Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 381, 2010 г.

**Д. В. Карпов**

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРАВИЛЬНЫЕ РАСКРАСКИ ВЕРШИН ГРАФА

## 1. Введение. Основные результаты

В настоящей работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, изучаются правильные раскраски вершин таких графов. Цвет вершины $v$ в раскраске $\rho$ мы будем обозначать через $\rho(v)$.

Максимальную и минимальную степени вершин графа $G$ мы будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно. Для любой вершины $v \in V(G)$ через $d_G(v)$ будем обозначать степень вершины $v$ в графе $G$, а через $\mathrm{N}_G(v)$ – *окрестность* вершины $v$, то есть, множество всех вершин, смежных с $v$. Так как в рассматриваемом графе нет петель, $v \notin \mathrm{N}_G(v)$.

**Определение 1.** *Раскраска вершин графа называется правильной, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета.*

*Раскраска вершин графа $G$ называется динамической, если для любой вершины $v \in V(G)$ степени не менее двух окрестность $\mathrm{N}_G(v)$ содержит вершины хотя бы двух различных цветов.*

По аналогии с классическим определением хроматического числа, определим динамическое хроматическое число графа.

**Определение 2.** *Динамическое хроматическое число графа $G$ (обозначение: $\chi_2(G)$) – это наименьшее натуральное число такое, что существует динамическая правильная раскраска вершин графа $G$ в $\chi_2(G)$ цветов.*

Теорема Брукса ([1, 2, 5]) говорит нам, что $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$ для любого связного графа $G$, кроме ряда исключений. (При $\Delta(G) > 2$ един-

*Ключевые слова*: правильная раскраска, динамическая раскраска, теорема Брукса.

Исследования выполнены при поддержке Программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ 09-01-12137-офи-м.

ственное исключение – это полный граф на $d+1$ вершине $K_{d+1}$, при $\Delta(G)=2$ исключения – циклы нечетной длины.)

В работе [6] доказано похожее на теорему Брукса утверждение о динамическом хроматическом числе: $\chi_2(G) \leqslant \Delta(G)+1$ для любого связного графа $G$ при условии $\Delta(G) \geqslant 3$. Более того, в [6] доказано, что при $\Delta(G) \leqslant 3$ имеет место неравенство $\chi_2(G) \leqslant 4$ за исключением случая, когда граф $G$ – это цикл из пяти вершин.

Мы усилим результат работы [6], доказав для связных графов $G$ (кроме ряда исключений) при $\Delta(G) \geqslant 8$ аналогичную теореме Брукса оценку $\chi_2(G) \leqslant \Delta(G)$. Основные результаты работы сформулированы в следующих двух теоремах.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ – связный граф без вершин степени два, удовлетворяющий условию $\Delta(G) \geqslant 8$ и отличный от полного графа на $\Delta(G)+1$ вершине. Тогда $\chi_2(G) \leqslant \Delta(G)$.*

**Определение 3.** *Пусть $n \geqslant 3$. Рассмотрим любой граф $H$, полученный из полного графа $K_n$ следующей операцией: заменой нескольких ребер графа $K_n$ на цепочки длины 2 (с каждой такой цепочкой добавляется одна новая вершина степени 2). Назовем такой граф подразбиением $K_n$.*

*Пусть класс графов $\mathcal{K}_n$ состоит из полного графа $K_n$ и всех его подразбиений.*

**Теорема 2.** *Пусть $d \geqslant 8$.*

1) *Для любого графа $H \in \mathcal{K}_{d+1}$ выполняется утверждение $\chi_2(H) = d+1$.*

2) *Пусть $G$ – связный граф, $\Delta(G) \leqslant d$, причем $G$ не изоморфен никакому из графов класса $\mathcal{K}_{d+1}$. Тогда $\chi_2(G) \leqslant d$.*

В настоящее время весьма популярно использование вероятностных методов для доказательства подобных теорем. Однако, такие методы подразумевают значительные ограничения снизу на $\Delta(G)$. Например, в работах [3, 4] с помощью вероятностных методов доказываются весьма интересные обобщения теоремы Брукса, но на $\Delta(G)$ накладываются ограничения снизу $e^{10^7}$ и $10^{14}$ соответственно.

С помощью более точного использования подсчетных методов можно значительно снизить оценки на $\Delta(G)$. Так, при $\Delta(G) \geqslant 254$ теорема 2 несложно доказывается с помощью техники и результатов из работы [7]. Однако, для работы с малыми значениями $\Delta(G)$ требуется придумывать специальные алгоритмы, что значительно труднее. На

основании предложенных в работе доказательств можно написать полиномиальные относительно количества вершин алгоритмы построения искомой раскраски при $\Delta(G) \geqslant 8$. Выскажем предположение, что результаты теорем 1 и 2 верны и при $\Delta(G) \geqslant 5$.

Оставшаяся часть работы в основном посвящена доказательству теоремы 1. Определим понятия, необходимые нам в доказательствах.

**Определение 4.** *Пусть $G$ – произвольный граф, $\rho$ – раскраска его вершин.*

1) *Назовем вершину $v \in V(G)$ плохой в раскраске $\rho$, если $d_G(v) > 1$ и все вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ имеют одинаковый цвет.*

2) *Пусть вершины $a$ и $b$ смежны. Будем называть вершину $b$ опасным соседом вершины $a$ в раскраске $\rho$ графа $G$, если $d_G(b) > 1$, все вершины из множества $\mathrm{N}_G(b) \setminus \{a\}$ покрашены в один цвет, а $a$ – в другой.*

**Определение 5.** *Пусть $\rho$ и $\rho'$ – две раскраски вершин графа $G$. Будем говорить, что $\rho' \leqslant_G \rho$, если выполняются два условия.*

(1) *Для любой пары смежных вершин $u$ и $v$ из $\rho'(u) = \rho'(v)$ следует $\rho(u) = \rho(v)$.*

(2) *Любая вершина, являющаяся плохой в $\rho'$, является плохой и в $\rho$.*

*Будем говорить, что $\rho' <_G \rho$, если $\rho' \leqslant_G \rho$ и хотя бы одна из плохих вершин в раскраске $\rho$ не является таковой в $\rho'$.*

**Замечание 1.** 1) Легко видеть, что если $d_G(b) \neq 2$, то вершина $b$ может быть опасным соседом не более, чем для одной другой вершины.

2) Пусть $d_G(a) > 2$ и вершину $a$ можно сделать плохой, перекрасив одного из ее соседей. Тогда такой сосед вершины $a$, очевидно, единственен и является опасным соседом $a$.

3) Если раскраски $\rho$, $\rho_1$ и $\rho_2$ таковы, что $\rho \leqslant_G \rho_1$ и $\rho_1 \leqslant_G \rho_2$, то $\rho \leqslant_G \rho_2$. Если хотя бы одно из первых двух "неравенств" строгое, то $\rho <_G \rho_2$.

Изложим *краткий план доказательства* теоремы 1. Пусть $G$ — связный граф, степени всех вершин которого не равны 2 и не более $d$, отличный от полного графа на $d+1$ вершине. Теорема Брукса показывает, что существуют правильные раскраски вершин графа $G$ в $d$ цветов. К сожалению, в правильной раскраске могут быть плохие вершины. Мы выберем правильную раскраску $\rho$ в $d$ цветов с минимальным количеством плохих вершин.

Пусть в раскраске $\rho$ есть плохая вершина $a$. Мы хотим изменить раскраску так, чтобы вершина $a$ перестала быть плохой, а новых плохих вершин не появилось. Для этого мы будем использовать метод, напоминающий построение классической чередующейся цепи, как в доказательстве теоремы Брукса. Однако, при построении нашей *цепи запретов* возникает куда больше трудностей — если в классической теореме Брукса мешает перекрасить вершину $a$ в цвет $i$ только наличие соседа цвета $i$, то в нашем случае мешает также наличие опасного соседа $b$, у которого все вершины из $\mathrm{N}_G(b) \setminus \{a\}$ имеют цвет $i$. Это обстоятельство увеличивает количество потенциальных запретов в два раза, мы же количество цветов не увеличиваем.

Поэтому главный алгоритм построения цепи запретов будет неоднократно пользоваться вспомогательным алгоритмом $DN$, изменяя раскраску и уменьшая количество запретов на нужный цвет у очередной рассматриваемой вершины. Алгоритм $DN$ излагается во второй части статьи, а основной алгоритм построения цепи запретов – в третьей. В четвертой части мы доказываем теорему 2, что после доказательства теоремы 1 сделать несложно.

## 2. Алгоритм DN

В этом разделе мы опишем вспомогательный алгоритм $DN$, который будет в некоторых случаях вызываться главным алгоритмом перекраски вершин.

Пусть даны граф $H$ и раскраска $\rho$ вершин графа $H$. Никаких условий на соотношение количества цветов и $\Delta(H)$ не накладывается. Раскраска может быть неправильной. Пусть $a$ – плохая вершина в этой раскраске, $\rho(a) = i_0$, а все вершины из $\mathrm{N}_H(a)$ покрашены в цвет $i_1 \neq i_0$.

Опишем алгоритм $DN(H, \rho, a, J)$. Здесь $H$ и $\rho$ – это граф и раскраска, с которыми мы имеем дело, $a$ — плохая вершина, а $J = (j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$ — упорядоченный набор из пяти различных цветов, удовлетворяющий условиям

$$i_0 \notin J, \quad i_1 \notin \{j_2, j_3, j_4, j_5\}. \tag{1}$$

Пусть $J' = J \cup \{i_0, i_1\}$. Определим функцию $\nu : J' \to J'$ следующим образом:

$$\nu(i_0) = i_1, \quad \nu(i_1) = j_2, \quad \nu(j_2) = j_3, \quad \nu(j_3) = j_4,$$
$$\nu(j_4) = j_5, \quad \nu(j_5) = j_6, \quad \nu(j_6) = j_2.$$

Для каждого цвета $j \in J'$ цвет $\nu(j)$ мы будем называть *следующим цветом*. Через $\nu^k(j)$ мы будем обозначать $k$-ю итерацию функции $\nu$.

**Замечание 2.** 1) Нетрудно проверить, что определение функции $\nu$ корректно. В самом деле, из условий (1) и $i_0 \neq i_1$ следует что среди цветов, на которых определена функция $\nu$, возможно только совпадение $i_1 = j_6$, а по определению $\nu(i_1) = \nu(j_6) = j_2$.

2) Пусть $j \in J'$. Тогда все цвета $j$, $\nu(j)$, $\nu^2(j)$, $\nu^3(j)$ и $\nu^4(j)$ различны.

Целью алгоритма $DN(H, \rho, a, J)$ является изменение раскраски $\rho$ на такую раскраску $\rho'$, что $\rho' \leqslant_H \rho$, выполняется условие $(S)$ и одно из двух условий $(DN1)$ или $(DN2)$.

$\underline{(S)}$. Если $\rho'(v) \neq \rho(v)$ для некоторой вершины $v$, то $\rho(v) \in J'$ и $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$.

$\underline{(DN1)}$. $\rho'(a) = \nu^2(\rho(a)) = j_2$.

$\underline{(DN2)}$. $\rho'(a) = \rho(a)$. Существует единственная такая вершина $v \in \mathrm{N}_H(a)$, что $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$. Цвета отличных от $v$ вершин из $\mathrm{N}_H(a)$ в раскрасках $\rho$ и $\rho'$ совпадают.

**Замечание 3.** Так как степень плохой вершины $a$ не менее двух, то для раскраски $\rho'$ возможны два варианта:

– $\rho'(a) \neq \rho(a)$ (если раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(DN1)$);

– $\rho'(a) = \rho(a)$, вершина $a$ не является плохой в раскраске $\rho'$ и, следовательно, $\rho' <_H \rho$ (если раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(DN2)$).

### 2.1. Построение множества $L$.

Перед началом работы алгоритма мы построим вспомогательное множество $L$ и орграф $\overline{L}$ на множестве вершин $L$.

Мы будем помещать в множество $L$ некоторые вершины графа $H$, имеющие цвета из множества $J'$ и ориентировать некоторые ребра между вершинами множества $L$. Ориентированные ребра будем для удобства называть *стрелками*. Некоторые вершины множества $L$ мы будем объявлять *помеченными*. Стрелки будут выходить только из помеченных вершин. Изначально пусть $L = \{a\}$, вершина $a$ не помечена, никакие ребра не ориентированы.

Опишем **шаг построения**. Выберем любую непомеченную вершину $u \in L$ (если это возможно). Пусть $M$ – множество всех вершин из $\mathrm{N}_H(u)$, из которых не выходят стрелки в $u$. Если $M \neq \varnothing$ и $\rho(v) = \nu(\rho(u))$ для каждой вершины $v \in M$, то объявим вершину $u$ по-

меченной, поместим все вершины из $M \setminus L$ в множество $L$ и добавим в $\overline{L}$ стрелки от $u$ ко всем вершинам множества $M$.

С каждым шагом увеличивается количество помеченных вершин, поэтому ввиду конечности графа процесс построения конечен. В некоторый момент он закончится, рассмотрим множество $L$ на момент окончания процесса. Пусть $\overline{L}$ – ориентированный граф с вершинами из $L$ и стрелками, проведёнными в ходе построения $L$.

**Определение 6.** *1) Пусть $u \in L$. Обозначим через $\mathrm{N}^-(u)$ множество всех вершин, из которых выходят стрелки в $u$, а через $\mathrm{N}^+(u)$ – множество всех вершин, в которые выходят стрелки из $u$. Назовем вершины из $\mathrm{N}^-(u)$ предками, а вершины из $\mathrm{N}^+(u)$ – потомками вершины $u$.*

*2) Назовем вершину $u \in L$ особой, если $\mathrm{N}_H(u) = \mathrm{N}^-(u)$.*

**Замечание 4.** 1) Вершина $a$ обязательно является помеченной, $\mathrm{N}^+(a) = \mathrm{N}_H(a)$. Вершина $a$ не может быть потомком никакой другой вершины.

2) $\mathrm{N}^-(u) \neq \varnothing$ для любой отличной от $a$ вершины $u \in L$. Множество $\mathrm{N}^+(u)$ непусто тогда и только тогда, когда вершина $u$ помечена.

3) По построению, орграф $\overline{L}$ – ациклический (то есть, в нем нет ориентированных циклов). Действительно, на очередном шаге построения $\overline{L}$ мы добавляем стрелки, выходящие из вершины $u$ (которую мы объявляем помеченной) в непомеченные вершины. Следовательно, все вершины, откуда можно попасть в $u$ по стрелкам графа $\overline{L}$, были помечены ранее и ни в одну из них вновь добавленные стрелки не входят.

4) Если $u \in L$ – особая или помеченная вершина, то $\mathrm{N}_H(u) \subset L$.

5) Пусть вершина $u \in L$ не помечена. Тогда либо $u$ – особая, либо не все вершины из $\mathrm{N}_H(u) \setminus \mathrm{N}^-(u)$ имеют цвет $\nu(\rho(u))$, иначе мы могли бы продолжить построение множества $L$ и орграфа $\overline{L}$.

**Определение 7.** *1) Для каждой вершины $u \in L$ определим $L(u)$, как множество всех вершин, достижимых из $u$ в орграфе $\overline{L}$. Мы полагаем, что $u \in L(u)$.*

*2) Ветвью потомков вершины $u$ мы назовем любой путь в орграфе $\overline{L}$ с началом в $u$.*

*3) Высотой $h(u)$ вершины $u$ назовем длину наибольшей ветви потомков $u$ (то есть, количество ребер в соответствующем пути).*

**Замечание 5.** 1) Очевидно, $L(a) = L$.

2) Так как граф $\overline{L}$ – ациклический, то любая ветвь потомков любой вершины $u \in L$ конечна и не проходит ни через какую вершину дважды. Следовательно, высота любой вершины конечна.

3) Высота помеченной вершины больше нуля, а высота любой непомеченной вершины из $L$ равна нулю.

4) Если $v \in \mathrm{N}^+(u)$, то $h(u) > h(v)$.

**2.2. Алгоритм изменения раскраски: итерации.**

Итак, нам дана раскраска $\rho$. Для любой помеченной вершины $u \in L$ мы построим алгоритм $A(u)$, изменяющий раскраску $\rho$ на раскраску $\rho'$, удовлетворяющую условиям $(S(u))$, $(P(u))$ и одному из двух условий $(DN1(u))$ или $(DN2(u))$.

$\underline{(S(u))}$. Если $\rho'(v) \neq \rho(v)$ для некоторой вершины $v$, то $\rho(v) \in J'$ и $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$, причем $v \in L(u)$ – помеченная или особая вершина.

$\underline{(P(u))}$. Для любой помеченной вершины $w \in L(u)$, если $\rho'(y) \neq \rho(y)$ для некоторого $y \in N^-(w)$, то существует такая вершина $z \in N^+(w)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$. Для любой особой вершины $w \in L(u)$ и любой вершины $y \in \mathrm{N}^-(w)$ $\quad \rho'(y) = \rho(y)$.

$\underline{(DN1(u))}$. $\rho'(u) = \nu^2(\rho(u))$.

$\underline{(DN2(u))}$. $\rho'(u) = \rho(u)$. Существует единственная такая вершина $v \in \mathrm{N}^+(u)$, что $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$. Цвета отличных от $v$ вершин из $\mathrm{N}_H(u)$ в раскрасках $\rho$ и $\rho'$ совпадают.

Назовем алгоритм $A(u)$ *перекраской типа 1*, если раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(DN1(u))$ и *перекраской типа 2*, если $\rho'$ удовлетворяет условию $(DN2(u))$.

Нам потребуется несложная техническая лемма.

**Лемма 1.** *Пусть $v, w \in L$, $w \in L(v)$, а раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(P(v))$. Пусть раскраска $\rho''$ такова, что $\rho''(x) = \rho'(x)$ при $x \in L(w)$ и $\rho''(x) = \rho(x)$ при $x \notin L(w)$. Тогда раскраска $\rho''$ удовлетворяет условию $(P(w))$.*

**Доказательство.** Рассмотрим помеченную вершину $x \in L(w)$, пусть $\rho''(y) \neq \rho(y)$ для некоторого $y \in \mathrm{N}^-(x)$. Тогда, очевидно, $y, x \in L(w)$, следовательно, $\rho''(y) = \rho'(y)$ и по условию $(P(v))$ существует такая вершина $z \in \mathrm{N}^+(x)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$. Очевидно, $z \in L(w)$, следовательно, $\rho''(z) = \rho'(z) \neq \rho(z)$, то есть, в раскраске $\rho''$ перекрашен хотя бы один потомок вершины $y$.

Пусть $x \in L(w)$ – особая вершина, $y \in \mathrm{N}^-(x)$ и $\rho''(y) \neq \rho(y)$. Тогда $\rho'(y) = \rho''(y) \neq \rho(y)$, что противоречит условию $(P(v))$.

Таким образом, раскраска $\rho''$ удовлетворяет условию $(P(w))$. $\square$

**Построение алгоритма** $A(u)$

Построение будет вестись индукцией по $h(u)$. Пусть $j = \rho(u)$.

**База.** Разберем два случая.

**1**. *Пусть в* $\mathrm{N}^+(u)$ *есть особая вершина* $w$. *При этом* $h(u)$ *может быть любой.*

Тогда $\rho(w) = \nu(j)$, положим $\rho'(w) = \nu^3(j)$, остальные вершины не изменят цвета. Очевидно, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условиям $(S(u))$ и $(DN2(u))$. Так как единственная перекрашенная вершина – особая вершина $w$ – не имеет потомков, то не существует вершины из $L$, предка которой мы перекрасили, а значит, выполнено условие $(P(u))$.

**2**. *Пусть* $h(u) = 1$, *причем в* $\mathrm{N}^+(u)$ *нет особых вершин.*

Тогда положим $\rho'(u) = \nu^2(j)$, остальные вершины не изменят цвета. Очевидно, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условиям $(S(u))$ и $(DN1(u))$. Так как единственная перекрашенная вершина $u$ имеет высоту 1, то все вершины из $\mathrm{N}^+(u)$ (а это как раз те вершины, предком которых является $u$) – непомеченные, причем, кроме того, неособые. Следовательно, выполнено условие $(P(u))$.

**Индукционный переход**

Пусть $u$ – помеченная вершина высоты $h(u) > 1$, причем в $\mathrm{N}^+(u)$ нет особых вершин (случай, когда особые вершины есть, разобран в базе). Так как $h(u) > 1$, в $\mathrm{N}^+(u)$ есть хотя бы одна помеченная вершина. Пусть $v_1, \ldots, v_p$ – все помеченные потомки $u$, тогда $\rho(v_k) = \nu(j)$ при $k \in \{1, \ldots, p\}$. По замечанию 5, $h(v_k) < h(u)$, следовательно, для каждой из этих вершин существует алгоритм $A(v_i)$. Рассмотрим два случая.

**а**. *Для каждой из вершин* $v_1, \ldots, v_p$ *существует перекраска* $A(v_i)$ *типа* 2.

Если цвет какой-то вершины $y$ должен меняться в нескольких из этих перекрасок, то ввиду условия $(S)$ нужно менять этот цвет на один и тот же цвет $\nu^2(\rho(y))$. Положим $\rho'(u) = \nu^2(j)$ и для любой вершины $y \in L(u)$, цвет которой изменяется хотя бы в одной из перекрасок $A(v_1)$, ... , $A(v_p)$, мы положим $\rho'(y) = \nu^2(\rho(y))$. Очевидно, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условиям $(S(u))$ и $(DN1(u))$.

Проверим условие $(P(u))$. Рассмотрим помеченную вершину $x \in L(u)$, пусть $y \in \mathrm{N}^-(x)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Тогда, очевидно, $y \in L(u)$. Если $y = u$, то $x = v_k$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, p\}$. Так как в перекраске $A(v_k)$ типа 2 изменяется цвет хотя бы одной вершины $z \in \mathrm{N}^+(v_k)$, то $\rho'(z) \neq \rho(z)$.

Пусть $y \neq u$. Тогда вершина $y$ должна быть перекрашена в $A(v_t)$ для некоторого $t \in \{1, \ldots, p\}$. Следовательно, $x, y \in L(v_t)$ и по условию $(P(v_t))$ был перекрашен хотя один потомок вершины $x$.

Пусть $w \in L(u)$ – особая вершина, $y \in \mathrm{N}^-(w)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Случай $y = u$ невозможен: по предположению у вершины $u$ нет особых потомков, но в этом случае $w \in \mathrm{N}^+(u)$. Пусть $y \neq u$. Тогда существует такое $t$, что $y, w \in L(v_t)$ и вершина $y$ должна быть перекрашена в $A(v_t)$. Однако, это противоречит условию $(P(v_t))$.

Таким образом, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(P(u))$.

**b**. *Для некоторых потомков вершины $u$ существуют перекраски типа* 1.
Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – все такие потомки. Поскольку в графе $\overline{L}$ нет циклов, то можно считать, что $v_t \notin L(v_1)$ при $t \in \{2, \ldots, k\}$. Тогда положим $A(u) = A(v_1)$. Понятно, что перекраска $A(u)$ удовлетворяет условию $(S(u))$. Поскольку $\rho(v_1) = \nu(j)$, по условию $(DN1(v_1))$ мы имеем $\rho'(v_1) = \nu^3(j)$, как того требует условие $(DN2(u))$.

Предположим, что $\rho'(v) \neq \rho(v)$ для некоторой отличной от $v_1$ вершины $v \in \mathrm{N}^+(u)$. Так как $A(v_1)$ меняет цвета только у помеченных и особых вершин из $L(v_1)$, а особых вершин в $\mathrm{N}(u)$ нет, то $v = v_s \in L(v_1)$. Следовательно, $s > k$, то есть, для вершины $v_s$ по предположению не существует перекраски типа 1. Докажем, что это не так.

Рассмотрим такую раскраску $\rho''$, что $\rho''(x) = \rho'(x)$ при $x \in L(v_s)$ и $\rho''(x) = \rho(x)$ при $x \notin L(v_s)$. Так как $v_s \in L(v_s)$, имеем $\rho''(v_s) = \rho'(v_s) = \nu^2(\rho(v_s))$, поэтому для раскраски $\rho''$ выполняется условия $(DN1(v_s))$. Для раскраски $\rho''$ условие $(S(v_s))$, очевидно, выполняется, а условие $(P(v_s))$ выполняется по лемме 1. Следовательно, для вершины $v_s$ существует перекраска типа 1, противоречие с предположением.

Таким образом, $\rho'(v) = \rho(v)$ для любой отличной от $v_1$ вершины $v \in \mathrm{N}^+(u)$, то есть, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(DN2(u))$.

Проверим условие $(P(u))$ для раскраски $\rho'$. Рассмотрим помеченную вершину $x \in L(u)$, пусть $y \in \mathrm{N}^-(u)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Тогда, очевидно, $y, x \in L(v_1)$ и по условию $(P(v_1))$ существует такая вершина $z \in \mathrm{N}^+(v_1)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$.

Пусть $w \in L(u)$ – особая вершина, $y \in \mathrm{N}^-(w)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Так как перекрашивались только вершины из $L(v_1)$, то $y, w \in L(v_1)$ и по условию $(P(v_1))$ мы не могли перекрасить $y$, противоречие.

Таким образом, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(P(u))$.

### 2.3. Алгоритм изменения раскраски: финал.

**Лемма 2.** *Пусть раскраска $\rho'$ получена из $\rho$ в результате перекраски $A(a)$. Тогда $\rho' \leqslant_H \rho$, выполняется условие $(S)$ и одно из условий $(DN1)$ или $(DN2)$.*

**Доказательство.** Раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(S(a))$, а следовательно, и более слабому условию $(S)$. Для раскраски $\rho'$ выполняется одно из условий $(DN1(a))$ или $(DN2(a))$, из которых следуют соответственно условия $(DN1)$ и $(DN2)$.

Остается лишь проверить, что $\rho' \leqslant_H \rho$. Далее мы подробно разберем случаи.

**1**. *Пусть вершины $u$ и $v$ смежны, $\rho'(u) = \rho'(v)$, но $\rho(u) \neq \rho(v)$.*
Мы изменили цвет хотя бы одной из этих вершин, пусть, например, $\rho'(u) \neq \rho(u)$. Тогда $u \in L$ – помеченная или особая вершина, следовательно, $\mathrm{N}_H(u) = \mathrm{N}^-(u) \cup \mathrm{N}^+(u)$. Пусть $\rho(u) = j$, тогда $\rho'(u) = \nu^2(j)$ по условию $(S)$. Если $v \in \mathrm{N}^+(u)$, то $\rho(v) = \nu(j)$, следовательно, ввиду $(S)$, либо $\rho'(v) = \nu(j)$, либо $\rho'(v) = \nu^3(j)$. Однако, цвет $\nu^2(j)$ отличен и от $\nu(j)$, и от $\nu^3(j)$ по замечанию 2, противоречие с предположением $\rho'(u) = \rho'(v)$.

Остается случай $v \in \mathrm{N}^-(u)$. Тогда $\rho(v) = \ell$, причем $\nu(\ell) = j = \rho(u)$. Ввиду $(S)$, либо $\rho'(v) = \ell$, либо $\rho'(v) = \nu^2(\ell)$. Однако, цвет $\nu^2(j) = \nu^3(\ell)$ отличен и от $\ell$, и от $\nu^2(\ell)$ по замечанию 2, противоречие с предположением $\rho'(u) = \rho'(v)$.

Таким образом, в результате изменения раскраски не могли появиться новые пары смежных одноцветных вершин.

**2**. *Предположим, что вершина $y$ является плохой в $\rho'$, но не является плохой в $\rho$.*
Тогда $y$ смежна хотя бы с одной из перекрашенных вершин $w$. Понятно, что $w \in L$ – помеченная или особая вершина, следовательно, $y \in \mathrm{N}_H(w) \subset L$. Рассмотрим несколько случаев для вершин $y$ и $w$.

**2.1**. *Вершина $y$ – особая.*
Тогда $w \in \mathrm{N}_H(y) = \mathrm{N}^-(y)$ и по условию $(P(a))$ мы имеем $\rho'(w) = \rho(w)$, противоречие.

**2.2**. *Вершина $y$ – помеченная.*
Поскольку вершина $a$ является плохой в раскраске $\rho$, то $y \neq a$, следовательно, $\mathrm{N}^-(y) \neq \varnothing$ и $\mathrm{N}^+(y) \neq \varnothing$. Рассмотрим два подслучая.

**2.2.1**. *Цвета всех вершин из $\mathrm{N}^-(y)$ в раскрасках $\rho$ и $\rho'$ совпадают.*
Пусть $x \in \mathrm{N}^-(y)$ и $\rho'(x) = \rho(x) = j$, тогда $\rho(y) = \nu(j)$. Тогда $w \in \mathrm{N}^+(y)$, $\rho(w) = \nu^2(j)$ и по условию $(S)$ мы имеем $\rho'(w) = \nu^4(j)$. По замечанию 2 цвет $j$ отличен от $\nu^4(j)$, следовательно, вершина $y$ не является плохой в $\rho'$, противоречие.

**2.2.2**. *Существует вершина $x \in \mathrm{N}^-(y)$, $\rho'(x) \neq \rho(x) = j$.*
Тогда по условию $(P(a))$ существует такая вершина $z \in \mathrm{N}^+(y)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$. По построению, $\rho(z) = \nu^2(j)$. По условию $(S)$ мы имеем $\rho'(x) = \nu^2(j)$ и $\rho'(z) = \nu^4(j)$, а эти цвета различны. Следовательно, $y$ не является плохой в $\rho'$, противоречие.

**2.3**. *Вершина $y$ – непомеченная и неособая.*
Так как перекрашенная вершина $w$ – помеченная или особая, то $\mathrm{N}_H(w) = \mathrm{N}^-(w) \cup \mathrm{N}^+(w)$, причем $\mathrm{N}^-(w)$ состоит из помеченных вершин. Следовательно, $y \in \mathrm{N}^+(w) \neq \varnothing$, то есть, $w$ – помеченная вершина. Пусть $\rho(w) = j$, тогда $\rho'(w) = \nu^2(j)$ по условию $(S)$. Так как вершина $y$ – неособая, то $M = \mathrm{N}_H(y) \setminus \mathrm{N}^-(y) \neq \varnothing$. Однако, по замечанию 4 не все вершины из $M$ имеют цвет $\nu(\rho(y)) = \nu^2(j)$, следовательно, вершина $y$ не является плохой в $\rho'$, противоречие.

Теперь мы доказали, что $\rho' \leqslant_H \rho$. □

В лемме 2 мы доказали, что раскраска $\rho'$, полученная в результате перекраски $A(a)$, удовлетворяет всем заявленным целям алгоритма $DN$. Именно эту раскраску мы и объявим результатом работы алгоритма $DN(H, \rho, a, J)$.

**Замечание 6.** 1) Если цвет $i \notin J$, то в результате работы алгоритма $DN(H, \rho, a, J)$ не появилось новых вершин цвета $i$.

2) Если $i \notin J$, то в процессе работы алгоритма изменила цвет не более чем одна из вершин цвета $i$ – при $i = i_0$ это может быть вершина $a$, при $i = i_1$ – одна из вершин окрестности $a$. В остальных случаях все вершины цвета $i$ сохраняют цвет.

### 2.4. Алгоритм $DN$: применение.

Вернемся к нашему исходному графу $G$. Зафиксируем вершину $b \in V(G)$, $d_G(b) \geqslant 3$. Пусть множество $B \subset \mathrm{N}_G(b)$ содержит всех соседей вершины $b$, кроме, может быть, какого-то одного. Рассмотрим новый граф $G'$, полученный из $G$ удалением ребер, соединяющих $b$ с вершинами из множества $B$. Рассмотрим раскраску $\rho$ вершин графа

$G$ (не обязательно правильную), она же является раскраской вершин графа $G'$. Пусть $U$ – вершины из $B$, которые являются плохими в раскраске $\rho$ графа $G'$, а $T = B \setminus U$.

**Лемма 3.** *Пусть $u \in U$, $\rho(u) = i_0$, а все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$ покрашены в $\rho$ в цвет $i_1$, причём $i_0 \neq i_1$. Пусть $K$ – набор цветов, содержащий $\rho(b)$, $i_0$ и, возможно, еще какие-то цвета. Рассмотрим набор $J = (j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$, $J \cap K = \varnothing$, удовлетворяющий условию (1), а также следующим двум условиям.*

*(J1) Если все вершины множества $B \setminus \{u\}$ покрашены в раскраске $\rho$ в один цвет, то ни $j_2$, ни $j_5$ не совпадают с этим цветом.*

*(J2) Если вершины множества $B \setminus \{u\}$ в раскраске $\rho$ покрашены в два различных цвета, то $j_2$ не совпадает ни с одним из этих двух цветов.*

*Пусть в результате применения алгоритма $DN(G', \rho, u, J)$ раскраска $\rho$ изменится на раскраску $\rho'$. Тогда $\rho' \leqslant_G \rho$, причем $\rho'(b) = \rho(b)$.*

**Доказательство.** По свойствам алгоритма $DN$ мы имеем $\rho' \leqslant_{G'} \rho$. Так как $\rho(b) \notin J$, то по замечанию 6 вершина $b$ могла быть перекрашена только в случае $b = u$ или $b \in \mathrm{N}_{G'}(u)$. Поскольку ни то, ни другое не выполняется, то $\rho'(b) = \rho(b)$. Граф $G$ отличается от $G'$ добавлением ребер от $b$ к вершинам из $B$.

Пусть $x$ и $y$ смежны в $G$, $\rho'(x) = \rho'(y)$, но $\rho(x) \neq \rho(y)$. Так как $\rho' \leqslant_{G'} \rho$, то $x$ и $y$ несмежны в $G'$, следовательно, можно положить $x = b$, $y \in B$. Ввиду того, что $s = \rho'(b) = \rho(b) \notin J$, а все изменившие цвет вершины перекрашены в процессе применения алгоритма в цвета из множества $J$, вершина $y$ должна была изначально иметь цвет $s$, то есть $\rho(b) = \rho'(b) = \rho'(y) = \rho(y)$, противоречие. Следовательно, если вершины $x$ и $y$ смежны в графе $G$ и $\rho'(x) = \rho'(y)$, то $\rho(x) = \rho(y)$.

Покажем, что в раскраске $\rho'$ не появилось новых плохих вершин. Если рассматривать $\rho'$ и $\rho$, как раскраски графа $G'$, то по лемме 2 все плохие в $\rho'$ вершины являются плохими и в $\rho$.

Рассмотрим теперь $\rho'$ и $\rho$, как раскраски графа $G$. Если вершина $x$ – плохая в $\rho'$, но не плохая в $\rho$ (как в раскрасках графа $G$), то $x$, очевидно, должна быть смежна в графах $G$ и $G'$ с разными наборами вершин, то есть нам достаточно проверить вершины из множества $B$ и саму вершину $b$.

**Проверка вершины $b$.**
Рассмотрим вершину $b$. Если $\rho'(u) = \rho(u) = i_0$, то в $\mathrm{N}_G(b)$ есть вершина $u$ цвета $i_0 \notin J$, а новых вершин цвета $i_0$ не добавилось. Это означает, что если $b$ – плохая вершина в раскраске $\rho'$ графа $G$, то все ее соседи имеют в $\rho'$ цвет $i_0$, но тогда они имели такой же цвет и в раскраске $\rho$, то есть, вершина $b$ и до перекрашивания была плохой.

Пусть $\rho'(u) = \nu^2(i_0) = j_2$. Предположим, что вершина $b$ стала плохой в полученной раскраске $\rho'$ графа $G$. Тогда все вершины из $B$ оказались покрашены в $\rho'$ в цвет $j_2$, но в цвет $j_2$ мы могли перекрасить только вершины цветов $i_0$ и $j_5$, причем ровно одна вершина цвета $i_0$ оказалась в результате перекрашена — это вершина $u$. Следовательно, в изначальной раскраске $\rho$ вершины множества $B \setminus \{u\}$ были покрашены не более, чем в два цвета: $j_2$ и $j_5$. Рассмотрим два случая.

**1**. Пусть вершины множества $B \setminus \{u\}$ покрашены в $\rho$ в один цвет. По условию $(J1)$, ни $j_2$, ни $j_5$ не совпадают с этим цветом. Следовательно, в раскраске $\rho'$ ни одна из вершин множества $B \setminus \{u\}$ не будет покрашена в цвет $j_2$, противоречие.

**2**. Пусть вершины множества $B \setminus \{u\}$ покрашены в $\rho$ в два цвета. Хотя бы один из этих двух цветов не совпадает с $j_5$, пусть это цвет $\ell$ и $\rho(x) = \ell$, где $x \in B \setminus \{u\}$. По условию $(J2)$ мы имеем $j_2 \neq \ell$. Тогда $\rho(x) \notin \{j_2, j_5\}$, следовательно, $\rho'(x) \neq j_2$, то есть, не все вершины множества $B \setminus \{u\}$ имеют в $\rho'$ цвет $j_2$, противоречие.

Таким образом, вершина $b$ может быть плохой вершиной в раскраске $\rho'$ графа $G$ только в случае, когда $b$ – плохая вершина в раскраске $\rho$ графа $G$.

**Проверка множества $B$.**
Рассмотрим любую вершину $x \in B$. Она смежна с вершиной $b$, причем $\rho'(b) = \rho(b)$. В раскраске $\rho'$ вершин цвета $\rho(b)$ не добавляется, следовательно, если вершина $x$ является плохой в раскраске $\rho'$ графа $G$, то она является таковой и в раскраске $\rho$ графа $G$. Таким образом, $\rho' \leqslant_G \rho$. □

## 3. Построение динамической раскраски для графа без вершин степени 2

В настоящем разделе пусть $G$ – связный граф без вершин степени 2, удовлетворяющий условию $\Delta(G) \leqslant d$, где $d \geqslant 8$ – целое число, причем $G$ отличен от полного графа $K_{d+1}$. Раздел посвящен доказательству теоремы 1, то есть, построению в графе $G$ динамической раскраски вершин в $d$ цветов.

**3.1. Алгоритм построения цепи. Общие принципы выбора вершин и начало построения.**

По теореме Брукса существует правильная раскраска $\rho$ вершин графа $G$ в $d$ цветов. Предположим, что в раскраске $\rho$ существует плохая вершина $a$. Пусть $\rho(a) = 0$, все вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ имеют цвет 1, а цвет 2 отличен от 0 и 1. Мы хотим изменить раскраску $\rho$ на $\rho' \leqslant_G \rho$ так, что некоторые (но не все) вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ будут в $\rho'$ иметь цвет 2, остальные же вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ не поменяют цвет. Тогда вершина $a$ не будет плохой в раскраске $\rho'$, следовательно, $\rho' <_G \rho$.

Положим $c(k) = 1$ при нечетном $k$ и $c(k) = 2$ при четном $k$. Мы построим последовательность различных вершин $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$. У каждой вершины $b_k$ будет определен ровно один *предок* $\mathrm{asc}(b_k)$, который будет смежной с $b_k$ вершиной, пусть $\mathrm{N}'_G(b_k) = \mathrm{N}_G(b_k) \setminus \{\mathrm{asc}(b_k)\}$. Смысл построения будет похожим на классический метод чередующихся цепей: каждая следующая вершина $b_{k+1}$ будет "запретом", мешающим перекрасить $b_k$ в цвет $c(k+1)$. Однако, конструкция будет значительно более сложной, чем в классическом доказательстве теоремы Брукса.

**Определение 8.** *Пусть $i \neq c(k)$.*

1) *Если существует вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ цвета $\rho(v) = i$, то назовем такую ситуацию запретом типа 1 на цвет $i$ для вершины $b_k$.*

2) *Если вершина $u \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ является опасным соседом $b_k$ и после изменения цвета вершины $b_k$ на цвет $i$ вершина $u$ станет плохой, то назовем такую ситуацию запретом типа 2 на цвет $i$ для вершины $b_k$, а вершину $u$ – базовой вершиной этого запрета.*

**Замечание 7.** У вершины $b_k$ может быть несколько запретов типа 2 на цвет $i$ с различными базовыми вершинами.

Перейдем к построению цепи. В качестве $b_1$ мы возьмем произвольную вершину из $\mathrm{N}_G(a)$, предком $b_1$ будет вершина $a_0 = a$. Для $k \geqslant 1$ вершина $b_{k+1}$ будет удовлетворять следующим условиям:

– $\rho(b_{k+1}) = c(k+1)$;

– возможна одна из двух ситуаций:

либо $b_k$ и $b_{k+1}$ смежны, тогда $\mathrm{asc}(b_{k+1}) = b_k$, вершина $b_{k+1} \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ является запретом типа 1 на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$,

либо $b_k$ и $b_{k+1}$ несмежны, тогда $\mathrm{asc}(b_{k+1}) = a_k \neq b_k$, вершина $a_k \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ является базовой вершиной запрета типа 2 на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$, вершина $b_{k+1} \in \mathrm{N}_G(a_k)$.

**Определение 9.** *Последовательность вершин $b_1, \ldots, b_p$, построенную для раскраски $\rho$ в соответствии с указанными принципами, мы назовем цепью запретов в раскраске $\rho$.*

На рисунке 1 для $c(k) = 1$ и $c(k+1) = 2$ слева изображен случай, когда $b_{k+1}$ — запрет типа 1 на цвет $c(k+1) = 2$ для вершины $b_k$, а справа – когда $b_{k+1}$ – запрет типа 2.

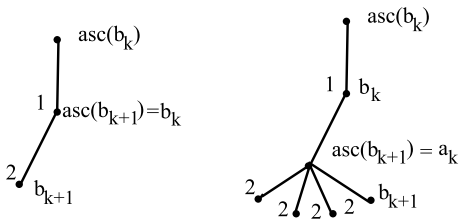


Рис. 1. Запрет типа 1 и запрет типа 2.

**Замечание 8.** Если $\mathrm{asc}(b_k) = a_{k-1} \neq b_{k-1}$, то вершина $a_{k-1}$ смежна и с $b_{k-1}$, и с $b_k$, следовательно, $\rho(a_{k-1}) \notin \{c(k-1), c(k)\} = \{1, 2\}$.

### 3.2. Условия $(C1)$ и $(C2)$.

Пусть $b_1, \ldots, b_p$ – цепь запретов для раскраски $\rho$. Перед описанием шага алгоритма (выбора следующей вершины последовательности) мы сформулируем два важных условия и выясним ряд свойств цепи запретов, удовлетворяющей этим условиям.

$\underline{(C1(p))}$ При всех $i \in \{1, \ldots, p\}$ существует единственный запрет на цвет $c(i+1)$ для вершины $b_i$.

$\underline{(C2(p))}$ Пусть $i \in \{1, \ldots, p\}$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_i)$, все соседи $v$ покрашены в цвета 1 и 2. Тогда $v$ – базовая вершина запрета типа 2 на цвет $c(i+1)$ для вершины $b_i$.

Следующие три леммы покажут возможности для изменения цветов вершин цепи запретов. Мы будем применять эти леммы для доказательства корректности шагов построения.

**Лемма 4.** *Пусть $b_1, \ldots, b_s$ – цепь запретов для правильной раскраски $\rho$, удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$. Рассмотрим новую раскраску $\rho'$, в которой $\rho'(b_i) = c(i+1)$ для $i \in \{1, \ldots, s\}$, а цвета остальных вершин такие же, как в раскраске $\rho$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если вершины $u$ и $v$ смежны и $\rho'(v) = \rho'(u)$, то либо $u = b_s$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$ и $\rho'(v) = \rho(v) = c(s+1)$, либо $v = b_s$, $u \in \mathrm{N}'_G(b_s)$ и $\rho'(u) = \rho(u) = c(s+1)$.*

2) *В раскраске $\rho'$ вершина $a$ не является плохой.*

3) *Если вершина $v$ – плохая в $\rho'$, но не плохая в $\rho$, то $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$, причем в раскраске $\rho$ вершина $v$ – базовая вершина запрета типа 2 на цвет $c(s+1)$ для вершины $b_s$.*

**Доказательство.** 1) Пусть вершины $u$ и $v$ смежны и $\rho'(v) = \rho'(u)$. Так как $\rho(v) \neq \rho(u)$ в силу правильности раскраски $\rho$, то хотя бы одна из этих двух вершин должна быть перекрашена. Не умаляя общности, пусть это $u = b_i$, мы перекрасили ее из цвета $c(i)$ в цвет $c(i+1)$.

Пусть $v = \mathrm{asc}(b_i)$. В случае, когда $\mathrm{asc}(b_i) = a_{i-1} \neq b_{i-1}$, мы имеем $\rho'(a_{i-1}) = \rho(a_{i-1}) \notin \{1,2\}$, следовательно, $\rho'(a_{i-1}) \neq \rho'(b_i)$, что делает невозможным случай $u = b_i$, $v = a_{i-1}$. Так как $\rho'(b_{i-1}) = c(i) \neq c(i+1) = \rho'(b_i)$, случай $u = b_i$, $v = b_{i-1}$ также невозможен.

Таким образом, $v \neq \mathrm{asc}(b_i)$ и остается рассмотреть случай $u = b_i$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_i)$. Пусть $i < s$. Тогда по условию $(C1(s-1))$ у вершины $b_i$ могло быть не более двух соседей цвета $c(i+1)$ – это $b_{i-1}$ и $b_{i+1}$. Обе эти вершины поменяли свой цвет, следовательно, $i = s$.

Итак, $u = b_s$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$, $\rho'(v) = \rho'(b_s) = c(s+1)$. Мы перекрашивали в цвет $c(s+1)$ только вершины цвета $c(s)$, а $\rho(v) \neq \rho(b_s) = c(s)$ в силу правильности раскраски $\rho$. Следовательно, $\rho(v) = \rho'(v) = c(s+1)$.

2) Докажем, что вершина $a$ не является плохой в новой раскраске $\rho'$. В раскраске $\rho$ все соседи вершины $a$ имеют цвет 1. Вершина $b_1 \in \mathrm{N}_G(a)$ перекрашена в цвет $\rho'(b_1) = c(2) = 2$. Докажем, что $b_2, \ldots, b_{s-1} \notin \mathrm{N}_G(a)$ – тогда в $\mathrm{N}_G(a)$ входит максимум две перекрашенные вершины (это $b_1$ и, возможно, $b_s$) и из $|\mathrm{N}_G(a)| = d_G(a) \geqslant 3$ следует, что в $\mathrm{N}_G(a)$ есть вершины цветов 1 и 2 в раскраске $\rho'$, то есть $a$ не является плохой вершиной в этой раскраске.

Предположим, что $b_i \in \mathrm{N}_G(a)$ (где $1 < i < s$). Тогда $c(i) = \rho(b_i) = 1$, следовательно, $c(i-1) = \rho(b_{i-1}) = 2$ и вершина $b_{i-1} \notin \mathrm{N}_G(a)$. Пусть $a = \mathrm{asc}(b_i)$. Так как $\rho(a) \notin \{1,2\}$, то $a \neq b_{i-1}$, но тогда по построению вершина $a$ должна быть смежна с $b_{i-1}$, то есть, $b_{i-1} \in \mathrm{N}_G(a)$. Противоречие.

Остается случай $a \in \mathrm{N}'_G(b_i)$. Тогда по условию $(C2(s-1))$ вершина $a$ должна быть базовой для запрета на цвет $c(i+1)$ для вершины $b_i$ в раскраске $\rho$, однако плохая вершина $a$ таковой быть очевидно не может: она не является опасным соседом $b_i$. Полученное противоречие завершает доказательство.

3) Предположим, что вершина $v$ – плохая в $\rho'$, но не плохая в $\rho$. Так как все цвета кроме 1 и 2 остались на своих местах, окрестность вершины $v$ должна быть покрашена в цвета 1 и 2 в раскраске $\rho$. Кроме того, $v$ должна быть смежна хотя бы с одной из перекрашенных вершин. Пусть $v \in \mathrm{N}_G(b_i)$, но $v \notin \mathrm{N}_G(b_j)$ при $j < i$. Рассмотрим несколько случаев.

**a**. Предположим, что $v \in \mathrm{N}'_G(b_i)$. Пусть $i < s$. По условию $(C2(s-1))$, тогда $v$ – базовая вершина запрета на цвет $c(i+1)$ для вершины $b_i$. В этом случае по построению вершина $b_{i+1}$ смежна с $v = \mathrm{asc}(b_{i+1})$. Однако, мы перекрасили вершину $b_{i+1}$ в отличный от $c(i+1)$ цвет, следовательно, вершина $v$ не могла стать плохой.

Пусть $i = s$. Тогда вершина $v$ не смежна с другими перекрашенными вершинами $b_1, \ldots, b_{s-1}$, следовательно, все вершины из $\mathrm{N}_G(v) \setminus \{b_s\}$ в раскраске $\rho$ имеют цвет $c(s+1)$. Таким образом, $v$ – базовая вершина для запрета на цвет $c(s+1)$ для вершины $b_s$.

**b**. Пусть $v = \mathrm{asc}(b_i)$. Так как по выбору $i$ вершина $v$ не смежна с $b_{i-1}$, мы по построению цепи запретов имеем $v = b_{i-1}$. Вершина $b_i \in \mathrm{N}'_G(b_{i-1})$ имеет цвет $\rho(b_i) = c(i)$, по условию $(C1(s-1))$ других вершин цвета $c(i)$ в раскраске $\rho$ в множестве $\mathrm{N}'_G(b_{i-1})$ нет. Так как $d_G(b_{i-1}) \geqslant 3$, существует вершина $x \in \mathrm{N}'_G(b_{i-1})$, для которой $\rho(x) \neq c(i)$. В силу правильности раскраски $\rho$ мы имеем $\rho(x) \neq \rho(b_{i-1}) = c(i-1)$ и потому $\rho'(x) = \rho(x) \neq c(i-1) = c(i+1) = \rho'(b_i)$. Поэтому, вершина $v = b_{i-1}$ не является плохой в раскраске $\rho'$. Противоречие. $\square$

**Лемма 5.** *Пусть $b_1, \ldots, b_s$ – цепь запретов для правильной раскраски $\rho$, удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$, а у вершины $b_s$ нет запрета на цвет $c(s+1)$. Тогда существует такая раскраска $\rho'$ вершин графа $G$, что $\rho' <_G \rho$.*

**Доказательство.** Рассмотрим раскраску $\rho'$, полученную из $\rho$ следующей перекраской вершин: для всех $i$ от 1 до $s$ перекрасим вершину $b_i$ в цвет $c(i+1)$.

Предположим, что в раскраске $\rho'$ появилась пара смежных одноцветных вершин. По лемме 4, одна из них – это $b_s$, изменившая свой цвет на $c(s+1)$, а вторая – вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$, причем $\rho'(v) = \rho(v) = c(s+1)$, то есть, вершина $v$ накладывала в раскраске $\rho$ запрет типа 1 на цвет $c(s+1)$ для вершины $b_s$, что противоречит условию.

Предположим, что в раскраске $\rho'$ появилась новая плохая вершина $v$. По лемме 4, тогда $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$, причем $v$ является в раскраске $\rho$ базовой для запрета типа 2 на цвет $c(s+1)$, что противоречит усло-

вию.

В силу леммы 4 теперь можно утверждать, что $\rho' <_G \rho$. $\square$

**Лемма 6.** *Пусть $b_1, \ldots, b_s$ – цепь запретов для правильной раскраски $\rho$, удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$. Пусть раскраска $\rho' \leqslant_G \rho$ такова, что все вершины из $\mathrm{N}_G(a) \setminus \{b_1\}$ в раскраске $\rho'$ имеют такой же цвет, как и в $\rho$ – цвет 1, а для любой вершины $v \in V(G)$ из $\rho'(v) \in \{1, 2\}$ следует $\rho'(v) = \rho(v)$. Тогда выполняется одно из двух утверждений.*

$1^\circ$. *Последовательность $b_1, \ldots, b_s$ – цепь запретов для раскраски $\rho'$, удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$.*

$2^\circ$. *Существует раскраска $\rho'' <_G \rho$.*

**Доказательство.** Так как любая вершина $v$ цвета 1 или 2 в раскраске $\rho'$ имеет такой же цвет в раскраске $\rho$, то любой запрет на цвет $c(i+1) \in \{1, 2\}$ для вершины $b_i$ накладывается теми же вершинами цвета $c(i+1)$, что и в раскраске $\rho$. Отсюда же следует, что последовательность $b_1, \ldots, b_s$ удовлетворяет условию $(C2(s-1))$.

Пусть условие $(C1(s-1))$ выполнено для раскраски $\rho'$. Тогда из сказанного выше следует, что все вершины $b_1, \ldots, b_s$ сохранили свой цвет и эта последовательность является цепью запретов для раскраски $\rho'$.

Пусть условие $(C1(s-1))$ не выполнено для раскраски $\rho'$. Тогда существует такое $t \in \{1, \ldots, s\}$, что в раскраске $\rho'$ у вершины $b_t$ нет запрета на цвет $c(t+1)$. Пусть $t$ – наименьшее такое число. Докажем, что тогда все вершины $b_1, \ldots, b_t$ покрашены в $\rho$ и $\rho'$ одинаково. Если $\rho'(b_1) \neq \rho(b_1)$, то вершина $a$ не является плохой в раскраске $\rho'$, следовательно $\rho' <_G \rho$ и утверждение леммы доказано. Если же $\rho'(b_\ell) \neq \rho(b_\ell) = c(\ell)$, где $1 < \ell \leqslant t$, то по построению у вершины $b_{\ell-1}$ нет запрета на цвет $c(\ell)$, что противоречит минимальности $t$. Тогда для раскраски $\rho'$ выполняются условия $(C1(t-1))$ и $(C2(t-1))$. По лемме 5 для $s = t$ существует раскраска $\rho''$ такая, что $\rho'' <_G \rho' \leqslant_G \rho$. $\square$

### 3.3. Шаг алгоритма: выбор вершины $b_k$.

Итак, пусть уже выбраны вершины $b_1, \ldots, b_{k-1}$ (где $k \geqslant 2$), причем все эти вершины различны, $\rho(b_i) = c(i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Цепь запретов будет строиться так, что перед началом шага выбора вершины $b_k$ выполнены условия $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$.

По условию $(C1(k-1))$, у вершины $b_{k-1}$ ровно один запрет на цвет $c(k)$. Рассмотрим этот запрет. Если это запрет типа 1, то существует

единственная вершина $u \in \mathrm{N}'_G(b_{k-1})$, покрашенная в цвет $c(k)$. В этом случае положим $b_k = u$, $\mathrm{asc}(b_k) = b_{k-1}$.

Пусть у вершины $b_{k-1}$ есть запрет типа 2 на цвет $c(k)$, а $v$ – базовая вершина этого запрета. Тогда все отличные от $b_{k-1}$ вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ покрашены в цвет $c(k)$, возьмем в качестве $b_k$ любую из этих вершин и положим $\mathrm{asc}(b_k) = a_{k-1} = v$.

В случае, когда вершина $b_k$ совпала с одной из ранее выбранных вершин, алгоритм завершит работу. Если же вершины $b_1, \ldots, b_k$ различны, то либо мы добьемся выполнения условий $(C1(k))$ и $(C2(k))$, либо алгоритм завершит работу, изменив исходную раскраску $\rho$ на такую раскраску $\rho'$, что $\rho' <_G \rho$.

### A.1. Повтор вершины

Предположим, что $b_k = b_t$ где $t < k$. Напомним, что все вершины $b_1, \ldots, b_{k-1}$ различны. Рассмотрим следующую раскраску $\rho'$: для всех $i$ от 1 до $k-1$ положим $\rho'(b_i) = c(i+1)$, на остальных вершинах $v$ положим $\rho'(v) = \rho(v)$. Отметим, что для раскраски $\rho$ выполнены условия $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$, следовательно, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условиям леммы 4 для $s = k-1$. Мы покажем, что раскраска $\rho'$ – правильная и $\rho' <_G \rho$.

Предположим, что в раскраске $\rho'$ появилась пара смежных одноцветных вершин. По лемме 4, одна из них – это $b_{k-1}$, изменившая свой цвет на $c(k)$, а вторая – вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_{k-1})$, причем $\rho'(v) = \rho(v) = c(k)$, то есть, вершина $v$ накладывала в раскраске $\rho$ запрет типа 1 на цвет $c(k)$ для вершины $b_{k-1}$. По построению это означает, что $v = b_k = b_t$, но эта вершина перекрашена в цвет $c(t+1) = c(k+1)$. По лемме 4 получаем, что раскраска $\rho'$ – правильная.

Предположим, что в раскраске $\rho'$ появилась новая плохая вершина $v$. По лемме 4, $v = a_{k-1}$ и все вершины из $\mathrm{N}_G(a_{k-1}) \setminus \{b_{k-1}\}$ имеют в раскраске $\rho'$ цвет $c(k)$. Однако, по построению $a_{k-1}$ смежна с $b_k = b_t$, а $\rho'(b_t) = c(t+1) = c(k+1) \neq c(k)$. Тогда вершины $b_t, b_{k-1} \in \mathrm{N}_G(v)$ имеют разный цвет в раскраске $\rho'$, противоречие.

В силу леммы 4 теперь можно утверждать, что $\rho' <_G \rho$. Алгоритм останавливается.

Итак, теперь можно считать, что все вершины $b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k$ различны, что мы и будем использовать на следующих этапах алгоритма.

### A.2. Приведение в порядок окрестности вершины $b_k$

Мы хотим добиться того, чтобы выполнялось одно из двух условий:

$(R1)$ у вершины $b_k$ ровно один запрет на цвет $c(k+1)$;

$(R2)$ у вершины $b_k$ нет запрета на какой-то цвет $i \neq c(k)$.

Если выполнится условие $(R1)$, то, очевидно, выполнится и $(C1(k))$. В этом случае мы проверим выполнение условия $(C2(k))$. Если это условие выполняется, то алгоритм перейдет к следующему шагу (выбору вершины $b_{k+1}$), а в противном случае завершит работу.

В случае, когда выполнится условие $(R2)$, алгоритм перейдет к разделу A.3, в котором обязательно завершит работу. С помощью алгоритма $DN$ мы будем изменять раскраску так, чтобы выполнилось одно из условий $(R1)$ и $(R2)$. Перейдем к детальному описанию наших действий.

Каждая вершина $u \in \mathrm{N}'_G(b_k)$, являющаяся базовой для какого-либо запрета типа 2, дает два запрета на цвет для $b_k$: это цвет $\rho(u)$ и цвет запрета типа 2, поэтому общее количество запретов может быть более $d-1$.

#### A.2.1. Плохие вершины в $\mathrm{N}'_G(b_k)$

Пусть $x \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ – плохая вершина, причем $\rho(x) = c(k+1)$. Тогда, так как $b_k \in \mathrm{N}_G(x)$, все вершины из $\mathrm{N}_G(x)$ имеют цвет $\rho(b_k) = c(k)$. Отметим, что $\{c(k), c(k+1)\} = \{1, 2\}$. Рассмотрим любое множество цветов $J = \{j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$, не содержащее цветов 1 и 2, и изменим раскраску $\rho$ с помощью алгоритма $DN(G, \rho, x, J)$. В результате получится раскраска $\rho' \leqslant_G \rho$, причем либо $\rho(x) = j_2 \notin \{1, 2\}$, либо вершина $x$ не является плохой в раскраске $\rho'$. Во втором случае мы имеем $\rho' <_G \rho$ и алгоритм останавливается, в первом случае мы продолжим с другими плохими вершинами из $\mathrm{N}'_G(b_k)$, если такие есть. В результате либо алгоритм остановится, либо получится раскраска $\rho^* \leqslant_G \rho$, удовлетворяющая следующим условиям:

– любая плохая в раскраске $\rho^*$ вершина $u \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ будет иметь цвет $\rho^*(u) \neq c(k+1)$;

– если $\rho^*(x) \in \{1, 2\}$, то $\rho^*(x) = \rho(x)$.

#### A.2.2. Множество допустимых раскрасок

##### A.2.2.1. Склеивание цветов 1 и 2

Построим по раскраске $\rho^*$ новую раскраску $\rho^*_I$, объединив цвета 1 и 2 в один цвет $I$. Раскраска $\rho^*_I$ вполне может оказаться неправильной, но для любых двух одноцветных в $\rho^*_I$ смежных вершин одна из них

имеет в раскраске $\rho^*$ цвет 1, а другая – цвет 2. Любая плохая в $\rho_I^*$ вершина $v$ в исходной раскраске $\rho^*$ либо является плохой, либо все вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ имеют в раскраске $\rho^*$ цвета 1 и 2.

#### A.2.2.2. Множество раскрасок $\mathcal{D}_I$

Изначально положим $\mathcal{D} = \{\rho^*\}$, $\mathcal{D}_I = \{\rho_I^*\}$. Пусть $B = \mathrm{N}'_G(b_k)$, а граф $G'$ получен из $G$ удалением всех ребер, соединяющих $b_k$ с вершинами из $B$.

Рассмотрим произвольную раскраску $\rho_I^1 \in \mathcal{D}_I$. Разобьём множество $B$ на два: пусть множество $U(\rho_I^1)$ составляют все вершины из $B$, являющиеся плохими в раскраске $\rho_I^1$ графа $G'$, а $T(\rho_I^1) = B \setminus U(\rho_I^1)$.

Рассмотрим произвольную вершину $u \in U(\rho_I^1)$. Отметим, что $d_G(u) \geqslant 3$ для любой вершины $u \in U(\rho_I^1)$, следовательно, $d_{G'}(u) \geqslant 2$. Пусть $i_0 = \rho(u)$, $i_1$ – цвет всех вершин из $\mathrm{N}_{G'}(u)$ и $i_0 \neq i_1$. Пусть $J = \{j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$ – произвольный набор цветов, не содержащий $I$ и удовлетворяющий условиям (1), $(J1)$ и $(J2)$ для вершины $u$, графа $G'$ и раскраски $\rho_I^1$. Рассмотрим раскраску $\rho_I^2$, полученную из $\rho_I^1$ в результате применения алгоритма $DN(G', \rho_I^1, u, J)$. Отметим, что $\rho_I^2 \leqslant_{G'} \rho_I^1$, следовательно, $U(\rho_I^2) \subseteq U(\rho_I^1)$. По лемме 3 мы имеем $\rho_I^2 \leqslant_G \rho_I^1$. Поместим раскраску $\rho_I^2$ в множество $\mathcal{D}_I$.

В несколько шагов построим множество допустимых раскрасок $\mathcal{D}_I$, применяя всевозможные указанные процедуры к раскраскам, уже находящимся в $\mathcal{D}_I$. Из конечности множества раскрасок следует конечность построения. Отметим, что для любой раскраски $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$ по построению выполняются свойства

$$\rho'_I \leqslant_G \rho_I^*, \quad U(\rho'_I) \subseteq U(\rho_I^*).$$

Кроме того, в процессе перекрашиваний не добавлялись новые вершины цвета $I$, поэтому из $\rho'_I(v) = I$ следует $\rho_I^*(v) = I$.

#### A.2.2.3. Расклеивание цвета $I$. Множество раскрасок $\mathcal{D}$

Рассмотрим произвольную раскраску $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$. Построим новую раскраску $\rho'$ следующим образом. Для любой вершины $v$ такой, что $\rho'_I(v) = I$ нам известно, что $\rho_I^*(v) = I$. Тогда положим $\rho'(v) = \rho^*(v)$. Таким образом, мы “расклеили” цвет $I$ обратно в цвета 1 и 2.

Нам известно, что $\rho'_I \leqslant_G \rho_I^*$. Так как новых вершин цвета $I$ не добавилось, а при расклеивании цветов мы покрасили вершины цвета $I$ в цвета 1 и 2 в раскраске $\rho'$ так же, как и в $\rho$, то $\rho' \leqslant_G \rho^* \leqslant_G \rho$, следовательно, $\rho'$ – правильная раскраска вершин графа $G$.

Поместим раскраску $\rho'$ в *множество допустимых раскрасок* $\mathcal{D}$. Раскраски множества $\mathcal{D}$ будем называть *допустимыми*. Далее мы всегда будем считать, что раскраски $\rho' \in \mathcal{D}$ и $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$ соответствуют друг другу, то есть, переходят друг в друга при склеивании цветов 1 и 2 в цвет $I$ и описанной выше обратной операции.

Пусть $\rho' \in \mathcal{D}$. Отметим, что для любой вершины $v$ из $\rho'(v) \in \{1, 2\}$ следует $\rho'(v) = \rho^*(v) = \rho(v)$. Следовательно, раскраска $\rho'$ удовлетворяет условию $(C2(k-1))$.

#### A.2.2.4. Свойства допустимых раскрасок

В случае, когда существует допустимая раскраска, для которой не выполняется хотя бы одно из следующих трёх свойств, алгоритм останавливается, предъявляя раскраску $\rho'' <_G \rho$.

1) *В любой допустимой раскраске все вершины множества* $\mathrm{N}_G(a)$ *покрашены так же, как и в* $\rho$ *– в цвет* 1.

**Доказательство.** Предположим, что существуют такие вершина $v \in \mathrm{N}_G(a)$ и раскраска $\rho' \in \mathcal{D}$, что $\rho'(v) \neq \rho(v) = 1$.

Предположим, что *в раскраске* $\rho^*$ *не все вершины из* $\mathrm{N}_G(a)$ *имеют цвет 1.* В пункте A.2.1 мы изменили раскраску $\rho$ на $\rho^*$ в несколько шагов, каждый шаг состоял в применении одного алгоритма $DN$ с множеством цветов $J \not\ni 1$. По пункту 2 замечания 6 за каждое применение алгоритма $DN$ максимум одна вершина цвета 1 могла изменить цвет. Следовательно, на одном из шагов была получена раскраска $\rho^0 \leqslant_G \rho$, в которой ровно одна вершина из $\mathrm{N}_G(a)$ покрашена в цвет, отличный от 1. Тогда вершина $a$ не является плохой в раскраске $\rho^0$, следовательно, $\rho^0 <_G \rho$. Алгоритм останавливается.

Пусть *все вершины из* $\mathrm{N}_G(a)$ *имеют цвет 1 в раскраске* $\rho^*$, *а следовательно, в раскраске* $\rho^*_I$ *все эти вершины имеют цвет* $I$. Тогда $\rho'_I(v) \neq \rho^*_I(v) = I$. Мы изменили раскраску вершин $\rho^*_I$ на раскраску $\rho'_I$ в несколько шагов, каждый шаг состоял в применении одного алгоритма $DN$ с множеством цветов $J \not\ni I$. По пункту 2 замечания 6 за каждое применение алгоритма $DN$ максимум одна вершина цвета $I$ могла изменить цвет. Следовательно, на одном из шагов была получена раскраска $\rho^1_I \in \mathcal{D}_I$, в которой ровно одна вершина из $\mathrm{N}_G(a)$ (назовём её $x$) покрашена в цвет, отличный от $I$. Тогда $\rho^1 \leqslant_G \rho^* \leqslant_G \rho$ и в раскраске $\rho^1$ вершина $a$ не является плохой: у нее ровно один сосед цвета, отличного от 1 – вершина $x$. Таким образом, $\rho^1 <_G \rho$. Алгоритм останавливается. □

2) *Для любой раскраски* $\rho' \in \mathcal{D}$ *последовательность* $b_1, \ldots, b_k$ *– цепь*

*запретов в раскраске $\rho'$, удовлетворяющая условиям $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$. В частности, цвета вершин $b_1, \ldots, b_{k-1}$ в раскрасках $\rho'$ и $\rho$ одинаковы.*

**Доказательство.** По доказанному выше свойству 1, для раскраски $\rho'$ и $s = k$ выполняются все требования леммы 6. Тогда либо выполняется доказываемое свойство, либо существует раскраска $\rho'' <_G \rho' \leqslant_G \rho$. В последнем случае алгоритм останавливается.

3) *Пусть $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$, $u \in U(\rho'_I)$, причем $\rho'_I(u) = I$. Тогда вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$ имеют в раскраске $\rho'_I$ цвет, отличный от $I$.*

**Доказательство.** Все вершины множества $\mathrm{N}_{G'}(u)$ имеют в раскраске $\rho'_I$ один и тот же цвет $i_1$. Предположим, что $i_1 = I$. Так как цвет $I$ образован при склеивании цветов множества $\{1, 2\} = \{c(k), c(k+1)\}$, в силу правильности раскраски $\rho'$ и смежности $u$ с вершиной $b_k$ цвета $\rho'(b_k) = c(k)$ мы имеем $\rho'(u) = c(k+1)$. Тогда цвет всех вершин из $\mathrm{N}_G(u)$ в раскраске $\rho'$ – это $c(k+1)$. Однако, после выполнения пункта А.2.1 таких вершин не было и не появилось в процессе последующих перекрашиваний, так как не добавлялись новые вершины цветов 1 и 2. □

### А.2.3. Минимальная допустимая раскраска

В множестве раскрасок $\mathcal{D}_I$ выберем раскраску $\rho'_I$, для которой $|U(\rho'_I)|$ минимально. Определим набор цветов $C(\rho'_I)$ следующим образом: для каждой вершины $u \in U(\rho'_I)$ поместим в $C(\rho'_I)$ цвет, в который покрашены все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$, а для каждой вершины $t \in T(\rho'_I)$ поместим в $C$ ее цвет $\rho'_I(t)$. В результате получится набор из $|B| \leqslant d-1$ цветов. Отметим, что цвета могут входить в набор $C(\rho'_I)$ более одного раза.

Рассмотрим два случая.

#### А.2.3.1. В наборе $C(\rho'_I)$ не менее двух раз встречается цвет $I$

Так как $|C(\rho'_I)| \leqslant d-1$, а количество цветов равно $d-1$, то в этом наборе не встречается один из цветов $i \neq I$. Постараемся избавить от цвета $i$ вершины множества $U(\rho'_I)$. Пусть $u \in U(\rho'_I)$, $\rho'_I(u) = i$. Пусть $i_0 = i$, а $i_1$ – цвет всех вершин из $\mathrm{N}_{G'}(u)$. Положим $K = \{I, i\}$.

##### А.2.3.1.1. Подбор цветов для алгоритма $DN$

Выберем набор $J = \{j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$ из не входящих в $K$ цветов так, чтобы соблюдались условия (1), $(J1)$ и $(J2)$.

Сначала подберем цвет $j_2$. Он должен отличаться от $i_1$, и, возможно, еще двух цветов (если среди вершин множества $B \setminus \{u\}$ встречается не более, чем два цвета, то по условиям $(J1)$ и $(J2)$ цвет $j_2$ не может быть одним из них). Итого мы имеем не более трех запретов на цвета, не входящие в $K$. Отметим, что в любом случае мы получим $j_2 \neq i_0$, так как $i_0 = i \in K$.

Следующим мы выберем цвет $j_5$. По условию (1) он должен отличаться от цветов $i_1$ и $j_2$. Если все вершины множества $B \setminus \{u\}$ покрашены в один цвет, то $j_5$ по условию $(J1)$ не может совпадать с этим цветом. Итого мы имеем не более трех запретов на цвета, не входящие в $K$.

Цвет $j_3$ должен быть отличен от $i_1, j_2$ и $j_5$, цвет $j_4$ должен быть отличен от $i_1$, $j_2$, $j_3$ и $j_5$ и, наконец, цвет $j_6$ должен быть отличен от $j_2$, $j_3$, $j_4$ и $j_5$. Очевидно, для такого подбора цветов достаточно, чтобы количество цветов, не входящих в $K$, было не менее 5. Таким образом, нам достаточно 8 цветов в исходном наборе (до "склеивания" цветов 1 и 2).

Теперь граф $G'$, вершина $u$, раскраска $\rho'_I$ и наборы цветов $J$ и $K$ удовлетворяют условиям леммы 3.

**А.2.3.1.2. Уничтожение цвета $i$ среди вершин множества $B$**

Выполним алгоритм $DN(G', \rho'_I, u, J)$, пусть в результате получится раскраска $\rho''_I \in \mathcal{D}_I$, по лемме 3 мы имеем $\rho''_I \leqslant_G \rho'_I$.

Отметим, что $\rho''_I(u) \neq \rho'_I(u) = i$ и $U(\rho''_I) = U(\rho'_I)$. В самом деле, как доказано в разделе А.2.2.2, $U(\rho''_I) \subseteq U(\rho'_I)$, но строгое включение невозможно ввиду минимальности $U(\rho'_I)$. Если же $\rho''_I(u) = \rho'_I(u) = i$ то по замечанию 3 вершина $u$ не является плохой в полученной раскраске $\rho''$ графа $G'$, следовательно, $U(\rho''_I) \subset U(\rho'_I) \setminus \{u\}$, противоречие.

Так как новых вершин цвета $i$ не добавилось, то количество вершин цвета $i$ в $U(\rho''_I)$ меньше, чем в $U(\rho'_I)$ и ни одна из вершин множества $T(\rho''_I)$ не покрашена в цвет $i$. Таким образом, мы за несколько шагов найдём такую раскраску $\rho^1_I \in \mathcal{D}_I$, что в множестве $U(\rho^1_I)$ нет вершин цвета $i$ и в наборе $C(\rho^1_I)$ нет цвета $i$. Тогда в раскраске $\rho^1$ у вершины $b_k$ нет запретов на цвет $i$. В этом случае алгоритм переходит с раскраской $\rho^1$ к разделу А.3, где обязательно завершит работу.

**А.2.3.2. В наборе $C(\rho'_I)$ не более одного раза встречается цвет $I$**

Пусть $u \in U(\rho'_I)$, $\rho'_I(u) = I$. Все вершины множества $\mathrm{N}_{G'}(u)$ имеют в раскраске $\rho'_I$ цвет $i_1$, причем выше (раздел А.2.2.4, свойство 3) мы

доказали, что $i_1 \neq I$. Аналогично пункту А.2.3.1 мы с помощью применения серии алгоритмов $DN$ изменим раскраску $\rho'_I$ на $\rho^1_I \in \mathcal{D}_I$ так, чтобы никакая вершина множества $U(\rho^1_I)$ не была покрашена в цвет $I$ и в наборе $C(\rho^1_I)$ было не более одного вхождения цвета $I$. (Единственное отличие состоит в отсутствии необходимости запрещать для набора цветов $J$ цвет $i$, поэтому теперь хватит семи цветов.)

**А.2.3.2.1. Проверка условий** $(C1(k))$ **и** $(C2(k))$

Напомним, что по свойству 2 допустимых раскрасок для раскраски $\rho^1 \in \mathcal{D}$ выполнены условия $(C1(k-1)$ и $(C2(k-1))$. Остается доказать лишь выполнение условий для вершины $b_k$.

Каждый запрет типа 1 на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$ в раскраске $\rho^1$ соответствует вершине $x \in \mathrm{N}'_G(b_k) = B$ цвета $\rho^1_I(x) = I$. Из предыдущего пункта следует, что $x \in T(\rho^1_I)$. Каждый запрет типа 2 на цвет $c(k+1)$ имеет базовую вершину $u \in U(\rho^1_I)$, для которой все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$ покрашены в $\rho^1_I$ в цвет $I$. Таким образом, каждый запрет на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$ в раскраске $\rho^1$ соответствует вхождению в набор $C(\rho^1_I)$ цвета $I$. Следовательно, такой запрет не более чем один.

Если запрет на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$ в раскраске $\rho^1$ существует, то выполнено условие $C1(k)$. Если же у вершины $b_k$ нет запретов на цвет $c(k+1)$, то применив для $s = k$ и раскраски $\rho^1$ лемму 5 мы получим, что существует такая раскраска $\rho^2$, что $\rho^2 <_G \rho^1 \leqslant_G \rho$. В этом случае алгоритм останавливается.

Предположим, что не выполняется условие $C2(k)$. Тогда существует такая вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_k)$, что все вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ покрашены в $\rho^1_I$ в цвета 1 и 2, но $v$ не является базовой вершиной запрета типа 2 для вершины $b_k$. Понятно, что $v \in U(\rho^1_I)$ и все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(v)$ имеют в раскраске $\rho^1_I$ цвет $I$, то есть, вершине $v$ соответствует вхождение цвета $I$ в набор $C(\rho^1_I)$, не соответствующее запрету на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$. Отметим, что каждому запрету на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$ должно соответствовать вхождение цвета $I$ в набор $C(\rho^1_I)$. Поскольку единственное вхождение цвета $I$ в $C(\rho^1_I)$ не соответствует запрету, в рассматриваемом случае запретов на цвет $c(k+1)$ для вершины $b_k$ в раскраске $\rho^1$ нет и алгоритм, как объяснено выше, закончит свою работу.

## А.3. Отсутствие запрета на цвет $i \neq c(k+1)$

Итак, переходим к последнему оставшемуся случаю, когда у вершины $b_k$ нет запрета на цвет $i \notin \{1, 2\}$. Однако, это вовсе не означает,

что $b_k$ можно перекрасить в цвет $i$: этому может помешать предок вершины $b_k$. Имеющуюся на данный момент раскраску будем обозначать через $\rho^1$. Мы знаем, что $\rho^1 \leqslant_G \rho$. Нашей целью будет завершение работы алгоритма. Рассмотрим два случая.

**A.3.1.** $\mathrm{asc}(b_k) = b_{k-1}$

В этом случае $\rho^1(b_{k-1}) = c(k-1) \neq i$, так что раскраска останется правильной и после перекрашивания $b_k$ в цвет $i$, однако, вершина $b_{k-1}$ может стать плохой: в том случае, если $b_{k-1}$ – опасный сосед $b_k$ и все вершины из $\mathrm{N}_G(b_{k-1}) \setminus \{b_k\}$ имеют цвет $i$ (см. рисунок 2, слева). В этом случае рассмотрим граф $G'$, полученный из $G$ удалением всех ребер от $b_k$ к ее соседям. В этом графе $b_{k-1}$ – плохая вершина. Положим $i_0 = \rho^1(b_{k-1}) = c(k-1)$, $i_1 = i$ – цвет всех вершин из $\mathrm{N}_{G'}(b_{k-1})$. Положим $K = \{1, 2, i\}$. Построим подходящий для применения леммы 3 набор цветов $J$. Как и в пункте A.2.3.1, для построения достаточно восьми цветов. Пусть $\rho'$ – раскраска, полученная в результате применения алгоритма $DN(G', \rho^1, b_{k-1}, J)$. По лемме 3 мы имеем $\rho' \leqslant_G \rho^1 \leqslant_G \rho$. Отметим, что новых запретов на цвета 1,2, $i$ в раскраске $\rho'$ не добавилось.

Единственной вершиной цвета 1 или 2, которая при перекраске могла изменить свой цвет, является вершина $b_{k-1}$. Если вершина $b_{k-1}$ изменила свой цвет и $b_{k-1} \in \mathrm{N}_G(a)$ , то вершина $a$ не является плохой в раскраске $\rho'$, следовательно, $\rho' <_G \rho$, алгоритм останавливается. В оставшемся случае все вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ имеют в раскраске $\rho'$ тот же цвет, что и в исходной раскраске $\rho$. Таким образом, для раскраски $\rho'$ и $s = k$ выполнены все требования леммы 6 и либо существует раскраска $\rho'' <_G \rho' \leqslant_G \rho$ (в этом случае алгоритм останавливается), либо (именно этот случай мы будем рассматривать дальше) для раскраски $\rho'$ последовательность $b_1, \ldots, b_k$ – цепь запретов, удовлетворяющая условиям $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$.

Так как $\rho'(b_{k-1}) = \rho^1(b_{k-1})$, ввиду замечания 3 вершина $b_{k-1}$ перестала быть плохой в графе $G'$, то есть, вершина $b_k$ перестала быть опасным соседом $b_{k-1}$ в графе $G$. Запретов на цвет $i$ для вершины $b_k$ не добавилось и мы теперь можем перекрасить вершину $b_k$ в цвет $i$. В результате у вершины $b_{k-1}$ в полученной раскраске $\rho''$ нет запрета на цвет $c(k)$ (изменив цвет $b_k$, мы убрали существоваший ранее единственный запрет, а новых не появилось) и $\rho'' \leqslant_G \rho' \leqslant_G \rho$. Отметим, что для раскраски $\rho''$ последовательность $b_1, \ldots, b_{k-1}$ – цепь запретов, удовлетворяющая условиям $(C1(k-2))$ и $(C2(k-2))$, поэтому применив лемму 5 для $s = k-1$ и раскраски $\rho''$, мы получим,

что существует раскраска $\rho'''$ такая, что $\rho''' <_G \rho'' \leqslant_G \rho$. Алгоритм останавливается.

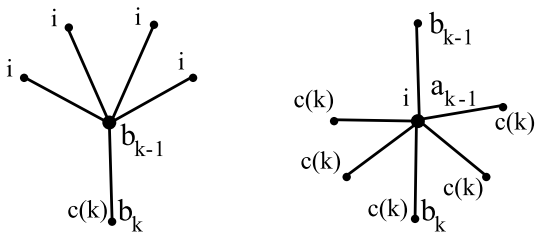


Рис. 2. Возможные проблемы при попытке перекрасить $b_k$.

**A.3.2.** $\mathrm{asc}(b_k) = a_{k-1} \neq b_{k-1}$

По построению, $b_{k-1}$ в раскраске $\rho^1$ является единственной вершиной отличного от $c(k)$ цвета в $\mathrm{N}_G(a_{k-1})$ и $d_G(a_{k-1}) \geqslant 3$, следовательно, $a_{k-1}$ не может быть опасным соседом $b_k$. Однако, вершина $a_{k-1}$ может иметь цвет $i$, тогда перекрашивание $b_k$ в цвет $i$ нарушит правильность раскраски (см. рисунок 2, справа). Пусть граф $G'$ получен из $G$ удалением всех ребер от $b_{k-1}$ к ее соседям, в этом графе $a_{k-1}$ – плохая вершина. Как и в предыдущем пункте, положим $K = \{1, 2, i\}$, аналогично определим набор цветов $J$ и изменим раскраску на $\rho'$ с помощью алгоритма $DN(G', \rho^1, a_{k-1}, J)$. По лемме 3 мы имеем $\rho' \leqslant_G \rho^1 \leqslant_G \rho$. Отметим, что новых запретов на цвета 1,2, $i$ не добавилось. Аналогично пункту A.3.1, останется рассмотреть случай, когда $b_1, \ldots, b_k$ – цепь запретов в раскраске $\rho'$, удовлетворяющая условиям $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$.

Тогда, в частности, сохранили свой цвет все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(a_{k-1}) = \mathrm{N}_G(a_{k-1}) \setminus \{b_{k-1}\}$: иначе у вершины $b_{k-1}$ исчез запрет типа 2 на цвет $c(k)$. Следовательно, $\rho'(a_{k-1}) \neq \rho(a_{k-1}) = i$ ввиду замечания 3. Так как у вершины $b_k$ не добавилось запретов на цвет $i$, мы можем перекрасить $b_k$ в цвет $i$, не нарушив правильности раскраски и не создавая новых плохих вершин. Мы получили новую раскраску $\rho'' \leqslant_G \rho$, в которой у вершины $b_{k-1}$ нет запрета на цвет $c(k)$. Отметим, что для раскраски $\rho''$ последовательность $b_1, \ldots, b_{k-1}$ — цепь запретов, удовлетворяющая условиям $(C1(k-2))$ и $(C2(k-2))$, поэтому применив лемму 5 для $s = k-1$ и раскраски $\rho''$, мы получим, что существует раскраска $\rho'''$ такая, что $\rho''' <_G \rho'' \leqslant_G \rho$. Алгоритм останавливается.

### 3.4. Выводы.

**Доказательство теоремы 1.** Итак, рассмотрим правильную раскраску $\rho$ с минимальным количеством плохих вершин, и предположим, что $a$ – плохая в $\rho$ вершина. Тогда запустим алгоритм построения цепи запретов с началом в плохой вершине $a$. Доказано, что вершины в цепи не могут повторяться. Это в силу конечности графа означает, что в некоторый момент алгоритм остановится и мы получим раскраску $\rho' <_G \rho$, что противоречит выбору $\rho$. Единственная остающаяся возможность заключается в отсутствии плохих вершин в раскраске $\rho$. Но тогда эта раскраска является динамической. $\square$

## 4. Доказательство теоремы 2

Напомним, что при $n \geqslant 4$ *подразбиением* полного графа $K_n$ мы называем любой граф $H$, полученный из полного графа $K_n$ следующей операцией: заменой нескольких ребер графа $K_n$ на цепочки длины 2 (с каждой такой цепочкой добавляется одна новая вершина степени 2). Вершины графа $H$, являющиеся вершинами исходного полного графа, назовем *главными*, а добавленные вершины степени 2 – *реберными*.

Пусть класс графов $\mathcal{K}_n$ состоит из полного графа $K_n$ и всех его подразбиений.

**Лемма 7.** *Для графа $H \in \mathcal{K}_{d+1}$ при $d \geqslant 5$ выполняются следующие утверждения.*

1) $\chi_2(H) = d + 1$.

2) *Пусть $H \neq K_{d+1}$, $t \in V(H)$ – реберная вершина. Тогда можно построить правильную раскраску вершин графа $H$ в $d$ цветов, в которой условие о наличии хотя бы двух разных цветов в окрестности вершины будет соблюдаться для всех вершин, кроме $t$.*

**Доказательство.** 1) Отметим, что в динамической раскраске любые две главные вершины $u$ и $v$ графа $H$ должны быть разноцветными: если они смежны, то это очевидно. Если $u$ и $v$ несмежны, то их соединяет путь длины два $uzv$, где $z$ – реберная вершина. Тогда $\mathrm{N}_H(z) = \{u, v\}$, следовательно, вершины $u$ и $v$ имеют разные цвета. Таким образом, $\chi_2(H) \geqslant d + 1$.

Несложно построить динамическую раскраску вершин графа $H$ в $d+1$ цвет: покрасим все главные вершины в разные цвета, после чего приступим к последовательной покраске реберных вершин. Рассмотрим очередную реберную вершину $z$, смежную с главными вершинами $u$ и $v$. Вершину $z$ нельзя красить в цвета вершин $u$ и $v$. Кроме

того, если вершина $z$ – последняя непокрашенная вершина из $\mathrm{N}_H(u)$, а все остальные вершины множества $\mathrm{N}_H(u)$ покрашены в один цвет, то нельзя красить $z$ в этот цвет. Аналогичный запрет на цвет для $z$ может быть наложен из-за цветов соседей вершины $v$. Мы получаем не более четырех запретов на цвет $z$. Ввиду того, что количество цветов не менее 5, мы легко можем покрасить вершину $z$. Нетрудно видеть, что в итоге получится динамическая раскраска: цвета всех главных вершин изначально различные, поэтому вершины из окрестности любой реберной вершины будут разноцветными. О соблюдении условий для главных вершин мы заботились при покраске реберных вершин.

2) Пусть $\mathrm{N}_G(t) = \{a, b\}$, тогда $a$ и $b$ – две главные вершины графа $H$. Покрасим $d+1$ главную вершину графа $H$ в $d$ цветов: вершины $a$ и $b$ будут покрашены в цвет 1, остальные вершины покрасим по одной в цвета 2, ... , $d$. Способ покраски реберных вершин не изменится. □

**Доказательство теоремы 2.** Пусть $d \geqslant 8$. Ввиду леммы 7 нам достаточно рассмотреть связный граф $G$, не принадлежащий классу $\mathcal{K}_{d+1}$ и доказать оценку $\chi_2(G) \leqslant d$. Мы докажем индукцией по количеству вершин в графе $G$ существование динамической раскраски его вершин в $d$ цветов.

**Базу индукции** составят случай графа без вершин степени 2, который проверен в теореме 1 и тривиальный случай графа, в котором все вершины имеют степень не более 2, который мы сейчас рассмотрим.

Пусть $G$ – связный граф, $\Delta(G) = 2$. Тогда $G$ – это простой цикл $C_n$ или простой путь $P_n$. При $n \leqslant 3$, очевидно, $\chi_2(C_n) = \chi_2(P_n) = n$. Легко видеть, что $\chi_2(P_n) = 3$ при $n > 3$ и $\chi_2(C_n) = 3$ при $n$ кратном 3. Остается заметить, что $\chi_2(C_5) = 5$ и $\chi_2(C_n) = 4$ для всех $n > 3$, не кратных 3 и отличных от 5.

**Индукционный переход.**
Пусть $u \in V(G)$, $d_G(u) = 2$, $\mathrm{N}_G(u) = \{v, w\}$. Положим $G' = G - u$, если $v$ и $w$ смежны и $G' = G - u + vw$ в противном случае. Очевидно, $\Delta(G') \leqslant \Delta(G) \leqslant d$, граф $G'$ связен. Рассмотрим два случая.

**1**. Пусть $G' \notin \mathcal{K}_{d+1}$. Тогда существует динамическая раскраска вершин графа $G'$ в $d$ цветов, причем $\rho(v) \neq \rho(w)$. Таким образом, две вершины из $\mathrm{N}_G(u)$ в раскраске $\rho$ разноцветны.

Дополним раскраску до динамической раскраски графа $G$. Посмотрим, в какие цвета нельзя красить вершину $u$. Во-первых, это цвета $\rho(v)$ и $\rho(w)$. Во-вторых, все вершины из $\mathrm{N}_G(v) \setminus \{u\}$ могут быть по-

крашены в один цвет $i$ – тогда должно выполняться условие $\rho(u) \neq i$. Еще один запрет может добавиться, если все вершины из $\mathrm{N}_G(w) \setminus \{u\}$ покрашены в один цвет. Итого мы имеем максимум четыре запрета. Поскольку количество цветов $d \geqslant 8$, мы можем покрасить вершину $u$, сделав раскраску вершин графа $G$ динамической.

**2**. Предположим, что $G' \in \mathcal{K}_{d+1}$. Так как $v$ и $w$ – две смежные вершины графа $G'$, то хотя бы одна из них является главной (пусть это $v$). Тогда $d_{G'}(v) = d \geqslant d_G(v)$, откуда немедленно следует, что $G' = G - u + vw$ (в случае $G' = G - u$ мы имеем $d_{G'}(v) = d_G(v) - 1$).

Пусть вершина $w$ – главная. Тогда $G \in \mathcal{K}_{d+1}$, что по условию теоремы не так. Противоречие.

Следовательно, вершина $w$ – рёберная. По пункту 2 леммы 7 существует "почти динамическая" раскраска $\rho$ вершин графа $G'$, в которой единственное нарушение условия динамичности будет в одноцветности соседей вершины $w$. Рассмотрим эту раскраску. Пусть $\mathrm{N}_{G'}(w) = \{a, v\}$ и $\rho(v) = \rho(a) = 1$, $\rho(w) = 2$. В графе $G$ две главные вершины $v$ и $a$ оказываются соединены цепочкой из трех ребер $vuwa$. Перенесем цвета раскраски $\rho$ на вершины графа $G$ и дополним ее, покрасив вершину $u$. Эту вершину нельзя красить в цвета $1 = \rho(v)$ и $2 = \rho(w)$. Кроме того, все вершины из $\mathrm{N}_G(v) \setminus \{u\}$ могут быть покрашены в один цвет $i$ – тогда должно выполняться условие $\rho(u) \neq i$. Поскольку количество цветов $d \geqslant 8$, мы можем покрасить вершину $u$, сделав раскраску вершин графа $G$ динамической.

Автор благодарен Н. В. Гравину за помощь в работе над статьей.

## Литература

1. R. L. Brooks, *On coloring the nodes of network*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941), 194–197.
2. Ф. Харари, *Теория графов*. Мир, М. (1973). Пер. с англ. F. Harary, *Graph theory* (1969)
3. H. Hind, M. Molloy, B. Reed, *Colouring a graph frugally*, Combinatorica **17**, No. 4 (1997), 469–482.
4. B. Reed, *A strengthening of Brooks' theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **76** No. 2 (1999), 136–149.
5. J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York (1976).
6. H.-J. Lui, B. Montgomery, H. Poon, *Upper bounds of dynamic chromatic number*, Ars Combinatoria **68** (2003), 193–201.
7. Н. В. Гравин, *Невырожденные раскраски в теореме Брукса*. Дискретная математика, **21** No. 4 (2009), 106–128.

Dynamic proper vertex colorings of the graph. D. V. Karpov

Let a subdivision of the complete graph $K_n$ be any graph, which can be constructed from $K_n$ by substituting some edges of $K_n$ with chains of two edges (every such chain adds to a graph a new vertex of degree 2).

Let $d \geqslant 8$, $G$ is a connected graph with maximal vertex degree $d$. We proof that there is a proper dynamic vertex coloring of $G$ with $d$ colors iff $G$ is distinct from $K_{d+1}$ and its subdivisions.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С-Петербург, Россия

*E-mail*: dvk@pdmi.ras.ru

Поступило 29 октября 2010 г.