Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 381, 2010 г.

С. А. Образцова

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ 5 И 6-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

1. Введение

Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Степень вершины v обозначается $d(v)$. Подграф, индуцированный множеством вершин A, – $G(A)$. Количество вершин графа G мы будем обозначать $|G|$. Кроме того, обозначим $V_k(G)$ множество вершин степени k графа G и $V_{>k}(G)$ – множество вершин графа G, степени которых больше, чем k.

Определение 1. *Если $A \subset V(G)$, то через $G - A$ обозначается граф, полученый из G удалением вершин множества A и инциндентных им ребер.*

Определение 2. *Если $B \subset E(G)$, то через $G - B$ обозначается граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$.*

Определение 3. *Вершинной связностью графа G (обозначаемой $\kappa(G)$) называется мощность наименьшего подмножества множества вершин графа G такого, что при его удалении G становится несвязным или тривиальным (то есть состоящим из одной вершины). При этом, граф G называется k-связным, если $\kappa(G) \geq k$.*

Заметим, что если граф G – k-связный, то $d(v) \geq k$ для всех вершин графа G.

Определение 4. *Граф называется минимальным, если при удалении любого ребра понижается его связность.*

Ключевые слова: k-связность, минимальность, минимальность по стягиванию.

Исследования частично поддержаны грантами РФФИ 09-01-12137-офи-м, президентским грантом поддержки ведущих научных школ НШ-5282.2010.1 и A*STAR SINGA Scholarship in School of Physical and Mathematical Sciences, NTU, Singapore

Определение 5. *Пусть граф G – k-связный. Ребро называется нестягиваемым, если при его стягивании граф не сохраняет k-связность.*

Заметим, что если ребро (x, y) – нестягиваемо, то существует k-разделяющее множество содержащее одновременно вершины x и y.

Определение 6. *Граф называется минимальным относительно стягивания ребер, если все его ребра нестягиваемы.*

Интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после работы В. Татта [2], в которой было дано полное описание структуры 3-связного графа в терминах удаления и стягивания ребер. Вопрос о том, какова структура минимального и минимального по стягиванию k-связного для k больших 3 был рассмотрен в статье Р. Халина [1]. В этой же статье был задан вопрос о том, какова константа c, такая что количество вершин степени k в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе равно по крайней мере $c|G|$. В дальнейшем исследовались в основном k-связные графы обладающие только одним из двух свойств – минимальностью или минимальностью по стягиванию. Наибольшее продвижение в первом из этих направлений было получено В. Мадером в статье [5].

Теорема 1 (см. [5])**.** *Пусть G – минимальный k-связный граф и C – множество вершин произвольного цикла в G. Тогда $C \cap V_k(G) \neq \varnothing$.*

Следствие 1 (см. [5])**.** *Пусть G – минимальный k-связный граф. Тогда $|V_k(G)| \geq \frac{k-1}{2k-1}|G|$.*

Общих результатов во втором направлении получено не было, но существуют продвижения в изучении 4, 5, 6 и 7-связных графов. Случай 4-связных графов полностью описан в работах М. Фонте [3] и Н. Мартинова [4], для 4-связных графов также получено, что из минимальности по стягиванию следует минимальность и доказано, что $c = 1$, то есть все вершины такого графа имеют степень 4. Для графов более высокой связности существуют примеры минимальных по стягиванию, но не минимальных графов, и, таким образом, рассмотрение графов, обладающих обоими свойствами, становится содержательным. Структура минимальных по стягиванию 5-связных графов наиболее подробно изучена в серии статей К. Андо и др., завершающейся статьей [6].

Теорема 2 (см. [6]). *В 5-связном, минимальном относительно стягивания графе любая вершина смежна по крайней мере с двумя вершинами из множества $V_5(G)$.*

В изучении графов связности выше 7 существенных продвижений получено не было. В нашей статье доказываются оценки снизу на долю количества вершин степени 5 и 6 в минимальных и минимальных по стягиванию 5 и 6-связных графах соответственно (а именно $4/7$ для 5-связных графов и $1/2$ для 6-связных).

В этой статье используется терминология и некоторые из результатов статей [6] и [7], которые приводятся ниже.

Определение 7. *Пусть A – подмножество множества вершин графа G. Тогда назовем окрестностью и обозначим через $N_G(A)$ подмножество множества вершин графа G, состоящее из всех тех вершин, которые смежны хотя бы с одной вершиной из A и не лежат в A.*

Определение 8. *Пусть A – подграф графа G. Тогда через $\overline{A}$ обозначим подграф $G(V(G) \setminus (V(A) \cup N_G(A)))$ графа G.*

Другими словами $\overline{A}$ – это индуцированный подграф графа G на множестве вершин графа G, не входящих в A и не смежных с вершинами из A.

Определение 9. *Разделяющее множество – это множество вершин, при удалении которых теряется связность графа. Соответственно, k-разделяющее множество – это разделяющее множество, состоящее из k вершин.*

Определение 10. *Будем говорить, что разделяющее множество T отделяет некоторый подграф B графа G, если подграф B представляется в виде объединения не менее чем одной, но не всех, компонент связности, получающихся после удаления разделяющего множества T.*

В дальнейшем, для удобства изложения, вместо “компонента связности” будем говорить просто “компонента”.

Лемма 1 (см. [7]). *Пусть k-разделяющее множество R отделяет от k-связного графа G компоненту G_1. Тогда каждая из вершин множества R смежна с одной из вершин компоненты G_1.*

Определение 11. *Будем говорить, что разделяющее множество R графа G разделяет набор вершин X, если при удалении множества R не все неудаленные вершины набора X окажутся в одной компоненте связности.*

Определение 12. *Назовем разделяющие множества R и T графа G независимыми, если R не разделяет T, и T не разделяет R. В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.*

Лемма 2 (см. [7])**.** *Пусть k-разделяющие множества R, T таковы, что R не разделяет T. Тогда T не разделяет R (то есть эти множества независимы).*

2. Доказательство основного результата

Лемма 3. *Пусть G – минимальный k-связный граф, $x, y \in V(G)$ – смежные вершины. Тогда если $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$, то степени всех вершин, входящих в $N_G(y) \setminus \{x\}$, равны k.*

Доказательство. Заметим, что множество

$$N_G(\{x, y\}) = N_G(\{x\}) \setminus \{y\}$$

должно ввиду k-связности графа состоять хотя бы из k вершин, поэтому $d(x) > k$. Предположим, что утверждение леммы не выполняется. Следовательно, существует вершина, смежная с x и y, степень которой больше k. Обозначим эту вершину z. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество в графе $G - \{(x, z)\}$ и обозначим его T. Обозначим H_x и H_z компоненты $G - \{(x, z)\} - T$, содержащие x и z соответственно (заметим, что H_x и H_z – различны, иначе T будет $(k-1)$-разделяющим множеством в k-связном графе G).

Очевидно, $y \in T$. С другой стороны, $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\} \subset V(H_x) \cup T$. Кроме того, $d(x) > k$ и $d(z) > k$ и, следовательно, $V(H_x) \setminus \{x\} \neq \varnothing$ и $V(H_z) \setminus \{z\} \neq \varnothing$. Следовательно, $T \cup \{z\}$ – k-разделяющее множество в G. Таким образом, в G есть k-разделяющее множество, содержащее вершину (а именно – y), смежную с вершинами только в одной компоненте связности графа $G - (T \cup \{z\})$ (y не смежна ни с одной вершиной в $H_z - z$, поскольку $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$ и, следовательно, вершины из $N_G(y)$ не могут быть отделены от x). Полученное противоречие с леммой 1 доказывает лемму. □

Лемма 4. *Пусть G – минимальный k-связный граф. Предположим, что k-разделяющее множество T, содержащее смежные вершины x и y, отделяет множество, состоящее из не более чем двух вершин. Тогда x смежна с вершиной степени k.*

Доказательство. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно рассмотреть две возможности – когда отделяется множество

из одной вершины или множество из двух смежных вершин (случаи (1) и (2) соответственно).

(1) Заметим, что если множество T отделяет одну вершину, то эта вершина степени k, которая смежна со всеми вершинами, входящими в T. Таким образом, утверждение леммы выполняется.

(2) Предположим, что T отделяет множество, состоящее из двух смежных вершин a и b. В этом случае либо для вершин a и b выполняются условия леммы 3, либо их степени равны k и по крайней мере одна из них смежна с x, и, таким образом, утверждение леммы выполняется. Таким образом остается рассмотреть только первую из этих двух возможностей. Если степени обеих вершин равны $k+1$, то они смежны со всеми вершинами k-разделяющего множества T и, следовательно, по лемме 3, примененной к вершинам a и b, степени всех вершин множества T равны k. В том числе и вершины y, лежащей в T и смежной с x по условию леммы. Если только одна из вершин, отделяемых T, имеет степень $k+1$ (не умаляя общности можем считать, что a), то b должна быть смежна либо с x, либо с y. В первом случае вершиной степени k, смежной с x, является b, во втором случае – по лемме 3, примененной к вершинам a и b, степень k имеет вершина y.

Лемма 5. *Пусть G – минимальный относительно стягивания k-связный граф и $|G| \geq 2k$. Рассмотрим произвольную вершину графа G и обозначим ее a. Тогда существует k-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, отделяющее компоненту, содержащую не более $\frac{k-1}{2}$ вершин.*

Доказательство. Рассмотрим k-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну вершину из $N_G(a)$, отделяющее компоненту с наименьшим числом вершин. Обозначим эту компоненту H. Заметим, что $V(H) \cap N_G(a) \neq \varnothing$, обозначим через a_1 произвольную из вершин множества $V(H) \cap N_G(a)$. Рассмотрим k-разделяющее множество S, содержащее вершины a и a_1, которое существует, поскольку G – минимальный относительно стягивания k-связный граф. Заметим, что множества T и S не могут быть независимы, поскольку иначе S отделяет компоненту, вершины которой являются собственным подмножеством $V(H)$, что противоречит минимальности H. Таким образом, множества T и S зависимы, то есть $V(H) \cap S \neq \varnothing$, $V(\overline{H}) \cap S \neq \varnothing$. Заметим, что все компоненты $G - S$ пересекаются с T. Обозначим

произвольную компоненту $G - S$ через N. Введем также следующие обозначения: через $P_{T,H}$ будем обозначать пересечение указанных в нижних индексах разделяющего множества и множества вершин подграфа (в данном случае записано $P_{T,H} = T \cap V(H)$). Аналогично определяется $P_{T,S} = T \cap S$.

Очевидно, что $P_{T,S}$ содержит a. Заметим, что если подграф $H \cap N$ непуст, то он отделяется разделяющим множеством $P_{S,H} \cup P_{T,S} \cup P_{T,N}$. Следовательно, $|P_{S,H} \cup P_{T,S} \cup P_{T,N}| \geq k+1$, поскольку иначе $|P_{S,H} \cup P_{T,S} \cup P_{T,N}| = k$ и собственное подмножество компоненты H отделяется k-разделяющим множеством, содержащим a и смежную с a вершину a_1, что противоречит минимальности H. Отсюда легко следует, что

$$|P_{S,\overline{H}} \cup P_{T,S} \cup P_{T,\overline{N}}| = 2k - |P_{S,H} \cup P_{T,S} \cup P_{T,N}| < k$$

и, следовательно, $V(\overline{H}) \cap V(\overline{N}) = \varnothing$. Аналогично, если непуст подграф $H \cap \overline{N}$, то $|P_{S,H} \cup P_{T,S} \cup P_{T,\overline{N}}| \geq k+1$ и, следовательно, пуст подграф $\overline{H} \cap N$. Следовательно, пуст по крайней мере один из четырех подграфов $H - S$, $N - T$, $\overline{H} - S$ и $\overline{N} - T$. Заметим, что все они пусты быть не могут, иначе $|G| < 2k$. Предположим, что пуст ровно один из них. Не умаляя общности можно считать, что $V(N) \setminus T = \varnothing$. Тогда, по нашему предположению, непусты подграфы $H \cap \overline{N}$ и $\overline{H} \cap \overline{N}$. Отсюда получаем, что отделяющие эти компоненты множества $P_{S,H} \cup P_{S,T} \cup P_{T,\overline{N}}$ и $P_{S,\overline{H}} \cup P_{S,T} \cup P_{T,\overline{N}}$ содержат по крайней мере k вершин каждое. Таким образом,

$$\begin{aligned} 2k \leq |P_{S,H} \cup P_{S,T} \cup P_{T,\overline{N}}| + |P_{S,\overline{H}} \cup P_{S,T} \cup P_{T,\overline{N}}| \\ = |S| + |P_{S,T}| + 2|P_{T,\overline{N}}|. \end{aligned}$$

Следовательно, $|P_{S,T}| + |P_{T,\overline{N}}| \geq \frac{k+1}{2}$, поскольку $|P_{S,T}| \geq 1$. Значит, $|N| = |P_{T,N}| \leq \frac{k-1}{2}$ и утверждение леммы выполнено для компоненты N и k-разделяющего множества S.

Для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай, когда пусты хотя бы 2 подграфа из $H - S$, $N - T$, $\overline{H} - S$ и $\overline{N} - T$. Другими словами, непуст ровно один из подграфов $H \cap N$, $H \cap \overline{N}$, $\overline{H} \cap N$ и $\overline{H} \cap \overline{N}$. (Заметим, что хотя бы один из этих подграфов непуст, поскольку иначе $|G| < 2k$. С другой стороны, если среди этих подграфов непусты хотя бы два, то среди подграфов $H - S$, $N - T$, $\overline{H} - S$ и $\overline{N} - T$ будет хотя бы три непустых, поскольку каждый из подграфов $H \cap N$, $H \cap \overline{N}$, $\overline{H} \cap N$ и $\overline{H} \cap \overline{N}$ является подграфом ровно

двух графов из $H - S$, $N - T$, $\overline{H} - S$ и $\overline{N} - T$.) Не умаляя общности можно считать, что $V(H \cap N) \neq \varnothing$. Следовательно, отделяющее этот подграф множество $P_{S,H} \cup P_{S,T} \cup P_{T,N}$ содержит по крайней мере k вершин. Следовательно, $|P_{S,\overline{H}} \cup P_{S,T} \cup P_{T,\overline{N}}| \leq k$. Отсюда, используя $|P_{S,T}| \geq 1$, получаем, $|P_{S,\overline{H}}| + |P_{T,\overline{N}}| \leq k - 1$. Следовательно, либо $|\overline{H}| = |P_{S,\overline{H}}| \leq \frac{k-1}{2}$, либо $|\overline{N}| = |P_{T,\overline{N}}| \leq \frac{k-1}{2}$. В этом случае утверждение леммы выполнено. Таким образом, лемма полностью доказана. □

Лемма 6. *Пусть G – 6-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания граф и $|G| \geq 12$. Степень вершины a равна 6. Тогда выполняется $N_G(a) \cap V_6(G) \neq \varnothing$.*

Доказательство. По лемме 5 выполняется следующее утверждение: существует 6-разделяющее множество T, содержащее a и смежную с a вершину, и отделяющее компоненту, содержащую не более 2 вершин. По лемме 4 отсюда следует, что вершина a смежна по крайней мере с одной вершиной степени 6. □

Теорема 3. *Пусть G – 5-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания граф. Тогда $|V_5(G)| > \frac{4}{7}|G|$.*

Доказательство. Разобьем множество ребер, инцидентных вершинам из $V_{>5}(G)$, на два подмножества:

$E_{>5}(G)$ – ребра, инцидентные двум вершинам из $V_{>5}(G)$,

$E_5(G)$ – ребра, инцидентные одной вершине из $V_{>5}(G)$.

Из теоремы 1 следует, что $G(V_{>5}(G))$ является лесом. Следовательно, ребер, инцидентных двум вершинам из $V_{>5}(G)$, не более $|V_{>5}(G)| - 1$. Заметим, что $\sum\limits_{v \in V_{>5}(G)} d(v) = 2|E_{>5}(G)| + |E_5(G)|$. Следовательно,

$$|E_5(G)| = \sum_{v \in V_{>5}(G)} d(v) - 2|E_{>5}(G)| \geq \sum_{v \in V_{>5}(G)} d(v) - 2(|V_{>5}(G)| - 1)$$
$$\geq 6|V_{>5}(G)| - 2(|V_{>5}(G)| - 1) > 4|V_{>5}(G)|.$$

С другой стороны, из теоремы 2 следует, что любой вершине из $V_5(G)$ инцидентно не более 3 ребер из $E_5(G)$. Следовательно,

$$3|V_5(G)| \geq |E_5(G)| > 4|V_{>5}(G)|.$$

Следовательно,

$$7|V_5(G)| = 3|V_5(G)| + 4|V_5(G)| > 4|V_{>5}(G)| + 4|V_5(G)| = 4|G|.$$

Следовательно, $|V_5(G)| > \frac{4}{7}|G|$. □

Теорема 4. *Пусть G – 6-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания, граф. Тогда $V_6(G) > \frac{1}{2}|G|$.*

Доказательсво. Разобьем множество ребер, инцидентных вершинам из $V_{>6}(G)$, на два подмножества:

$E_{>6}(G)$ – ребра, инцидентные двум вершинам из $V_{>6}(G)$,

$E_6(G)$ – ребра, инцидентные одной вершине из $V_{>6}(G)$.

Из теоремы 1 следует, что $G(V_{>6}(G))$ является лесом. Следовательно, ребер, инцидентных двум вершинам из $V_{>6}(G)$, не более $|V_{>6}(G)|-1$. Заметим, что $\sum\limits_{v\in V_{>6}(G)} d(v) = 2|E_{>6}(G)| + |E_6(G)|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|E_6(G)| &= \sum_{v\in V_{>6}(G)} d(v) - 2|E_{>6}(G)| \geq \sum_{v\in V_{>6}(G)} d(v) - 2(V_{>6}(G)| - 1)\\ &\geq 7|V_{>6}(G)| - 2(|V_{>6}(G)| - 1) > 5|V_{>6}(G)|.\end{aligned}$$

С другой стороны, из леммы 6 следует, что любой вершине из $V_6(G)$ инцидентно не более 5 ребер из $E_6(G)$. Следовательно,

$$5|V_6(G)| \geq |E_6(G)| > 5|V_{>6}(G)|.$$

Следовательно,

$$10|V_5(G)| = 5|V_6(G)| + 5|V_6(G)| > 5|V_{>6}(G)| + 5|V_6(G)| = 5|G|.$$

Следовательно, $|V_6(G)| > \frac{1}{2}|G|$. □

Литература

1. R. Halin, *A theorem on n-connected graphs.* — J. Comb. Theory **7** (1969), 150–154.
2. W. T. Tutte, *A theory of 3-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
3. M. Fontet, *Graphes 4-essentiels.* — C. R. Acad. Se. Paris, **287**, serie A (1978), 289–290.
4. N. Martinov, *A recursive characterization of the 4-connected graphs.* — Discrete Math. **84** (1990), 105–108.
5. W. Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* — (German), Arch.Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
6. K. Ando, *A Local structure theorem on 5-connected graphs.* — J. Graph Theory **60** (2009), 99–129.
7. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.

Obraztsova S. A. Local structure of 5 and 6-connected graphs.

We prove, that if graph on n vertices is mimimally and contraction critically 5-connected, then it has $4n/7$ vertices of degree 5. We also prove, that if graph on n vertices is mimimally and contraction critically 6-connected, then it has $n/2$ vertices of degree 6.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: svetlana.obraztsova@gmail.com

Поступило 15 июля 2010 г.