Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 381, 2010 г.

С. А. Образцова, А. В. Пастор

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ 7 И 8-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

1. Введение

Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Степень вершины v обозначается $d(v)$, наименьшая из степеней вершин графа G – через $\delta(G)$, а наибольшая из степеней вершин графа G – через $\Delta(G)$. Подграф, индуцированный множеством вершин A, обозначается $G(A)$. Количество вершин графа G мы будем обозначать $|G|$. Кроме того, обозначим через $V_k(G)$ множество вершин графа G, имеющих степень k, и через $V_{>k}(G)$ – множество вершин графа G, степени которых больше, чем k.

Определение 1. *Если $A \subset V(G)$, то через $G - A$ обозначается граф, полученный из G удалением всех вершин множества A и всех инцидентных им ребер. Для $v \in V(G)$ положим $G - v{=}G - \{v\}$.*

Определение 2. *Если $B \subset E(G)$, то через $G-B$ обозначается граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)\setminus B$. Для $e \in E(G)$ положим $G - e = G - \{e\}$.*

Определение 3. *Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, окрестностью множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A.*

Определение 4. *Пусть H – подграф графа G. Тогда через $\overline{H}$ мы будем обозначать подграф $G(V(G) \setminus (V(H) \cup N_G(H)))$ графа G.*

Ключевые слова: k-связность, минимальность, минимальность по стягиванию.

Исследования частично поддержаны грантами РФФИ 09-01-12137-офи-м, грантом Президента РФ НШ-5282.2010.1 и A*STAR SINGA Scholarship in School of Physical and Mathematical Sciences, NTU, Singapore.

Другими словами, $\overline{H}$ – это подграф графа G, индуцированный множеством вершин, не входящих в H и не смежных с вершинами из H.

Определение 5. *Множество $T \subset V(G)$ называется разделяющим, если граф $G-T$ несвязен. Разделяющее множество, содержащее ровно k вершин, называется также k-разделяющим.*

Определение 6. *Вершинной связностью графа G (обозначаемой $\kappa(G)$) называется мощность наименьшего подмножества множества вершин графа G такого, что при его удалении G становится несвязным или тривиальным (то есть состоящим из одной вершины). При этом, граф G называется k-связным, если $\kappa(G) \geq k$.*

Заметим, что если граф G – k-связный, то $\delta(G) \geq k$.

В данной работе будут исследоваться k-связные графы, которые перестают быть k-связными при удалении или стягивании любого из ребер.

Определение 7. *Граф называется минимальным, если при удалении любого ребра понижается его связность.*

Определение 8. *Ребро графа G называется нестягиваемым, если при его стягивании уменьшается связность графа G.*

Заметим, что если (x, y) – нестягиваемое ребро неполного k-связного графа G, то существует k-разделяющее множество, содержащее одновременно вершины x и y.

Определение 9. *Граф называется минимальным относительно стягивания ребер, если все его ребра нестягиваемы.*

Интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после работы В. Татта [13], в которой было дано полное описание структуры трехсвязного графа в терминах удаления и стягивания ребер. Вопрос о том, какова структура минимального и минимального по стягиванию k-связного для k больших 3 был рассмотрен в статьях Р. Халина [4] и [5]. В работе [4] было доказано, что в любом минимальном k-связном графе есть вершина степени k. После этого, в статье [5] был задан вопрос о том, какова наибольшая константа c'_k, такая, что количество вершин степени k в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе G равно по крайней мере $c'_k|G|$. В этой же статье были получены первые нижние оценки на это число для случаев $k = 4, 5$ и 6. На настоящий момент никаких верхних

оценок для c'_k при $k \geq 5$ не существует (ни общих, ни для частных случаев k). С другой стороны, в 1981 году в работе Томассена [12] была построена серия примеров минимальных по стягиванию k-связных k-регулярных графов.

В дальнейшем исследовались в основном k-связные графы обладающие только одним из двух свойств – минимальностью или минимальностью по стягиванию. Наибольшее продвижение в первом из этих направлений было получено В. Мадером в статье [9].

Теорема 1 (см. [9]). *Пусть G – минимальный k-связный граф и C – множество вершин произвольного цикла в G. Тогда $C \cap V_k(G) \neq \varnothing$.*

Следствие 1 (см. [9]). *Пусть G – минимальный k-связный граф. Тогда $|V_k(G)| \geq \frac{k-1}{2k-1}|G|$.*

Общих результатов во втором направлении получено не было, но существуют продвижения в изучении 4, 5, 6 и 7-связных графов. Случай 4-связных графов полностью описан в работах М. Фонте [6] и Н. Мартинова [8], для 4-связных графов также получено, что из минимальности по стягиванию следует минимальность и доказано, что $c = 1$, то есть все вершины такого графа имеют степень 4. Для графов более высокой связности существуют примеры минимальных по стягиванию, но не минимальных графов, и, таким образом, рассмотрение графов, обладающих обоими свойствами, становится содержательным. Структура минимальных по стягиванию 5-связных графов наиболее подробно изучена в серии статей К. Андо, А. Канеко и К. Каварабаяши, завершающейся статьей [1].

Теорема 2 (см. [1]). *В 5-связном минимальном относительно стягивания графе любая вершина смежна по крайней мере с двумя вершинами из множества $V_5(G)$.*

Следствие 2 (см. [1]). *Для любого 5-связного минимального относительно стягивания графа G выполнено $|V_5(G)| \geq \frac{2}{5}|G|$.*

Параллельно с работами К. Андо и др. 5-связные графы рассматривались в серии статей Ж. Су, Кс. Юана и Ч. Куина, в которой были получены аналогичные результаты. К сожалению, за исключением двух последних работ серии, эти статьи публиковались только на китайском языке. Лучшая оценка в серии получена в работе [10].

Теорема 3 (см. [10]). *Для любого 5-связного минимального относительно стягивания графа G выполнено $|V_5(G)| \geq \frac{4}{9}|G|$.*

Кроме того, авторы [10] указывают на невозможность улучшения оценки, полученной К. Андо и др., с помощью прежних методов (т.е. изучения числа вершин степени 5 только в окрестности вершин графа, без рассмотрения вершин, находящихся на расстоянии больше 1), ссылаясь на приведенный в [11] пример минимального по стягиванию 5-связного графа, окрестности некоторых вершин степени 5 которого содержат ровно две вершины степени 5.

Относительно минимальных по стягиванию 6-связных графов полученные продвижения значительно скромнее. В [2] К. Андо и др. доказали, что для любого минимального по стягиванию 6-связного графа G выполнено $|V_6(G)| \geq \frac{1}{7}|G|$. В этой же работе приведена серия примеров минимальных по стягиванию 6-связных графов, в которых $|V_6(G)| = \frac{1}{2}|G|$.

История изучения 7-связных графов несколько длиннее, поскольку даже небольшие продвижения для этих графов требовали существенных усилий. Существование хотя бы одной вершины степени 7 в минимальном по стягиванию 7-связном графе было получено как следствие результата Е. Эгава [3]. Позднее, М. Криселл в [7] доказал существование двух вершин степени 7 и предположил существование таких вершин на расстоянии не более двух. Ж. Су и Кс. Юан в [14] это предположение доказали. В дальнейшем Ж. Су, Кс. Юан и Л. Мин в [15] доказали, что для любого минимального по стягиванию 7-связного графа выполнено $|V_7(G)| \geq \frac{1}{22}|G|$. В [15] также построена серия примеров графов G, для которых $V_7(G)$ состоит из попарно несмежных вершин и высказано предположение, что других примеров минимальных по стягиванию 7-связных графов, не содержащих смежных вершин степени 7, не существует.

Для минимальных по стягиванию 8-связных графов пока не доказано даже утверждение о существовании хотя бы одной вершины, имеющей степень 8.

В нашей статье доказываются оценки снизу на долю количества вершин степени 7 и 8 в минимальных и минимальных по стягиванию 7 и 8-связных графах соответственно. Мы доказываем, что в обоих случаях количество вершин соответствующей степени не меньше $\frac{1}{2}|G|$.

Из теоремы 1 прямым подсчетом числа ребер легко выводится требуемая оценка для минимального k-связного графа, любая вершина степени k которого смежна еще как минимум с одной вершиной степени k. К сожалению, нам не известно, выполняется ли это условие для всех минимальных и минимальных относительно стягивания 7 и

8-связных графов. В связи с этим, существенная часть нашей работы посвящена изучению *особых вершин* таких графов, то есть вершин степени k, не смежных с другими вершинами степени k. Мы доказываем, что количество особых вершин не превосходит количества вершин степени k, смежных как минимум с двумя вершинами степени k. Для этого мы для каждой особой вершины a рассматриваем k-разделяющее множество, содержащее a и одну из смежных с a вершин, отделяющее наименьшую возможную компоненту. В работе [17] доказано, что наименьшая компонента содержит не более $\frac{k-1}{2}$, то есть в нашем случае не более трех вершин. Таким образом, доказательство нужного нам утверждения сводится к разбору конечного числа случаев: исследуются возможные варианты отделяемой компоненты и в каждом из случаев находятся вершины степени k, смежные с большим числом вершин той же степени.

В этой статье используется терминология и некоторые из результатов статьи [16], которые приводятся ниже.

Определение 10. *Будем говорить, что разделяющее множество T отделяет некоторый подграф B графа G, если подграф B представляется в виде объединения не менее чем одной, но не всех, компонент связности графа $G - T$. Также в этом случае мы будем говорить, что множество T отделяет множество вершин $V(B)$.*

В дальнейшем, для удобства изложения, вместо “компонента связности” будем говорить просто “компонента”.

Лемма 1 (см. [16])**.** *Пусть k-разделяющее множество R отделяет от k-связного графа G компоненту G_1. Тогда каждая из вершин множества R смежна хотя бы с одной из вершин компоненты G_1.*

Определение 11. *Будем говорить, что разделяющее множество R графа G разделяет набор вершин X, если существуют вершины $u, v \in X \setminus R$, принадлежащие разным компонентам графа $G - R$.*

Также нам понадобятся следующие леммы, доказанные в работе [17].

Лемма 2 (см. [17, лемма 3])**.** *Пусть G – минимальный k-связный граф и $x, y \in V(G)$ – смежные вершины. Тогда, если $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$, то степени всех вершин, входящих в $N_G(y) \setminus \{x\}$, равны k.*

Лемма 3 (см. [17, лемма 4]). *Пусть G – минимальный k-связный граф. Предположим, что k-разделяющее множество T, содержащее смежные вершины x и y, отделяет множество, состоящее из не более чем двух вершин. Тогда вершина x смежна хотя бы с одной вершиной степени k.*

Лемма 4 (см. [17, лемма 5]). *Пусть G – минимальный относительно стягивания k-связный граф и $|G| \geq 2k$. Степень вершины $a \in V(G)$ равна k. Тогда существует k-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, содержащую не более $\frac{k-1}{2}$ вершин.*

Для разбора случаев малого числа вершин нам также понадобится следующая лемма, доказанная в работе [9].

Лемма 5. *Пусть G – минимальный k-связный граф. Тогда $|V_k(G)| \geqslant \Delta(G)$.*

2. Леммы о разделяющих множествах и окрестностях

Лемма 6. *Пусть G – k-связный граф, T – k-разделяющее множество в G, H – произвольная компонента связности $G-T$. Тогда для любого $S \subset T$ верно либо $|S| \leq |N_G(S) \cap V(H)|$, либо $V(H) \subset N_G(S)$.*

Доказательство. Предположим противное. Заметим, что тогда множество $(T \setminus S) \cup (N_G(S) \cap V(H))$ содержит менее k вершин и отделяет непустую компоненту $H - (N_G(S) \cap V(H))$. Полученное противоречие с k-связностью графа G доказывает лемму. □

Лемма 7. *Пусть G – минимальный k-связный граф и $x, y \in V(G)$ – несмежные вершины, такие, что $N_G(y) \subset N_G(x)$. Тогда ни одна из вершин, входящих в $N_G(x) \setminus N_G(y)$, не смежна ни с одной вершиной степени большей k из множества $N_G(y)$.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно выполняется, если $d(x) = k$ или если все вершины множества $N_G(y)$ имеют степень k. Предположим, что $d(x) > k$ и существует вершина z, такая, что $z \in N_G(y)$ и $d(z) > k$. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество T в графе $G - (x, z)$. Обозначим через H_x и H_z компоненты связности графа $G - (x, z) - T$, содержащие вершины x и z соответственно. Заметим, что $d(z) > k$, следовательно, $V(H_z - z) \neq \varnothing$. Тогда $T' = T \cup \{z\}$ – k-разделяющее множество в G, отделяющее подграф $H_z - z$.

Докажем, что $y \notin T$. Действительно, в противном случае $N_G(y) \subset N_G(x) \subset V(H_x) \cup T \cup \{z\}$, то есть вершина $y \in T'$ не может быть смежна ни с одной из вершин подграфа $H_z - z$, отделяемого множеством T'. Противоречие с леммой 1.

Итак, $y \notin T$. Тогда $y \in V(H_z)$, поскольку вершины y и z смежны. Следовательно, так как вершины x и y лежат в разных компонентах графа $G - (x,z) - T$ и $N_G(y) \subset N_G(x)$, мы получаем, что $T = N_G(y) \setminus \{z\}$. Значит, $N_G(x) \setminus N_G(y) \subset V(H_x)$ и вершины из множества $N_G(x) \setminus N_G(y)$ не смежны с z, лежащей в H_y. Таким образом, утверждение леммы выполнено, поскольку z – произвольная вершина степени больше, чем k, из $N_G(y)$. □

Лемма 8. *Пусть G – минимальный k-связный граф, T – k-разделяющее множество, отделяющее от графа G полный подграф F на трех вершинах, и две из этих трех вершин имеют степени больше k. Тогда третья вершина подграфа F и все вершины множества T имеют степени k.*

Доказательство. Обозначим вершины подграфа F через x, y и z и предположим, что $d(x) > k$ и $d(y) > k$. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S графа $G - (x,y)$ и обозначим компоненты графа $G - (x,y) - S$, содержащие вершины x и y, через H_x и H_y соответственно.

Очевидно, что $N_G(x) \cap N_G(y) \subset S$. Кроме того, $N_G(x) \subset \{y,z\} \cup T$ и $N_G(y) \subset \{x,z\} \cup T$, причем $|\{y,z\} \cup T| = |\{x,z\} \cup T| = k+2$. Следовательно, множество T содержит не более одной вершины, не смежной с y, и не более одной вершины, не смежной с x. Тогда множество S должно содержать вершину z и не менее $k-2$ вершин множества T. Но поскольку $|S| = k-1$, это означает, что T содержит ровно одну вершину x_1, смежную с x и не смежную с y, и ровно одну вершину y_1, смежную с y и не смежную с x. Все остальные вершины множества T, а также вершина z, смежны и с x, и с y. Применяя теорему 1 к циклу образованному вершинами x, y и вершиной, смежной с ними обеими, получаем, что степень последней равна k. Таким образом, степени вершины z и всех вершин множества T, кроме может быть вершин x_1 и y_1, равны k.

Осталось доказать, что $d(x_1) = d(y_1) = k$. Докажем, что $d(x_1) = k$, для y_1 доказательство аналогично. Заметим, что $x_1 \in V(H_x)$ и $y_1 \in V(H_y)$. То есть компонента H_x содержит вершины x и x_1 и не содержит других вершин из $T \cup \{x,y,z\}$. Тогда, поскольку $|H_x| > 1$,

множество $S \cup \{x\}$ является k-разделяющим и отделяет от G подграф $H_x - x$, содержащий единственную вершину из множества $T \cup \{x, y, z\}$ – вершину x_1. При этом в множестве $S \cup \{x\}$ есть 2 вершины (а именно x и z), смежные только с вершинами множества $T \cup \{x, y, z\}$. Применяя к k-разделяющему множеству $S \cup \{x\}$ и его подмножеству $\{x, z\}$ лемму 6 получаем, что подграф $H_x - x$ должен содержать ровно 1 вершину, то есть $d(x_1) = k$. □

3. Особые вершины

Определение 12. *Вершину k-связного графа мы будем называть особой, если ее степень равна k, а степени всех смежных с ней вершин больше k.*

Лемма 9. *Пусть G – минимальный k-связный граф; T – k-разделяющее множество, отделяющее от G полный подграф H на трех вершинах; $a \in T$ – особая вершина и $t \in T$ – вершина смежная с a. Тогда, выполняются следующие утверждения:*

(1) *в множестве $V(H)$ есть ровно одна вершина степени больше k;*

(2) *a – единственная особая вершина в множестве $V(H) \cup T$;*

(3) *t – единственная вершина степени больше k в множестве T.*

Доказательство. Поскольку a – особая вершина и t смежна с a, имеем $d(t) > k$. Кроме того, по лемме 8 вершина a смежна с одной из вершин подграфа H, следовательно, в множестве $V(H)$ есть вершина степени больше k. Обозначим вершины подграфа H через x, y и z. Если хотя бы две из этих вершин имеют степени больше k, то по лемме 8 степени всех вершин множества T равны k, что невозможно поскольку $d(t) > k$. Следовательно, такая вершина ровно одна и утверждение (1) доказано.

Не умаляя общности можно считать, что $d(z) > k$ и $d(x) = d(y) = k$. Тогда вершина a смежна с z и не смежна с x и y. Заметим, что если $|(N_G(x) \cup N_G(y)) \cap T| = k - 2$ (очевидно, что меньше вершин в этом пересечении быть не может), то $|N_G(\{x, y\})| = k - 1$, что противоречит k-связности графа G. Следовательно, все вершины множества T, за исключением a, смежны хотя бы с одной из вершин x и y. В частности это означает, что любая вершина множества $V(H) \cup T$, кроме a, смежна с вершиной степени k, откуда следует утверждение (2).

Осталось доказать утверждение (3). Оно очевидно выполнено в случае, если $N_G(x) \subset N_G(z) \cup \{z\}$, так как тогда по лемме 2 все вер-

шины, смежные и с x, и с z имеют степень k. Аналогично, утверждение (3) выполнено в случае, если $N_G(y) \subset N_G(z) \cup \{z\}$.

Теперь предположим, что не выполнено ни $N_G(x) \subset N_G(z) \cup \{z\}$, ни $N_G(y) \subset N_G(z) \cup \{z\}$. Поскольку $d(z) > k$, в множестве T может быть только одна вершина, не смежная с z. По нашему предположению она должна быть смежна и с x, и с y. Обозначим эту вершину p. Рассмотрим произвольную вершину $w \in T$, смежную с z, и докажем, что ее степень равна k. Предположим противное: пусть $d(w) > k$. Не умаляя общности предположим, что w смежна с x. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (z, w)$ и обозначим компоненты графа $G - (z, w) - S$, содержащие z и w, через H_z и H_w соответственно. Очевидно, что $x \in S$. Заметим также, что $V(H_z) \setminus \{z\} \neq \varnothing$ и $V(H_w) \setminus \{w\} \neq \varnothing$, поскольку $d(z) \geq k+1$ и $d(w) \geq k+1$. Тогда k-разделяющее множество $S \cup \{w\}$ отделяет от G подграф $H_w - w$. По лемме 1 в этом подграфе должна быть вершина, смежная с x, но она должна быть не смежна с z. Следовательно, $p \in V(H_w)$. Более того, $V(H_w) \cap T = \{w, p\}$, поскольку все вершины множества T, кроме p, смежны с z.

Таким образом, вершины p и z, смежные с y, лежат в разных компонентах графа $G - (z, w) - S$. Следовательно, $y \in S$. Тогда

$$N_G\big(\{x, y\}\big) \cap V(H_w - w) = (T \cup \{z\}) \cap V(H_w - w) = \{p\}.$$

Применяя лемму 6 к k-разделяющему множеству $S \cup \{w\}$ и его подмножеству $\{x, y\}$ получаем, что $V(H_w - w) = \{p\}$. (Результаты приведенных выше рассуждений изображены на рис. 1.)

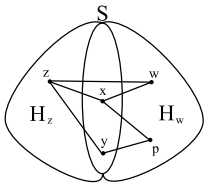

Рис. 1. Расположение вершин относительно множества S.

Тогда $d(p) = k$ и вершина p смежна со всеми вершинами множества S. Поскольку вершина a особая, мы получаем, что a не смежна с p и $a \notin S$, но тогда a не смежна и с w. Итак, вершина степени больше k, смежная с z, не может быть смежна с a. Следовательно, вершина t не

смежна с z, то есть $t = p$, что невозможно поскольку $d(t) \neq d(p)$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3). □

Лемма 10. *Пусть G – минимальный k-связный граф; T – k-разделяющее множество, отделяющее от G подграф H, являющийся путем на трех вершинах; $a \in T$ – особая вершина и $t \in T$ – вершина смежная с a. Тогда, выполняются следующие утверждения:*

(1) *в множестве $V(H)$ есть ровно одна вершина степени больше k, причем эта вершина смежна с обеими оставшимися вершинами подграфа H;*

(2) *a – единственная особая вершина в множестве $V(H) \cup T$;*

(3) *t – единственная вершина степени больше k в множестве T.*

Доказательство. По условию подграф H является путем на трех вершинах. Обозначим концы этого пути через x и y, а оставшуюся вершину пути – через z. Поскольку a – особая вершина и t смежна с a, имеем $d(t) > k$. Далее заметим, что в множестве $V(H)$ есть вершина степени k. Действительно, в противном случае вершины x и y смежны со всеми вершинами множества T, и в частности, с вершиной t, но тогда в цикле $xzyt$ нет вершин степени k, что противоречит теореме 1. С другой стороны, по лемме 1 вершина a смежна с одной из вершин подграфа H, следовательно, в множестве $V(H)$ есть также вершина степени больше k.

Докажем сначала, что $d(x) = d(y)$. Действительно, в противном случае не умаляя общности мы можем считать, что $d(x) > k$ и $d(y) = k$. Тогда $N_G(x) = T \cup \{z\}$ и $N_G(y) = (T \setminus \{a\}) \cup \{z\}$, то есть вершины x и y удовлетворяют условию леммы 7 и $a \in N_G(x) \setminus N_G(y)$. Поскольку вершина a смежна с вершиной $t \in N_G(y)$, по лемме 7 получаем $d(t) = k$, что невозможно.

Далее докажем, что $d(x) = d(y) = k$ и $d(z) > k$. Предположим противное: пусть $d(z) = k$ и $d(x) = d(y) = k + 1$. В этом случае $N_G(x) = N_G(y) = T \cup \{z\}$, следовательно, $t \in N_G(x)$. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (x, t)$. Компоненты графа $G - (x, t) - S$, содержащие x и t, обозначим через H_x и H_t соответственно. Заметим, что $V(H_x) \setminus \{x\} \neq \varnothing$ и $V(H_t) \setminus \{t\} \neq \varnothing$, поскольку $d(x) \geq k+1$ и $d(t) \geq k+1$. Следовательно, множества $S \cup \{x\}$ и $S \cup \{t\}$ являются k-разделяющими в графе G. Заметим также, что $y \notin H_t$, поскольку в противном случае

$$T \cup \{z\} = N_G(x) \cap N_G(y) \subset S \cup \{t\},$$

что невозможно так как $|T \cup \{z\}| > |S \cup \{t\}|$. То есть $y \in V(H_x) \cup S$. С другой стороны, вершина y смежна с t и, следовательно, $y \in V(H_t) \cup S$. Таким образом, получаем $y \in S$. Заметим также, что $V(H_t) \cap T = \{t\}$, поскольку $T \subset N_G(x)$. Но тогда k-разделяющее множество $S \cup \{x\}$, отделяющее от G подграф H_t, содержит две вершины (x и y) смежные только с одной вершиной подграфа H_t. Следовательно, по лемме 6 получаем $V(H_t) = \{t\}$, что противоречит утверждению $d(t) > k$.

Итак, $d(x) = d(y) = k$ и $d(z) > k$. Тогда вершина a смежна с z и не смежна с x и y. Следовательно, $N_G(x) = N_G(y) = (T \setminus \{a\}) \cup \{z\}$. То есть вершины множества T, отличные от a, смежны с вершинами x и y, имеющими степень k, и поэтому не могут быть особыми. Таким образом, мы доказали утверждения (1) и (2) данной леммы.

Докажем утверждение (3). Рассмотрим произвольную вершину $w \in T$, смежную с z, и докажем, что ее степень равна k. Этого будет достаточно, поскольку в множестве T может быть максимум одна вершина, не смежная с z. Предположим противное: пусть $d(w) > k$. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (z, w)$ и обозначим компоненты графа $G - (z, w) - S$, содержащие z и w, через H_z и H_w соответственно. Заметим, что вершины x и y смежны и с z, и с w, следовательно, $x, y \in S$. Кроме того, $|H_w| > 1$, поскольку $d(w) > k$. В подграфе H_w может быть не более двух вершин множества T: вершина w и единственная вершина множества T, не смежная с z. Таким образом, в подграфе $H_w - w$, отделяемом k-разделяющим множеством $S \cup \{w\}$, может быть не больше одной вершины, смежной с x или y. Применяя лемму 6 к множеству $S \cup \{w\}$ и его подмножеству $\{x, y\}$ получаем, что подграф $H_w - w$ состоит только из одной вершины. Обозначим эту вершину p. (Результаты приведенных выше рассуждений изображены на рис. 2.)

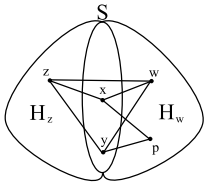

Рис. 2. Расположение вершин относительно множества S.

Очевидно, что $d(p) = k$, вершина p не смежна с z и вершина p

смежна со всеми вершинами множества $S \cup \{w\}$. Поскольку вершина a особая, a не смежна с p, следовательно, $a \notin S$. Но тогда a не смежна и с w. Итак, вершина степени больше k, смежная с z, не может быть смежна с a. Следовательно, вершина t не смежна с z, то есть $t = p$, что невозможно поскольку $d(t) \neq d(p)$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3). □

4. Основной результат

Лемма 11. *Пусть G – минимальный и минимальный относительно стягивания k-связный граф, где $k \in \{7, 8\}$ и $|G| \geqslant 2k$. Тогда количество особых вершин графа G не превосходит количества вершин степени k, смежных как минимум с двумя вершинами степени k.*

Доказательство. Рассмотрим особую вершину a графа G. По лемме 4 существует k-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин (назовем ее t), которое отделяет компоненту H, содержащую не более $\frac{k-1}{2}$ вершин. Тогда $|H| \leqslant 3$. С другой стороны, из леммы 3 следует, что $|H| > 2$. Таким образом, $|H| = 3$. Связный подграф на трех вершинах может быть либо полным графом, либо путем, следовательно, выполнено условие одной из лемм: 9 или 10. Тогда ровно одна из вершин множества $V(H)$ имеет степень больше чем k (назовем эту вершину z), эта вершина смежна с двумя оставшимися вершинами множества $V(H)$ (назовем их x и y), вершина t – единственная вершина степени больше k в множестве T, а a – единственная особая вершина в множестве $V(H) \cup T$. Заметим, что вершина a смежна с z, а каждая из вершин x и y смежна как минимум с $k-2$ вершинами степени k (среди смежных с ними вершин степень больше k могут иметь только вершины z и t).

Поставим в соответствие вершине a тройку вершин $\{x, y, z\}$. Аналогично поступим со всеми остальными особыми вершинами графа G. Тогда каждой особой вершине будут соответствовать две вершины степени k, каждая из которых смежна как минимум с двумя вершинами степени k, и нам осталось доказать, что каждая такая вершина соответствует не более чем двум особым. Докажем это для вершины x, для остальных вершин доказательство аналогично.

Заметим сначала, что вершина z не может соответствовать другим особым вершинам (кроме a). Это очевидно, поскольку a – единственная особая вершина в множестве $V(H) \cup T$, следовательно, никакая другая особая вершина не может быть смежна с z. Аналогично, лю-

бая другая вершина степени больше k может соответствовать не более, чем одной особой вершине. Но вершина x может быть смежна максимум с двумя вершинами степени больше k – вершинами z и t. Следовательно, вершина x соответствует не более чем двум особым вершинам. □

Теорема 4. *Пусть G – минимальный и минимальный относительно стягивания k-связный граф, где $k \in \{7, 8\}$. Тогда $|V_k(G)| > \frac{1}{2}|G|$.*

Доказательство. При $|G| < 2k$ утверждение теоремы очевидно следует из леммы 5 и того факта, что $\Delta(G) \geq k$. Таким образом, нам достаточно рассмотреть случай $|G| \geq 2k$.

Разобьем множество ребер, инцидентных вершинам из $V_{>k}(G)$, на два подмножества:

$E_{>k}(G)$ – ребра, инцидентные двум вершинам из $V_{>k}(G)$;

$E_k(G)$ – ребра, инцидентные одной вершине из $V_{>k}(G)$.

Из теоремы 1 следует, что $G(V_{>k}(G))$ является лесом. Следовательно, ребер, инцидентных двум вершинам из $V_{>k}(G)$, не более $|V_{>k}(G)| - 1$. Заметим, что

$$\sum_{v \in V_{>k}(G)} d(v) = 2|E_{>k}(G)| + |E_k(G)|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |E_k(G)| &= \sum_{v \in V_{>k}(G)} d(v) - 2|E_{>k}(G)| \geq \sum_{v \in V_{>k}(G)} d(v) - 2(|V_{>k}(G)| - 1) \\ &\geq (k+1)|V_{>k}(G)| - 2(|V_{>k}(G)| - 1) > (k-1)|V_{>k}(G)|. \end{aligned}$$

Обозначим через S_0 множество всех особых вершин графа G, через S_1 – множество вершин степени k, смежных ровно с одной вершиной степени k, и через S_2 – множество вершин степени k, смежных хотя бы с двумя вершинами степени k. Из леммы 11 следует, что $|S_2| \geq |S_0|$. Любой вершине из S_1 инцидентно ровно $k-1$ ребро из $E_k(G)$, любой вершине из S_2 инцидентно не более $k-2$ ребер из $E_k(G)$ и любой вершине из S_0 – ровно k. Таким образом, вершинам из $V_k(G)$ инцидентно не более $k|S_0| + (k-1)|S_1| + (k-2)|S_2|$ ребер из $E_k(G)$. Следовательно, вершинам из $V_k(G)$ инцидентно не более $(k-1)|V_k(G)|$

ребер из $E_k(G)$, поскольку

$$\begin{aligned}(k-1)|S_1| + (k-2)|S_2| + k|S_0| \\ \leq (k-1)|S_1| + (k-2)|S_2| + k|S_0| + (|S_2| - |S_0|) \\ = (k-1)(|S_1| + |S_2| + |S_0|) = (k-1)|V_k(G)|.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(k-1)|V_{>k}(G)| < |E_k(G)| \leq (k-1)|V_k(G)|$$

и, следовательно, $|V_{>k}(G)| < |V_k(G)|$, откуда немедленно следует утверждение теоремы. □

Литература

1. K. Ando, *A Local structure theorem on 5-connected graphs.* — J. Graph Theory **60** (2009), 99–129.
2. K. Ando, A. Kaneko, K. Kawarabayashi, *Vertices of degree 6 in a contraction critically 6-connected graphs.* — Discrete Mathematics **273** (2003), 55–69.
3. Y. Egawa, *Contractible edges in n-connected graphs with minimum degree greater than or equal to* $\frac{5n}{4}$. — Graphs Combin. **7** (1991), 15–21.
4. R. Halin, *A theorem on n-connected graphs.* — J. Comb. Theory **7** (1969), 150–154.
5. R. Halin, *On the structure of n-connected graphs.* — In: Recent Progress in Combinatorics (ed: W. T. Tutte), Academic Press, London–New York (1969), pp. 91–102.
6. M. Fontet, *Graphes 4-essentiels.* — C. R. Acad. Se. Paris, Ser. A **287** (1978), 289–290.
7. M. Kriesell, *A degree sum condition for the existence of a contractible edge in a k-connected graph.* — J. Combin. Theory, Ser.B **82** (1) (2001), 81–101.
8. N. Martinov, *A recursive characterization of the 4-connected graphs.* — Discrete Mathematics **84** (1990), 105–108.
9. W. Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* — Arch. Math. (Basel), (German) **23** (1972), 219–224.
10. C. Qin, X. Yuan, J. Su, *Some properties of contraction-critical 5-connected graphs.* — Discrete Mathematics **308** (2008), 5742–5756.
11. C. Qin, X. Yuan, J. Su, *Triangles in contraction critical 5-connected graphs.* — Australas. J. Combin. **33** (2005) 139–146.
12. C. Thomassen, *Nonseparating cycles in k-connected graphs.* — J. Graph Theory **5** (1981), 351–354.
13. W. T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
14. X. Yuan, J. Su, *Contractible edges in 7-connected graphs.* — Graphs and Combinatorics **21** (2005), 445–457.
15. M. Li, X. Yuan, J. Su, *The number of vertices of degree 7 in a contraction-critical 7-connected graph.* — Discrete Mathematics **308** (2008), 6262–6268.

16. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
17. С. А. Образцова, *О локальной структуре 5 и 6-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 88–96.

Obraztsova S. A., Pastor A. V. Local structure of 7 and 8-connected graphs.

We show, that if graph on n vertices is mimimally and contraction critically k-connected, then it has at least $n/2$ vertices of degree k for $k = 7, 8$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: svetlana.obraztsova@gmail.com
pastor@pdmi.ras.ru

Поступило 25 сентября 2010 г.