соотношения (5.3). Заметим, что в данном случае введение нумерации, использованной в теореме 6, приводит к ненужным усложнениям рассуждений, в то время как результат получается просто; покажем это здесь.

Из (10.1) и (10.2) вытекает равенство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j^\star \omega_j^\star(t) = \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \overline{\mathbf{a}}_{j'}^\star \overline{\omega}_{j'}^\star(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta). \tag{10.10}$$

Используя соотношения (10.8) и (10.9) в (10.10), после приведения подобных членов находим

$$\mathbf{a}_{k-2}^\star \omega_{k-2}^\star(t) + \mathbf{a}_{k-1}^\star \omega_{k-1}^\star(t) + \mathbf{a}_k^\star \omega_k^\star(t)$$

$$= \overline{\mathbf{a}}_{k-2}^\star \overline{\omega}_{k-2}^\star(t) + \overline{\mathbf{a}}_{k-1}^\star \overline{\omega}_{k-1}^\star(t) + \overline{\mathbf{a}}_k^\star \overline{\omega}_k^\star(t) + \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^\star \overline{\omega}_{k+1}^\star(t). \tag{10.11}$$

Рассматривая (10.11) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_{k-2}^\star(t)$, $\omega_{k-1}^\star(t)$, $\omega_k^\star(t)$ и используя линейную независимость векторов $\mathbf{a}_{k-2}^\star$, $\mathbf{a}_{k-1}^\star$, $\mathbf{a}_k^\star$ (оснащение $A^\star$ полное!), выражаем упомянутые неизвестные через линейную комбинацию функций $\overline{\omega}_{k-2}^\star(t)$, $\overline{\omega}_{k-1}^\star(t)$, $\overline{\omega}_k^\star(t)$, $\overline{\omega}_{k+1}^\star(t)$, что и требовалось.

Вводя пространства

$$\mathbb{S}_2(\mathfrak{S},A^\star,\varphi) \stackrel{\rm def}{=} \mathrm{Cl}_p\{u \mid u(t) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\omega_j^\star(t) \ \ \forall t\in\mathfrak{M} \ \ \forall c_j\in\mathbb{R}^1\}, \tag{10.12}$$

$$\mathbb{S}_2(\overline{\mathfrak{S}},\overline{A}^\star,\varphi) \stackrel{\rm def}{=} \mathrm{Cl}_p\{\overline{u} \mid \overline{u}(t) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{c}_j\overline{\omega}_j^\star(t) \ \ \forall t\in\mathfrak{M} \ \ \forall \overline{c}_j\in\mathbb{R}^1\}, \tag{10.13}$$

теперь получаем

$$\mathbb{S}_2(\mathfrak{S},A^\star,\varphi) \subset \mathbb{S}_2(\overline{\mathfrak{S}},\overline{A}^\star,\varphi). \tag{10.14}$$

Следствие 2. *Если сетка $\overline{X}$ получена из сетки X последовательным добавлением узла между двумя соседними узлами предыдущей сетки (конечное или счетное число раз), то при выполнении условия* (10.5) *для пространств* (10.12) *и* (10.13), *полученных как замыкания линейных оболочек множеств функций* (10.6) *и* (10.7) *соответственно, справедливо вложение* (10.14).

Литература

1. С. Малла, *Вэйвлеты в обработке сигналов.* М., 2003.
2. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* М., 2005.
3. И. Е. Максименко, М. А. Скопина, *Многомерные периодические всплески.* — Алгебра и анализ **15** (2003) No. 2, 1–39.
4. J. Maes, A. Bultheel, *Stability analysis of biorthogonal multiwavelets whose duals are not in L2 and its application to local semiorthogonal lifting.* — Appl. Numer. Math. (2007), doi:10.1016/j.apnum.2007.03.002.
5. Ю. К. Демьянович, *Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения.* — Доклады РАН **401** (2005) No. 4, 1–4.
6. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны.* СПб., 1994.
7. Ю. К. Демьянович, *Вэйвлеты на многообразии.* — Доклады РАН **421** (2009) No. 2, 1–5.
8. Н. Стинрод, *Топология косых произведений.* М., 1953.

Demjanovich Yu. K. Embedded spaces and wavelets on a manifold.

Simple methods for constructing systems of embedded spline spaces on a manifold are suggested, and wavelet decompositions of such systems are discussed. The results obtained are applied to constructing embedded spline spaces of Lagrange type.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
Петродворец, 198504
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Yuri.Demjanovich@JD16531.spb.edu

Поступило 8 ноября 2010 г.