Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 381, 2010 г.

Д. В. Карпов

ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ ВИСЯЧИХ ВЕРШИН

1. Введение. Основные обозначения

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множества вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множества рёбер – через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Для любого ребра $e \in E(G)$ обозначим через $G - e$ граф, полученный из G в результате удаления e. Для множества ребер $F \subset E(G)$ обозначим через $G - F$ граф, полученный из G в результате удаления ребер множества F.

Для любой вершины $x \in V(G)$ обозначим через $G - x$ граф, полученный из G в результате удаления вершины x и всех инцидентных ей ребер. Для любого множества вершин $U \subset V(G)$ обозначим через $G - U$ граф, полученный из G в результате удаления вершин множества U и всех инцидентных им ребер.

Через $d_G(x)$ мы обозначим степень вершины x в графе G. Минимальную степень вершины графа G мы обозначим через $\delta(G)$.

Определение 1. *Для связного графа G обозначим через $t(G)$ отношение максимально возможного количества висячих вершин в остовном дереве графа G к количеству вершин графа.*

С 1981 года опубликовано несколько работ, в которых доказываются оценки снизу на $t(G)$. Так, в 1981 году Сторер [1] предположил, что $t(G) > \frac{1}{4}$ при $\delta(G) \geqslant 3$. Также в 1981 году Линиал высказал более сильную гипотезу: $t(G) > \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1}$ при $\delta(G) \geqslant 3$. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geqslant 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для

Ключевые слова: Остовное дерево, висячие вершины, количество висячих вершин.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ № 09-01-12137-офи_м.

которых $t(G)$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Таким образом, оценка из гипотезы Линиала асимптотически точна в тех случаях, когда она верна.

Для $d = 3$ утверждение гипотезы доказали D. J. Kleitman и D. B. West ([3], 1991), для $d = 4$ и $d = 5$ – J. R. Griggs и M. Wu ([2], 1996). В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин*. С развитием этого метода для $d \geqslant 6$ есть значительные проблемы, поэтому дальнейших результатов на настоящий момент нет. Из работы Алона ([4], 1990) следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым.

Другой подход предложил Н. В. Гравин в работе [5], опубликованной в этом сборнике. Он доказал, что для произвольного связного графа G, в котором v_3 вершин степени 3 и v_4 вершин степени хотя бы 4, существует остовное дерево, в котором хотя бы $\frac{2v_4}{5} + \frac{2v_3}{15}$ висячих вершин. В этой работе наличие вершин степени 1 и 2 не мешает оценке на количество висячих вершин в построенном остовном дереве.

Кажется интуитивно ясным, что вершины степени 1 (то есть, висячие вершины данного связного графа) должны вносить вклад в количество висячих вершин остовного дерева. Интересно, что могут увеличить количество вершин в остовном дереве и вершины степени 2: нетрудно придумать примеры графов, в которых при замене вершины степени 2 на ребро, соединяющее две смежные с ней вершины, уменьшается максимальное количество висячих вершин в остовном дереве.

Определение 2. *Обозначим через $\ell(G)$ количество вершин в максимальной цепочке последовательно соединённых вершин степени 2 в графе G.*

Отметим, что наличие в графе G длинных цепочек из последовательно соединённых вершин степени 2 может сделать величину $t(G)$ сколь угодно близкой к 0: не более чем две вершины из каждой такой цепочки могут быть висячими в остовном дереве графа. Поэтому возникает естественное ограничение на граф: нужно ограничить сверху $\ell(G)$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 1$, G – связный граф с $\ell(G) \leqslant k$. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором более $\frac{1}{2k+4}$ всех вершин являются висячими.*

Серия примеров покажет оптимальность константы $\frac{1}{2k+4}$. В частности, для графов, в которых никакие две вершины степени 2 не смежны (то есть, $k = 1$), мы докажем существование остовного дерева, в котором более $\frac{1}{6}$ всех вершин являются висячими, причём константу $\frac{1}{6}$ нельзя заменить на большую. В работе [6] (2001) автор сделал неверную попытку доказать, что в таком графе существует остовное дерево, в котором более $\frac{1}{5}$ всех вершин – висячие. В настоящей работе результат из [6] исправлен и обобщён.

Отметим, что ограничение $k \geqslant 1$ является существенным. Наш метод не позволяет решить аналогичную задачу для $k = 0$. Вопрос о точной нижней оценке величины $t(G)$ для связного графа G без вершин степени 2 остаётся открытым. По теореме 1 мы имеем $t(G) > \frac{1}{6}$ для связных графов без вершин степени 2. Однако, оценка $\frac{1}{6}$ для этого класса графов вряд ли является точной.

2. Расщепление блоков

Наш метод использует теорию блоков и точек сочленения. Для удобства мы приведем определения основных понятий. Подробнее классические результаты о блоках и точках сочленения изложены в [7] и других книгах.

Определение 3. (1) *Точкой сочленения связного графа G называется любая его вершина, при удалении которой теряется связность. Двусвязным графом называется непустой связный граф без точек сочленения.*

(2) *Блок графа G – это его максимальный по включению двусвязный подграф. Граница блока B – это множество всех входящих в него точек сочеленения графа G (обозначение: $\mathrm{Bound}(B)$). Внутренность блока B – это множество вершин $\mathrm{Int}(B) = V(B) \setminus \mathrm{Bound}(B)$. Вершины из $\mathrm{Int}(B)$ мы будем называть внутренними вершинами блока B.*

Следующая лемма покажет, как мы будем использовать блоки для решения поставленной задачи.

Лемма 1. *Пусть граф G связен, ни одна из вершин множества $W \subset V(G)$ не является точкой сочленения и все эти вершины принадлежат разным блокам. Тогда в графе G существует остовное дерево, множество висячих вершин которого содержит W.*

Доказательство. Очевидно, после удаления внутренней вершины из одного блока графа G остальные блоки остаются двусвязными.

Отсюда следует, что граф $G - W$ связен. Выделим в $G - W$ остовное дерево T. Заметим, что внутренние вершины разных блоков не могут быть смежны, поэтому множество W является независимым. Следовательно, каждая вершина из множества W должна быть смежна хотя бы с одной из вершин множества $V(G) \setminus W$. Значит, все вершины из W можно напрямую "присоединить" к остовному дереву T графа $G - W$. Таким образом мы построим остовное дерево графа G, множество висячих вершин которого содержит W. $\square$

Одна из трудностей заключается в том, что в графе с большим количеством вершин может быть мало блоков. Однако, в этом случае в графе есть большие блоки, которые мы научимся расщеплять на меньшие, удаляя из графа ребра. Мы будем строго контролировать возникновение при этом процессе новых пар смежных вершин степени 2.

Определение 4. *Блок B называется крайним, если он содержит ровно одну точку сочленения (то есть $|\operatorname{Bound}(B)| = 1$).*

Блок называется пустым, если у него нет внутренних вершин (то есть, $\operatorname{Int}(B) = \varnothing$). Иначе блок называется непустым.

Блок B называется большим, если количество его внутренних вершин больше количества его граничных вершин (то есть, $|\operatorname{Int}(B)| > |\operatorname{Bound}(B)|$).

Лемма 2. *Пусть B – большой блок графа G, $v(G) > 2$. Тогда существует непустой набор рёбер $F \subset E(B)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1° *граф $B - F$ связен;*

2° *для любой вершины $x \in \operatorname{Bound}(B)$ выполняется $d_{B-F}(x) \geqslant 2$;*

3° *если вершины $y, z \in \operatorname{Int}(B)$ смежны в $B - F$ и $d_{B-F}(y) = d_{B-F}(z) = 2$, то $d_B(y) = d_B(z) = 2$.*

Доказательство. Предположим, что $v(B) = 2$. Тогда, так как блок B – большой, обе его вершины должны быть внутренними, то есть, $\operatorname{Bound}(B) = 0$. Из связности графа G тогда следует, что $B = G$, противоречие с $v(G) > 2$.

Таким образом, $v(B) > 2$ и ввиду двусвязности графа B мы имеем $d_B(x) \geqslant 2$ для любой вершины $x \in V(B)$. Рассмотрим несколько случаев.

1. *Пусть в блоке B существуют смежные вершины $u, w \in \operatorname{Int}(B)$, причём $d_G(u) = 2$.*

Очевидно, граф $B - uw$ связен, в графе $B - uw$ степени вершин из $\mathrm{Bound}(B)$ такие же, как в B, то есть, не менее двух. Если для набора $F = \{uw\}$ выполняется условие 3°, то этот набор рёбер нам подходит.

Пусть для набора $F = \{uw\}$ не выполняется условие 3°. Тогда в графе $B - uw$ есть пара смежных вершин y, v степени 2 из $\mathrm{Int}(B)$, причём $d_B(y) > 2$. Тогда не умаляя общности можно считать, что $y = w$, причём $d_B(w) = 3$, $d_B(v) = 2$ и $vw \in E(B)$. Рассмотрим набор $F = \{uw, vw\}$. Все вершины из $\mathrm{Bound}(B)$ имеют в графе $B - F$ такую же степень, как и в B, то есть, не менее двух. Новых вершин степени 2 при удалении F, очевидно, не появилось.

Остаётся проверить связность графа $B - F$. Пусть w' – третья вершина графа B, смежная с w. Отметим, что граф $B - w$ связен (ввиду двусвязности B). Тогда вершины из $V(B) \setminus \{w\}$ связаны в $B - F$, а поскольку $ww' \in E(B - F)$, то граф $B - F$ связен. Таким образом, набор рёбер $F = \{uw, vw\}$ нам подходит.

2. *Пусть в блоке B существуют смежные вершины $u, w \in \mathrm{Int}(B)$, но степень каждой входящей в такую пару вершины не менее трёх.* Тогда рассмотрим набор $F = \{uw\}$. Очевидно, граф $B - uw$ связен, в графе $B - uw$ степени вершин из $\mathrm{Bound}(B)$ такие же, как в B, то есть, не менее двух. Пусть $x, y \in \mathrm{Int}(B)$, $xy \in E(B - uw)$. Тогда одна из вершин x и y (пусть это x) отлична от u и w, следовательно, $d_{B-uw}(x) \geqslant 3$. Таким образом, набор рёбер $F = \{uw\}$ нам подходит.

3. *Пусть в блоке B нет смежных вершин из $\mathrm{Int}(B)$.*
Поскольку $|\mathrm{Int}(B)| > |\mathrm{Bound}(B)|$ и $d_B(x) \geqslant 2$ для любой вершины $x \in \mathrm{Int}(B)$, то существует вершина $u \in \mathrm{Bound}(B)$, смежная хотя бы с тремя вершинами из $\mathrm{Int}(B)$. Пусть $w \in \mathrm{Int}(B)$, $uw \in E(B)$. Тогда граф $B - uw$ связен, $d_{B-uw}(y) \geqslant 2$ для любой вершины $y \in \mathrm{Bound}(B)$. Так как никакие две вершины из $\mathrm{Int}(B)$ не смежны в $B - uw$, набор рёбер $F = \{uw\}$ нам подходит. □

Лемма 3. *Пусть G – граф с более чем двумя вершинами. Тогда существует набор рёбер $F \subset E(G)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1° *граф $G - F$ связен;*

2° *у графа $G - F$ нет больших блоков;*

3° *если вершины x и y смежны в $G - F$ и $d_{G-F}(x) = d_{G-F}(y) = 2$, то $d_G(x) = d_G(y) = 2$.*

Доказательство. Пусть B – большой блок графа G. Тогда существует набор рёбер $F_1 \subset E(B)$, удовлетворяющий условиям $1^\circ - 3^\circ$

леммы 2. Так как граф $B - F_1$ связен, то связен и граф $G - F_1$. Пусть $xy \in E(G - F_1)$, $d_{G-F_1}(y) = d_{G-F_1}(x) = 2$ и $d_G(y) > 2$. Тогда вершина y инцидентна ребру из F_1, следовательно, $y \in V(B)$.

Пусть $y \in \mathrm{Bound}(B)$. Тогда по лемме 2 мы имеем $d_{B-F_1}(y) \geqslant 2$ и, так как y – точка сочленения графа G, она смежна хотя бы с одной вершиной из $G - V(B)$. Следовательно, $d_{G-F_1}(y) \geqslant 3$, противоречие.

Значит, $y \in \mathrm{Int}(B)$. Аналогично получаем, что $x \notin \mathrm{Bound}(B)$ и из $xy \in E(G - F_1)$ следует, что $x \in \mathrm{Int}(B)$. Но тогда по лемме 2 мы имеем $d_G(x) = d_G(y) = 2$, противоречие.

Если в графе $G_1 = G - F_1$ есть большие блоки, повторим операцию. Понятно, что через несколько таких операций больших блоков не останется и объединение всех наборов удалённых из графа G рёбер будет искомым набором F. □

3. Построение остовного дерева

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 1. 1. Можно считать, что $v(G) > 2$, иначе утверждение теоремы очевидно. Тогда по лемме 3 существует такой набор рёбер $F \subset E(G)$, что граф $G - F$ связен, у графа $G - F$ нет больших блоков и для любых двух смежных в $G - F$ вершин x и y из $d_{G-F}(x) = d_{G-F}(y) = 2$ следует $d_G(x) = d_G(y) = 2$. Пусть $G_1 = G - F$. Тогда $\ell(G_1) \leqslant \max(k, 1) = k$ вершин (по условию теоремы $k \geqslant 1$). Очевидно, достаточно построить искомое остовное дерево для графа G_1.

Пусть a – точка сочленения графа G_1, входящая в блоки $B_1, \dots, B_m$, где $m \geqslant 3$. Заменим вершину a на цикл $a_1 a_2 \dots a_m$ и соединим вершину a_i с теми же вершинами блока B_i, с которыми была соединена вершина a. В результате точка сочленения заменена на блок с пустой внутренностью. Выполним такие замены для всех точек сочленения, входящих хотя бы в три блока и получим новый граф H, в котором каждая точка сочленения входит ровно в два блока. Отметим, что на каждом шаге мы меняли одну вершину степени более 2 на несколько вершин степени более 2, поэтому $\ell(H) = \ell(G_1) \leqslant k$.

Для каждого непустого блока B графа H существует изоморфный ему непустой блок B_1 графа G_1 с $\mathrm{Int}(B_1) = \mathrm{Int}(B)$. Точки сочленения графа не могут быть висячими вершинами в его остовном дереве. Поэтому для каждого остовного дерева T графа H существует остовное дерево T_1 графа G_1 с теми же висячими вершинами. (Очевидно, висячие вершины дерева T – общие вершины графов H и G_1. Дерево

T_1 легко построить, заменив новые вершины графа H точками сочленения исходного графа G_1.) Так как $v(H) \geqslant v(G_1)$ и $\ell(H) = \ell(G_1)$, достаточно доказать теорему для графа H, в котором нет больших блоков и каждая точка сочленения входит ровно в два блока.

2. Рассмотрим граф $\mathcal{D}$, вершинами которого будут блоки графа H, а два блока смежны, если имеют общую точку сочленения. Так как каждая точка сочленения графа H входит ровно в два блока, граф $\mathcal{D}$ получается из классического дерева блоков и точек сочленения графа H (см. [7] и другие книги) заменой каждой точки сочленения a и двух инцидентных ей рёбер на ребро, соединяющее два блока, в которые входит a. Следовательно, $\mathcal{D}$ – дерево, в котором каждая висячая вершина – крайний блок графа H.

Пусть $\mathcal{V} = V(\mathcal{D})$ – множество всех блоков графа H, $v = |\mathcal{V}|$. *Степенью блока* $B \in \mathcal{V}$ мы будем называть величину $d_{\mathcal{D}}(B) = |\operatorname{Bound}(B)|$ – количество входящих в B точек сочленения. Введём обозначения:

$\mathcal{V}_i$ – множество всех блоков степени i;
$\mathcal{W}_i$ – множество непустых блоков степени i;
$\mathcal{W}$ – множество всех непустых блоков;
$\mathcal{U}_i$ – множество пустых блоков степени i.

Положим $v_i = |\mathcal{V}_i|$, $w_i = |\mathcal{W}_i|$, $w = |\mathcal{W}|$, $u_i = |\mathcal{U}_i|$. Отметим, что $w_i + u_i = v_i$.

Из леммы 1 следует, что существует остовное дерево графа H с w висячими вершинами. Нашей целью будет оценка сверху количества вершин графа H через w. Начнём с двух несложных неравенств. Так как внутренность крайнего блока непуста, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{V}_1$, $\mathcal{U}_1 = \varnothing$. Следовательно, пустые блоки либо входят в $\mathcal{U}_2$, либо имеют степень хотя бы 3, откуда получается неравенство

$$\sum_{i=1}^{v} iu_i \geqslant 3\sum_{i=2}^{v} u_i - u_2 = 3(v-w) - u_2. \tag{1}$$

Просуммировав степени вершин дерева $\mathcal{D}$ и воспользовавшись равенством $e(\mathcal{D}) = v(\mathcal{D}) - 1$, мы получим $v_1 - 2 = \sum\limits_{i=3}^{v}(i-2)v_i$. Отметим, что $\frac{i}{i-2} \leqslant 3$ при $i \geqslant 3$. Поэтому

$$\sum_{i=3}^{v} iv_i \leqslant 3\sum_{i=3}^{v}(i-2)v_i = 3v_1 - 6 = 3w_1 - 6. \tag{2}$$

3. *Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{U}_2$, $\mathcal{Q} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{P}$. Докажем, что блоки из $\mathcal{P}$, содержат ровно по две вершины, а блоки из $\mathcal{Q}$, содержат не менее трёх вершин.*

Если $B \in \mathcal{U}_2$, то блок B содержит две точки сочленения и ни одной внутренней вершины, то есть, $v(B) = 2$.

Пусть $B \in \mathcal{W}_1$. Тогда блок B содержит одну точку сочленения и является непустым, следовательно, $|\operatorname{Int}(B)| \geqslant 1$. Однако, блок B не является большим, следовательно, $|\operatorname{Int}(B)| \leqslant |\operatorname{Bound}(B)| = 1$. Таким образом, $v(B) = 2$.

Пусть $x \in \mathcal{W}_2$. Тогда блок B содержит две точки сочленения и хотя бы одну внутреннюю вершину. Следовательно, $v(B) \geqslant 3$. Остаётся случай, когда $B \in \mathcal{V}_i$, $i \geqslant 3$. Тогда очевидно, что $v(B) \geqslant 3$.

4. Оценим u_2 через количество непустых блоков. Рассмотрим любую максимальную по включению цепочку $\mathcal{L} = B_1 B_2 \dots B_n$ последовательно соединённых в дереве $\mathcal{D}$ блоков из $\mathcal{P}$. По доказанному выше, $v(B_i) = 2$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку блоки из $\mathcal{W}_1$ – висячие в дереве $\mathcal{D}$, то $B_2, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{U}_2$. Так как блоки B_i и B_{i+1} имеют общую точку сочленения, мы можем положить $V(B_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ (для $i \in \{1, \dots, n\}$).

Отметим, что две вершины каждого из блоков B_i смежны. Поэтому при $i \in \{2, \dots, n-1\}$ вершина x_i смежна в графе H с x_{i-1} и x_{i+1}. Таким образом, мы имеем цепочку последовательно соединённых вершин $x_1 \dots x_{n+1}$ в графе H, причём $d_H(x_2) = \dots = d_H(x_n) = 2$. Следовательно, $n \leqslant k + 1$.

Разрежем цепочку $\mathcal{L}$ на две половины по $\frac{n}{2}$ блоков: *левую*, от B_1 до середины и *правую*, от середины до B_n (в случае, когда n нечетно, мысленно разделим средний блок $\mathcal{L}$ на две половинки). Если $B_1 \in \mathcal{U}_2$, то левую половину цепочки поставим в соответствие блоку из $\mathcal{Q}$, смежному с B_1. Если же $B_1 \in \mathcal{W}_1$, то левая половина цепочки за вычетом самого блока B_1 будет поставлена в соответствие как раз блоку B_1. Аналогично, в зависимости от типа блока B_n, поступим с правой половиной цепочки. Так же сделаем со всеми остальными максимальными цепочками блоков из $\mathcal{P}$. Отметим, что такие цепочки не пересекаются.

Таким образом каждому блоку из $\mathcal{W}_1$ соответствует не более, чем $\frac{n-2}{2} \leqslant \frac{k-1}{2}$ блоков из $\mathcal{U}_2$. Каждый блок степени i из $\mathcal{Q}$ смежен не более, чем с i блоками из $\mathcal{U}_2$, а значит, ему соответствует не более, чем $i \cdot \frac{n}{2} \leqslant i \cdot \frac{k+1}{2}$ блоков из $\mathcal{U}_2$. Отсюда следует неравенство

$$u_2 \leqslant \frac{k-1}{2}w_1 + \frac{k+1}{2}\Big(2w_2 + \sum_{i=3}^{v} iv_i\Big).$$

Используя неравенство (2), продолжим преобразования

$$\begin{aligned} u_2 &\leqslant \frac{k-1}{2}w_1 + (k+1)w_2 + \frac{k+1}{2}(3w_1 - 6) \\ &= (k+1)w_2 + (2k+1)w_1 - 3k - 3. \end{aligned} \tag{3}$$

5. Оценим $v(H)$ через параметр w. Количество точек сочленения графа H, очевидно, равно $e(\mathcal{D}) = v - 1$. Пусть $B \in \mathcal{W}$ – непустой блок. Тогда $|\operatorname{Int}(B)| \leqslant |\operatorname{Bound}(B)| = d_{\mathcal{D}}(B)$. Поэтому количество s внутренних вершин блоков графа H удовлетворяет неравенству

$$s \leqslant \sum_{B \in \mathcal{W}} d_{\mathcal{D}}(B) = \sum_{i=1}^{v} iw_i = 2v - 2 - \sum_{i=1}^{v} iu_i.$$

Воспользовавшись неравенством (1), продолжим оценку:

$$v(H) = s + v - 1 \leqslant 3v - 3 - \sum_{i=1}^{v} iu_i \leqslant 3w - 3 + u_2.$$

Теперь подставим оценку на u_2 из неравенства (3):

$$\begin{aligned} v(H) &\leqslant 3w - 3 + u_2 \leqslant 3w - 3 + (k+1)w_2 + (2k+1)w_1 - 3k - 3 \\ &\leqslant (2k+4)w - (3k+6), \end{aligned}$$

так как $w_1 + w_2 \leqslant w$. По лемме 1 существует остовное дерево графа H с w висячими вершинами, следовательно, $t(H) \geqslant \frac{w}{v(H)} > \frac{1}{2k+4}$. $\square$

3.1. Экстремальные примеры

Для доказательства точности оценки $\frac{1}{2k+4}$ из теоремы 1 мы приведем пример серии графов, в которых максимальная цепочка последовательно соединённых вершин степени 2 состоит из $k > 0$ вершин, а максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве может быть сколь угодно близко к $\frac{1}{2k+4}$ от числа вершин графа.

Рассмотрим дерево T, в котором есть только вершины степени 1 и 3, причём вершин степени 3 ровно n. Легко видеть, что количество вершин степени 1 тогда равно $n+2$, а $e(T) = 2n+1$. Заменим каждое ребро дерева T цепочкой длины $k+1$ (то есть, добавим на каждом ребре по k новых последовательно соединённых вершин степени 2), после чего каждую вершину x степени 3 заменим на треугольник, три вершины которого соединим с тремя добавленными вершинами степени 2, с которыми была соединена вершина x (каждую вершину треугольника – ровно с одной вершиной). В полученном графе G будет $n+2$ вершины степени 1, $(2n+1)k$ вершин степени 2 и n треугольников, итого $v(G) = n+2+k(2n+1)+3n = (2k+4)n+k+2$. Все невисячие вершины графа G являются точками сочленения и потому не могут быть висячими вершинами остовного дерева. Таким образом легко видеть, что $t(G) \leqslant \frac{n+2}{(2k+4)n+k+2}$, что очевидно стремится к $\frac{1}{2k+4}$ при $n \to \infty$.

Литература

1. J. A. Storer, *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* — Inform. Process. Lett. **13** (1981) No. 1, 8–11.
2. J. R. Griggs, M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5.* — Discrete Math. **104** (1992), 167–183.
3. D. J. Kleitman, D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4** (1991) No. 1, 99–106.
4. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* — Graphs and Combinatorics **6** (1990), 1–4.
5. Н. В. Гравин, *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 31–46.
6. Д. В. Карпов, *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* — Дискретная математика **13** вып. 1 (2001), 63–72.
7. Ф. Харари, *Теория графов.* "Мир", Москва, 1973. (Перевод с английского F. Harary, *Graph theory*, 1969.)

Karpov D. V. Spanning trees with many leaves.

Let maximal chain of vertices of degree 2 in the graph G consists of $k > 0$ vertices. We prove that G has a spanning tree with more than $\frac{v(G)}{2k+4}$ leaves (we denote by $v(G)$ the number of vertices of the graph G). We present an infinite serie of examples showing that the constant $\frac{1}{2k+4}$ cannot be enlarged.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 23 августа 2010 г.