Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ $\{c_2, c_3, f(z_1), f'(z_1)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

В работе продолжается исследование класса типично вещественных функций, т.е. класса T функций

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,$$

регулярных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих в нем условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

В предыдущих работах автора исследованы множества значений систем функционалов в классе T. При описании этих множеств использован подход к решению такого типа задач, разработанный в [1] при исследовании множеств значений систем функционалов в классе C-функций Каратеодори. Этот подход основан на интегральном представлении класса и теоремах из теории моментов.

В классе T найдены множества значений $f'(z_1)$ в следующих случаях: 1) при фиксированном значении $f(z_1)$ [2], 2) при фиксированных значениях $f(z_1)$ и $f(r_1)$ [3], 3) при фиксированных значениях $f(z_1)$ и $f(r_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ [4]. Здесь и далее z_1 – фиксированная точка U, $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, r_j – заданные числа, $0 < r_j < 1$.

В [5] было исследовано множество Ω значений системы $\{f(z_1), f'(z_1), c_2\}$ на классе T. Приведем полностью доказанный в [5] результат: Ω есть множество всех точек

$$X = X(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3) \in \mathbb{R}^5$$

Ключевые слова: типично вещественная функция, теорема искажения.

(где $x_3 = c_2$, $w_1 = x_1 + iy_1 = f(z_1)$, $w_2 = x_2 + iy_2 = f'(z_1)$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$), в которых неотрицательны все главные миноры двух эрмитовых матриц $A^{(1)}(X)$ и $A^{(-1)}(X)$:

$$A^{(\varepsilon)}(X) = (a_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - \varepsilon x_3 & \varepsilon + (2 - \varepsilon\zeta_1)w_1 & \varepsilon + (2 - \varepsilon\bar{\zeta}_1)\overline{w}_1 \\ \varepsilon + (2 - \varepsilon\overline{\zeta}_1)\overline{w}_1 & \varepsilon\frac{\operatorname{Im}[(\zeta_1 - 2\varepsilon)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} & \varepsilon\overline{w}_1 + (2 - \varepsilon\bar{\zeta}_1))\overline{w'}_2 \\ \varepsilon + (2 - \varepsilon\zeta_1)w_1 & \varepsilon w_1 + (2 - \varepsilon\zeta_1)w'_2 & \varepsilon\frac{\operatorname{Im}[(\zeta_1 - 2\varepsilon)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} \end{pmatrix},$$

$\varepsilon = \pm 1$, где $\zeta_1 = z_1 + \frac{1}{z_1}$, $w'_2 = \frac{z_1^2}{1 - z_1^2} w_2$; $\operatorname{Int}\Omega$ – множество внутренних точек Ω – определяется неравенствами

$$\det\left[(a_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^l\right] > 0, \quad l = 0, 1, 2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Пусть c_2 и $f(z_1)$ фиксированы и удовлетворяют условиям

$$|c_2| < 2,\ (2 - \varepsilon c_2)\frac{\operatorname{Im}[f(z_1)(\zeta_1\varepsilon - 2)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} > |1 - (\zeta_1 - 2\varepsilon)f(z_1)|^2,\ \varepsilon = \pm 1. \quad (1)$$

Условие (1) означает, что фиксирована внутренняя точка множества значений системы $\{c_2, f(z_1)\}$ на классе T (см. [9], лемма 3). В [5] найдено множество значений $f'(z_1)$ в классе T при фиксированных значениях c_2 и $f(z_1)$, удовлетворяющих (1).

В настоящей работе исследовано множество значений системы

$$\{c_2, c_3, f(z_1), f'(z_1)\} \quad (2)$$

в классе T и найдено множество значений $f'(z_1)$ при фиксированных значениях $c_2, c_3, f(z_1)$. При доказательствах, как и в [2–5], использованы интегральное представление класса T [6, 7] и теоремы из степенной проблемы моментов [8].

§1. Основные результаты

Пусть $z_1 \in U$, $z_1 \neq 0$, $\zeta(z) = z + \frac{1}{z}$, $\zeta_1 = \zeta(z_1)$.

Пусть

$$w_1 = x_1 + iy_1 = f(z_1), \quad w_2 = x_2 + iy_2 = f'(z_1),$$
$$x_j, y_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \quad w_2' = w_2 \frac{z_1^2}{1 - z_1^2},$$
$$x_3 = c_2, \quad x_4 = c_3, \quad x_3' = \frac{c_2}{2}, \quad x_4' = \frac{c_3 + 1}{4}.$$

Обозначим через D множество значений системы (2) в классе T. Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. *Тогда*

1. D *есть множество всех точек*

$$X = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^6, \tag{3}$$

в которых неотрицательны все главные миноры двух эрмитовых матриц $A(X)$ *и* $B(X)$, *где*

$$A(X) = (a_{jk})_0^2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - x_4 & x_3 + \zeta_1 + (4 - \zeta_1^2) w_1 & x_3 + \bar{\zeta}_1 + (4 - \bar{\zeta}_1^2)\overline{w}_1 \\ \bar{a}_{01} & -1 - \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_1} \operatorname{Im}[(4 - \zeta_1^2) w_1] & a_{12} \\ \bar{a}_{02} & -1 + 2\zeta_1 w_1 + (4 - \zeta_1^2) w_2' & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$B(X) = (b_{jk})_0^3$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & x_3 & w_1 & \bar{w}_1 \\ x_3 & x_4 + 1 & \zeta_1 w_1 - 1 & \bar{\zeta}_1 \overline{w}_1 - 1 \\ \overline{w}_1 & \bar{\zeta}_1 \overline{w}_1 - 1 & -\operatorname{Im} w_1 / \operatorname{Im}\zeta_1 & \overline{w'}_2 \\ w_1 & \zeta_1 w_1 - 1 & w_2' & -\operatorname{Im} w_1 / \operatorname{Im}\zeta_1 \end{pmatrix}.$$

2. *Точка* $X \in \mathbb{R}^6$ *является внутренней точкой множества* D *тогда и только тогда, когда*
$x_4 < 3$, $x_4 + 1 > x_3^2$,
$\det[(a_{jk})_0^{l_1}] > 0$ *при* $l_1 = 1, 2$,
$\det[(b_{jk})_0^{l_2}] > 0$ *при* $l_2 = 2, 3$.

3. *Каждой точке* $X \in \partial D$ *соответствует только одна функция* $f_X(z)$ *класса* T, *и она имеет вид:*

$$f_X(z) = \sum_{k=1}^{4} \frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k z + z^2}, \quad \sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1,$$

где либо $t_1, t_2 \in (-1, 1)$, $t_3 = -1$, $t_4 = 1$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, 3, 4$,
либо $t_1, t_2, t_3 \in (-1, 1)$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, 3$.

Известно [9], что множество значений D_1 системы $\{c_2, c_3, f(z_1)\}$ на классе T в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ есть множество всех точек $X = X(x_1, y_1, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{gathered} x_4 + 1 \geq x_3^2, \quad x_4 \leq 3, \\ -\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im} \zeta_1} \geq |w_1|^2, \quad -\frac{\operatorname{Im}[(4 - \zeta_1^2) w_1]}{\operatorname{Im} \zeta_1} \geq 1, \\ \det[(b_{jk})_0^2] \geq 0, \quad \det[(a_{jk})_0^1] \geq 0. \end{gathered}$$

Кроме того, из леммы 3 в [9] следует, что в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ множество внутренних точек D_1 определяется системой неравенств

$$x_4 < 3, \quad x_4 + 1 > x_3^2, \quad \det[(b_{jk})_0^2] > 0, \quad \det[(a_{jk})_0^1] > 0. \tag{4}$$

Пусть $\widetilde{T} \equiv T(c_2, c_3; z_1, w_1)$ – класс функций $f(z) \in T$ при фиксированных c_2, c_3, $f(z_1) = w_1$, удовлетворяющих системе неравенств (4). Пусть $\widetilde{D} = \{w = f'(z_1) \,:\, f \in \widetilde{T}\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. *Тогда*

$$\widetilde{D} = \{w \in \mathbb{C} \,:\, |w - O_j| \leq R_j, \quad j = 1, 2\}, \tag{5}$$

где

$$O_1 = \frac{1}{1 - z_1^2} \left[-1 + 2\zeta_1 f(z_1) - \frac{1}{3 - c_3} (c_2 + \zeta_1 + (4 - \zeta_1^2) f(z_1))^2 \right],$$

$$R_1 = \frac{1}{|1 - z_1^2|} \left[-1 + \frac{\operatorname{Im}[f(z_1)(\zeta_1^2 - 4)]}{\operatorname{Im} \zeta_1} - \frac{1}{3 - c_3} |c_2 + \zeta_1 + (4 - \zeta_1^2) f(z_1)|^2 \right],$$

$$O_2 = \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad R_2 = \frac{|z_1^2 - 1|}{|z_1|^2} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

при $\Delta = 1 + c_3 - c_2^2$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & c_2 & f(z_1) \\ c_2 & c_3 + 1 & \zeta_1 f(z_1) - 1 \\ f(z_1) & \zeta_1 f(z_1) - 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & c_2 & f(z_1) \\ c_2 & c_3 + 1 & \zeta_1 f(z_1) - 1 \\ \overline{f(z_1)} & \overline{\zeta_1 f(z_1) - 1} & -\frac{\operatorname{Im} f(z_1)}{\operatorname{Im} \zeta_1} \end{vmatrix}.$$

Точкам на $\partial \widetilde{D}$ *соответствуют только функции* $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$:

$$f_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \left\{ 1 + \frac{z}{(1+z)^2} \left[c_2 - 2 + \frac{z}{1 - 2t_1 z + z^2} \left(c_3 - 3 \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{z}{1 - 2t_2 z + z^2} \cdot \frac{-|\varkappa_1|^2 \operatorname{Im} \zeta_1}{\operatorname{Im} \varkappa_1} \right) \right] \right\},$$

где $t_1 \in [-1, 1]$, $2t_2 = \frac{\operatorname{Im}(\varkappa_1 \zeta_1)}{\operatorname{Im} \varkappa_1}$,

$$\varkappa_1 = \{[w_1(\zeta_1 - 2) - 1](\zeta_1 + 2) - c_2 + 2\}(\zeta_1 - 2t_1) + 3 - c_3,$$

и

$$f_2(z) = \frac{z}{1 - 2t_1 z + z^2} \left[1 + \frac{z}{1 - 2t_2 z + z^2} (c_2 - 2t_1) \right.$$
$$\left. + \frac{z^2}{(1 - 2t_2 z + z^2)(1 - 2t_3 z + z^2)} (c_3 + 1 - 2(t_1 + t_2) c_2 + 4 t_1 t_2) \right],$$

где $t_1, t_2, t_3 \in [-1, 1]$,

$$2t_3 = \frac{\operatorname{Im}(\varkappa_2 \zeta_1)}{\operatorname{Im} \varkappa_2},$$
$$\varkappa_2 = [w_1(\zeta_1 - 2t_1) - 1](\zeta_1 - 2t_2) - c_2 + 2t_1,$$
$$4t_1^2 + 2(t_1 + t_2)(c_2 - 2t_1) - \frac{|\varkappa_2|^2 \operatorname{Im} \zeta_1}{\operatorname{Im} \varkappa_2} = c_3 + 1.$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Множество значений $f'(z_1)$ на классе $\widetilde{T}$ при $w_1 = z_1$ есть пересечение двух кругов*

$$\begin{aligned}&\left|w - \frac{1}{1-z_1^2}\left[1 + 2z_1^2 - \frac{1}{3-c_3}(c_2 + 3z_1 - z_1^3)^2\right]\right| \\ &\le \frac{1}{|1-z_1^2|}\left[-1 - \frac{\operatorname{Im}[\bar{z}_1(1-z_1^2)^2]}{(1-|z_1|^2)\operatorname{Im} z_1} - \frac{1}{3-c_3}|c_2 + 3z_1 - z_1^3|^2\right]\end{aligned}$$

и

$$\left|w + \frac{1-z_1^2}{z_1^2}\frac{\Delta_1}{\Delta}\right| \le \frac{\Delta_2}{\Delta}\cdot\frac{|1-z_1^2|}{|z_1|^2},$$

где $\Delta = 1 + c_3 - c_2^2$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & c_2 & z_1 \\ c_2 & c_3+1 & z_1^2 \\ z_1 & z_1^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & c_2 & z_1 \\ c_2 & c_3+1 & z_1^2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_1^2 & \frac{|z_1|^2}{1-|z_1|^2} \end{vmatrix}.$$

Следствие 2. *Множество значений $f'(z_1)$ на классе $T(0,0;ir,ir)$ есть пересечение двух кругов*

$$|w - (1-r^4)| \le \frac{r^4(1+r^2)}{1-r^2}, \quad \left|w - \left[1 + \frac{r^4(6+r^2)}{3(1+r^2)}\right]\right| \le \frac{r^4(2+r^2)(3+r^2)}{3(1-r^4)}.$$

2. Доказательства

2.1. Доказательство теоремы 1. Докажем первое утверждение теоремы.

Для класса T имеет место интегральное представление

$$f(z) \in T \iff f(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{z}{1-2tz+z^2}\,d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1, \tag{6}$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию $\int_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$ [6, 7].

Из (6) для системы (2) получаем представление

$$c_2=\int\limits_{-1}^{1}2t\,d\alpha(t),\quad c_3=\int\limits_{-1}^{1}(4t^2-1)\,d\alpha(t),$$

$$f(z_1)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\zeta_1-2t},\quad f'(z_1)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{-\zeta'(z_1)}{(\zeta_1-2t)^2}\,d\alpha(t). \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что D есть выпуклое ограниченное замкнутое множество. Для того, чтобы имело место представление (7), необходимо и достаточно, чтобы из справедливости для всех $t\in[-1,1]$ неравенства

$$\varphi(t)\equiv\operatorname{Re}\left[\delta_0+\delta_1 t+\delta_2 t^2+\frac{\delta_3}{\zeta_1-2t}+\frac{\delta_4}{(\zeta_1-2t)^2}\right]\geq 0 \tag{8}$$

($\delta_0\neq 0$, $\{\delta_j\}_1^4$ – некоторые комплексные числа) следовала бы справедливость неравенства

$$H\equiv\operatorname{Re}\left[\delta_0+\delta_1\frac{c_2}{2}+\delta_2\frac{c_3+1}{4}+\delta_3 f(z_1)+\delta_4\frac{f'(z_1)}{-\zeta'(z_1)}\right]\geq 0 \tag{9}$$

(теорема 1.3 в [8, с. 86–87]). Так как $\operatorname{Im}\zeta_1\neq 0$, запишем (8) в виде

$$\varphi(t)=\frac{A_6(t)}{|\zeta_1-2t|^4}\geq 0,\quad -1\leq t\leq 1, \tag{10}$$

где $A_6(t)$ – алгебраический многочлен от t шестой степени. Используя представление Маркова–Лукача (см. [8, с. 89]) неотрицательных многочленов, из неравенства (10) получаем

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&(1-t^2)\left|\beta_0+\frac{\beta_1}{\zeta_1-2t}+\frac{\beta_2}{\bar\zeta_1-2t}\right|^2+\left|\gamma_0+\gamma_1 t+\frac{\gamma_2}{\zeta_1-2t}+\frac{\gamma_3}{\bar\zeta_1-2t}\right|^2\\
&=(1-t^2)\left\{|\beta_0|^2+\frac{|\beta_1|^2+|\beta_2|^2}{|\zeta_1-2t|^2}+2\operatorname{Re}\left[\frac{\bar\beta_0\beta_1+\beta_0\bar\beta_2)}{\zeta_1-2t}\right]\right.\\
&\left.+\,2\operatorname{Re}\left[\frac{\beta_1\bar\beta_2}{(\zeta_1-2t)^2}\right]\right\}+|\gamma_0|^2+|\gamma_1|^2t^2+\frac{|\gamma_2|^2+|\gamma_3|^2}{|\zeta_1-2t|^2}\\
&+2\operatorname{Re}[\bar\gamma_0\gamma_1 t]+2\operatorname{Re}\left[\frac{\bar\gamma_0\gamma_2+\gamma_0\bar\gamma_3)}{\zeta_1-2t}\right]+2\operatorname{Re}\left[\frac{(\bar\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\bar\gamma_3)t}{\zeta_1-2t}\right]\\
&+2\operatorname{Re}\left[\frac{\gamma_2\bar\gamma_3}{(\zeta_1-2t)^2}\right]\geq 0,\end{aligned} \tag{11}$$

где $\{\beta_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ – комплексные числа. В силу (8)–(9), из (11) следуют неравенства

$$
\begin{aligned}
H_1(X) &= (3-x_4)|\beta_0|^2 + \left[\frac{\operatorname{Im}[\zeta_1^2-4)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} - 1\right](|\beta_1|^2+|\beta_2|^2)\\
&+ 2\operatorname{Re}[(\bar\beta_0\beta_1+\beta_0\bar\beta_2)(x_3+\zeta_1+(4-\zeta_1^2)w_1)]\\
&+ 2\operatorname{Re}[\beta_1\bar\beta_2(-1+2\zeta_1+(4-\zeta_1^2)w_2')] \ge 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2(X) &= |\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2\frac{x_4+1}{4} + \left(-\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}\right)(|\gamma_2|^2+|\gamma_3|^2)\\
&+ 2\operatorname{Re}\left(\bar\gamma_0\gamma_1\frac{x_3}{2}\right) + 2\operatorname{Re}[(\bar\gamma_0\gamma_2+\gamma_0\bar\gamma_3)w_1]\\
&+ 2\operatorname{Re}\left[(\bar\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\bar\gamma_3)\frac{\zeta_1 w_1-1}{2}\right] + 2\operatorname{Re}(\gamma_2\bar\gamma_3 w_2') \ge 0.
\end{aligned}
$$

Неотрицательность эрмитовых форм $H_1(X)$ и $H_2(X)$ равносильна неотрицательности всех главных миноров матриц $A(X)$ и $B(X)$ (см. [10, с. 300]).

Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Доказательство утверждений 2 и 3 аналогично доказательствам лемм 1 и 2 в [9].

Теорема 1 доказана. □

2.2. Доказательство теоремы 2. В силу утверждения 2 теоремы 1, имеем

$$
\operatorname{Int}\widetilde{D} = \{w\in\mathbb{C} : \det A(X) > 0, \quad \det B(X) > 0\},
$$

где $X = (w_1, w_2, c_2, c_3)$ и c_2, c_3, w_1 фиксированы и удовлетворяют неравенствам (4).

Эрмитовы матрицы A и B имеют только по два элемента, зависящих от $f'(z_1)$: a_{12}, a_{21} и b_{23}, b_{32}. Нетрудно видеть, что множество $\widetilde{D}$ есть пересечение двух замкнутых кругов:

$$
\{|w-O_1|\le R_1\}\cap\{|w-O_2|\le R_2\}.
$$

Используя утверждение 3 теоремы 1 и либо условия

$$
\sum_{k=1}^{4}\lambda_k = 1,\quad \sum_{k=1}^{2}\lambda_k t_k - \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{c_2}{2},\quad \sum_{k=1}^{2}\lambda_k t_k^2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{c_3+1}{4},
$$

$$
w_1 = \sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k}{\zeta_1 - 2t_k} + \frac{\lambda_3}{\zeta_1+2} + \frac{\lambda_4}{\zeta_1-2},
$$

либо условия

$$\sum_{k=1}^{3}\lambda_k=1,\quad \sum_{k=1}^{3}\lambda_k t_k=\frac{c_2}{2},\quad \sum_{k=1}^{3}\lambda_k t_k^2=\frac{c_3+1}{4},\quad w_1=\sum_{k=1}^{3}\frac{\lambda_k}{\zeta_1-2t_k},$$

получим

$$\begin{gathered}
f_1(z)=\frac{1}{\zeta-2}\left\{1+\frac{1}{\zeta+2}\left[c_2-2+\frac{c_3-3}{\zeta-2t_1}+\frac{8\lambda_2(t_1-t_2)(1-t_2^2)}{(\zeta-2t_1)(\zeta-2t_2)}\right]\right\},\\
8\lambda_2(t_1-t_2)(1-t_2^2)=\{([w_1(\zeta_1-2)-1](\zeta_1+2)-c_2+2)(\zeta_1-2t_1)\\
-c_3+3\}(\zeta_1-2t_2)\equiv\varkappa_1(\zeta_1-2t_2),
\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}
f_2(z)=\frac{1}{\zeta-2t_1}\left[1+\frac{c_2-2t_1}{\zeta-2t_2}+\frac{4\lambda_3(t_3-t_1)(t_3-t_2)}{(\zeta-2t_2)(\zeta-2t_3)}\right],\\
4\lambda_3(t_3-t_1)(t_3-t_2)=\{([w_1(\zeta_1-2t_1)-1](\zeta_1-2t_2)\\
-c_2+2t_1\}(\zeta_1-2t_3)\equiv\varkappa_2(\zeta_1-2t_3).
\end{gathered}\tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) находим $t_2=t_2(t_1)$ и $t_3=t_3(t_1,t_2)$. Замечая, что

$$\varkappa_1(\zeta_1-2t_2)=-\frac{|\varkappa_1|^2\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}\varkappa_1},$$
$$\varkappa_2(\zeta_1-2t_3)=-\frac{|\varkappa_2|^2\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}\varkappa_2},$$

получим функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, соответствующие точкам на $\partial\widetilde{D}$.

Теорема 2 доказана. □

Литература

1. В. А. Андреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
2. Е. Г. Голузина, *О множествах значений систем* $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ *и* $\{f(z_1), f(z_2)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 65–75.

3. Е. Г. Голузина, *О множествах значений систем* $\{f(z_1), f(z_2), f'(z_2)\}$ *и* $\{f(z_1), f'(z_1), f''(z_1)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 48–61.
4. Е. Г. Голузина, *Об одной теореме искажения для типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 33–45.
5. Е. Г. Голузина, *О множествах значений систем* $\{f(z_0), f'(z_0), c_2\}$ *и* $\{f(r), f'(r), f(z_0)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 41–51.
6. M. S. Robertson, *On the coefficients of a typically real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
7. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. 27 (69), No. 2 (1950), 201–218.
8. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М., 1973.
9. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
10. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 3-е изд., М., 1967.

Goluzina E. G. On the region of values of the system $\{c_2, c_3, f(z_1), f'(z_1)\}$ in the class of typically real finctions.

Investigations in the well-known class T of typically real functions $f(z)$ in the disk $U = \{z : |z| < 1\}$ are continued. The region of values of the system $\{c_2, c_3, f(z_1), f'(z_1)\}$ in the class T is investigated. The region of values of $f'(z_1)$ in the class of functions $f \in T$ with fixed values c_2, c_3 and $f(z_1)$ is determined.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 16 сентября 2010 г.

E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru