Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 381, 2010 г.

Н. В. Гравин

ПОСТРОЕНИЕ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА ГРАФА С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ ЛИСТЬЕВ

1. Введение

В. Г. Визинг [1] в 1968 году поставил задачу поиска в связном графе остовного дерева с наибольшим числом висячих вершин. В 1973 году B. Zelinka [2] предложил не полиномиальный алгоритм находящий дерево с масимальным количеством висячих вершин. Известно, что задача поиска остовного дерева с наибольшим количеством висячих вершин является NP-полной даже в классе кубических графов. Задача поиска остовного дерева с максимальным количеством листьев рассматривалась многими авторами [6, 5, 9, 7, 8].

Определим $\mathcal{L}(G)$, как максимум количества висячих вершин в остовных деревьях графа G. В 1981 году Storer в своей работе [3] заявил, что $\mathcal{L}(G) \geq \frac{1}{4}N + 2$ для всех 3-регулярных графов на N вершинах. Затем N. Linial [10] выдвинул гипотезу, что $\mathcal{L}(G) \geq \frac{\delta-2}{\delta+1}N + c_\delta$ для графов с минимальной степенью хотя бы δ, где c_δ зависит только от δ. В работе [4] была доказана гипотеза для $\delta = 4, \delta = 5$ (для $\delta = 3$ гипотеза была доказана еще раньше в работе [5] с помощью метода "мертвых вершин"). Там же, в работе [4], построена бесконечная серия примеров показывающая, что эта оценка асимптотически точна для $\delta = 4$, $\delta = 5$, $\delta = 3$ и $c_\delta = 2$. Для $\delta = 6$ и выше, задача оказалась существенно труднее, в связи с чем возникли сомнения, что гипотеза верна в общем случае. При помощи вероятностного метода в работе [11] было показано существование графов с $\mathcal{L}(G) = (1-(1+o(1))\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1})N$, что опровергает гипотезу для больших δ (более подробно см. [12] и [13]).

В настоящей работе оценка доказывается для **произвольного** графа, в отличие от предыдущих работ, без ограничений на минимальную степень. А именно доказывается, что в графе G с k вершинами степени хотя бы четыре и k' вершинами степени три

Ключевые слова: Остовное дерево, количество листьев, висячие вершины.
Автор благодарит за поддержку грант РФФИ 09-01-12137-офи-м.

$\mathcal{L}(G) \geqslant \lceil \frac{2}{5} \cdot k + \frac{2}{15} \cdot k' \rceil$. Таким образом, если пытаться оценить $\mathcal{L}(G)$ через количество вершин степени хотя бы 4, то вершины степени 2 и 1 "не мешают" в этой оценке, а вершины степени 3 даже немного увеличивают количество висячих вершин. В нашей работе предъявляется алгоритм, работающий полиномиальное время, на выходе выдающий остовное дерево, количество висячих вершин которого удовлетворяет неравенству указанному выше.

2. Обозначения

Дадим несколько необходимых нам определений и обозначений. Через $E(G)$ мы будем обозначать множество всех ребер графа G. Пусть $S \subset V(G)$, тогда через $G(S)$ обозначим индуцированный подграф графа G на множестве вершин S. Через $d(x)$ будем обозначать степень вершины x в графе G. Пусть $S \subseteq V(G)$ через $G - S$ мы будем обозначать граф $G(V \setminus S)$.

Определение 1. *Назовем* ***помеченным графом*** *пару (G, S), где G – граф, а $S \subset V(G)$, при этом множество S вершин графа назовем* ***помеченными вершинами****. Пусть $\mathcal{G} = (G, S)$ помеченный граф и $P \subseteq V(G)$, тогда* ***индуцированным помеченным подграфом*** *на множестве вершин P назовем помеченный граф $(G(P), S \cap P)$.*

Определение 2. *Назовем* ***помеченным*** *корневое дерево с помеченной корневой вершиной (не важно помечены ли остальные вершины). Для помеченного графа $\mathcal{G}$ назовем* ***помеченным остовным лесом*Ъ** *любой остовный лес состоящий только из помеченных деревьев.*

Определение 3. *Определим величину $L(T)$ в помеченном дереве T, вычисляемую по следующему правилу.*

1) Если $|V(T)| > 1$, то $L(T)$ – это количество некорневых висячих вершин в дереве T минус один.

2) Если $|V(T)| = 1$, то $L(T) := 0$.

Для помеченного леса $\mathcal{F}$ определим величину $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \sum L(T_i)$, где сумма берется по всем деревьям T_i в $\mathcal{F}$.

Пусть $S_1 \subset V(G)$ таково, что граф $G(S_1)$ связен. Рассмотрим множество $S_2 \subset V(G)$, состоящее из всех вершин не из S_1, смежных хотя бы с одной вершиной из S_1. Определим S_3, как $V(G) \setminus (S_1 \cup S_2)$. Тогда из S_3 в S_1 нет ребер.

Определение 4. *Назовем пару множеств (S_1, S_2) древесной парой, а множество S_3 назовем остаточным множеством пары.*

Замечание 1. Для древесной пары (S_1, S_2) существует дерево на множестве вершин $S_1 \cup S_2$, при этом все вершины из S_2 в нем висячие.

Доказательтво. Рассмотрим остовное дерево на множестве вершин S_1. Затем проведем по ребру из каждой вершины S_2 в S_1. Полученное дерево и будет искомым деревом. □

3. Алгоритм

3.1. Общая схема

Вместо поиска остовного дерева в графе G мы пометим только одну вершину, и будем искать помеченный остовный лес в помеченном графе $\mathcal{G}$. Наш алгоритм будет действовать следующим образом:

1. Пытаемся выбрать в связном помеченном графе $\mathcal{G}$ "хорошую" древесную пару множств (S_1, S_2) с небольшим количеством вершин ($|S_1| + |S_2|$ не больше некоторой константы). Точное определение "хорошей" пары мы привидем в конце текущей секции. В секции 4 мы докажем:

- Либо существование такой пары.
- Либо найдем в $\mathcal{G}$ "хорошее" помеченое дерево состоящее из одной вершины. В этом случае мы выкидываем эту вершину из $\mathcal{G}$ и помечаем всех ее соседей. После чего опять повторям шаг 1.
- Либо найдем "хороший" помеченный остовный лес. В последнем случае алгоритм прекращает работу для данного графа $\mathcal{G}$.

2. Пока это возможно, пытаемся расширить (S_1, S_2) до другой древесной пары (S_1', S_2') следующим допустимым типом расширений. Если в S_2 есть вершина v, смежная, по крайней мере с двумя вершинами остаточного множества S_3. Пусть v смежна в S_3 с $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Положим $(S_1' = S_1 \cup \{v\}, S_2' = S_2 \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2, \cdots, v_i\})$. (См. рис. 1)
   В конце мы получим некотрую древесную пару (P_1, P_2), для которой нельзя более применить никакое из расширений допустимого вида.
3. Удалим из графа все вершины $P_1 \cup P_2$ и пометим вершины, которые были смежны с P_2. Тем самым, говоря неформально, помеченность вершины v будет означать в нашем случае, что когда-то раньше мы построили дерево, к которому можно подвесить v. Для каждой новой помеченной вершины запомним произвольного ее предка в

P_2. После чего для каждой из оставшихся компонент связности запустим по очереди шаг 1.

4. Если в $V(\mathcal{G})$ остались только непомеченные вершины степени не больше 2 и помеченные степени не больше 1, выберем произвольный помеченный остовный лес.
5. В конце алгоритма мы получим помеченный остовный лес, из которого потом будет легко изготовить остовное дерево в исходном графе G с нужным количеством листьев.

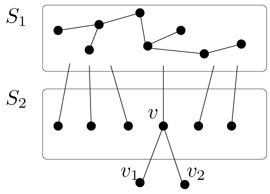

Рис. 1. Пример допустимого расширения.

3.2. Анализ алгоритма

Помимо случая, когда наш исходный граф G содержит ровно одну помеченную вершину, наш алгоритм с тем же успехом можно применять к графу $\mathcal{G}$ с произвольным числом помеченных вершин.

Определение 5. *Для множества $V(\mathcal{G})$ в помеченном графе $\mathcal{G}$ определим несколько величин:*

- g_4 *количество вершин множества $V(\mathcal{G})$ степени, по крайней мере* 4.
- $\dot{g}_3$ *количество помеченных вершин множества $V(\mathcal{G})$ степени* 3.
- g_3 *количество непомеченных вершин степени* 3.
- $\dot{g}_2$ *количество помеченных вершин степени* 2.

Докажем, следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть в связном помеченном графе $\mathcal{G} = (G, S)$ есть, по крайней мере, одна помеченная вершина, тогда наш алгоритм найдет в нем помеченный остовный лес $\mathcal{F}$ с*

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) \geq \lceil \frac{2}{5}g_4 + \frac{4}{15}\dot{g}_3 + \frac{2}{15}\dot{g}_2 + \frac{2}{15}g_3 \rceil.$$

Доказательство. Пусть $N = |V(G)|$. Будем доказывать нашу теорему индукцией по N из предположения, что для всех помеченных графов с меньшим количеством вершин выполняется утверждение теоремы.

База индукции. В качестве базы разберем случай, когда $\lceil \frac{2}{5}g_4 + \frac{4}{15}\dot{g}_3 + \frac{2}{15}\dot{g}_2 + \frac{2}{15}g_3\rceil = 0$. Заметим, что по определению $L(T) \geq 0$ для любого дерева T из остовного леса. Поэтому, выбрав любое остовное дерево в $\mathcal{G}$, с корнем в помеченной вершине, мы получим остовный лес $\mathcal{F}$ с $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \geq 0$.

Переход. В следующей части доказательства мы определим достаточное условие того, что древесная пара (S_1, S_2) "хорошая", и завершим индукционный переход при наличии в помеченном графе $\mathcal{G} = (G, S)$ "хорошей" пары.

Обозначим через P_3 остаточное множество древесной пары (P_1, P_2). Построим дерево T' на множестве вершин $P_1 \cup P_2$ с множеством висячих вершин, содержащим P_2 (согласно замечанию 1 такое дерево обязательно найдется).

Пусть $P_3^1, P_3^2, \dots, P_3^m$ – компоненты связности графа $G(P_3)$, а B – множество всех непомеченных вершин P_3 графа $\mathcal{G}$, которые смежны хотя бы с одной вершиной из P_2 (в шаге 2 алгоритма B это множество новых помеченных вершин, когда мы удалили $P_1 \cup P_2$). Применим предположение индукции для компонент связности $P_3^1, P_3^2, \dots, P_3^m$ помеченного графа $\mathcal{G}(P_3)$. В каждой из компонент мы получим помеченный остовный лес $\mathcal{F}_i$. В этих лесах рассмотрим множество всех помеченных деревьев $T_1, T_2, \dots, T_t$, у которых корень лежит в B. Из каждого корня такого дерева ведет ребро в множество P_2, "подвесим" тогда все эти деревья к T' (см. рис. 2). Получится новое дерево T, которое вместе с оставшимися деревьями даст нам некторый "частично" помеченный лес F (все деревья кроме T будут помеченными) в исходном помеченном графе $\mathcal{G}$. Попытаемся сделать из F помеченный лес, для этого рассмотрим несколько вариантов.

1. Если среди вершин из множества P_1 есть помеченная вершина, будем считать ее корнем T. Тогда T будет помеченным деревом и F будет помеченным остовным лесом.
2. В противном случае, если в T найдется помеченная вершина, то будем считать ее корнем T.
3. Иначе найдется помеченное дерево T_x, в котором есть вершина смежная с вершиной из T. Проведя ребро между этими двумя вершинами, получим новое помеченное дерево.

Получившийся помеченный остовный лес обозначим за $\mathcal{F}$. Попытаемся оценить $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

В случаях 2 и 3 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ будет не более чем на один меньше, чем в случае 1, если бы мы пометили в дереве T какую-нибудь вершину из

P_1. (Для случая 3 при объединении деревьев T_x и T общее количество висячих вершин уменьшается не более чем на 2, при этом, в силу определения $L(T)$, мы получаем "+1" за счет того, что общее количество деревьев в лесу уменьшилось).

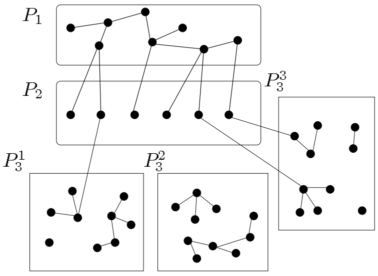

Рис. 2. Дерево T.

Рассмотрим подробно случай 1. Тогда T – помеченное дерево. Пусть t' это количество вершин в P_2, к которым "подвесили" помеченные деревья $T_1, T_2, \dots, T_t$. Понятно, что $t \geq t'$. Получаем тогда

$$L(T) \geq |P_2| - 1 + \sum_{i=1}^{t} L(T_i) + t - t' \geq |P_2| - 1 + \sum_{i=1}^{t} L(T_i).$$

Таким образом, мы нашли помеченный остовный лес $\mathcal{F}$, для которого

$$\mathcal{L}(F) \geq \sum \mathcal{L}(\mathcal{F}_i) + |P_2| - 1. \tag{1}$$

Аналогично числам $g_4, \dot{g}_3, g_3, \dot{g}_2$ определим в исходном графе $\mathcal{G}$ для множества P_3 величины $p_4, \dot{p}_3, p_3, \dot{p}_2$ и для множества $P_1 \cup P_2$ величины $a_4, \dot{a}_3, a_3, \dot{a}_2$. Кроме того, в $P_1 \cup P_2$ обозначим через a_1 количество непомеченных вершины степени не больше чем 2 и вершин степени 1. Ясно, что $a_4 + \dot{a}_3 + a_3 + \dot{a}_2 + a_1 = |P_1| + |P_2|$.

Пусть r – количество ребер графа $\mathcal{G}$ ведущих из P_2 в P_3. Тогда, приминив индукционное предположение для каждой компоненты связности P_3^i, получим следующее неравенство:

$$\sum \mathcal{L}(\mathcal{F}_i) \geq \lceil \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}\dot{p}_3 + \frac{2}{15}\dot{p}_2 + \frac{2}{15}p_3 - \frac{2}{15}r \rceil. \tag{2}$$

Объясним, почему в правой части формулы (2) стоит именно такое число. Заметим, что при удалении одного ребра $\{u, v\} \in E(\mathcal{G})$, где $u \in P_2$, $v \in P_3$, и добавлении v в множество помеченных вершин (если, конечно, v не была помеченной) сумма всех p_i и $\dot{p}_i$ с соответсвующими коэффициентами уменьшается не более чем на $\frac{2}{15}$. Действительно, вершина степени 4 становится помеченной вершиной степени 3, помеченная вершина степени 3 становится помеченной вершиной степени 2, помеченная вершина степени 2 становится вершиной степени 1, непомеченная вершина степени 3 становится помеченной вершиной степени 2.

Из неравенств (1) и (2) следует, что $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ не меньше, чем

$$\lceil \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}\dot{p}_3 + \frac{2}{15}\dot{p}_2 + \frac{2}{15}p_3 - \frac{2}{15}r \rceil + |P_2| - 1.$$

Нам нужно доказать, что это количество не меньше чем

$$\lceil \frac{2}{5}(p_4 + a_4) + \frac{4}{15}(\dot{p}_3 + \dot{a}_3) + \frac{2}{15}(\dot{p}_2 + \dot{a}_2) + \frac{2}{15}(p_3 + a_3) \rceil$$
$$= \lceil \frac{2}{5}g_4 + \frac{4}{15}\dot{g}_3 + \frac{2}{15}\dot{g}_2 + \frac{2}{15}g_3 \rceil.$$

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}\dot{p}_3 + \frac{2}{15}\dot{p}_2 + \frac{2}{15}p_3 - \frac{2}{15}r + |P_2| - 1$$
$$\geq \frac{2}{5}(p_4 + a_4) + \frac{4}{15}(\dot{p}_3 + \dot{a}_3) + \frac{2}{15}(\dot{p}_2 + \dot{a}_2) + \frac{2}{15}(p_3 + b_3).$$

То есть, что

$$|P_2| - \frac{2}{15}r - 1 - (\frac{2}{5}a_4 + \frac{4}{15}\dot{a}_3 + \frac{2}{15}\dot{a}_2 + \frac{2}{15}a_3) \geq 0. \qquad (3)$$

Обозначим через $\Delta_1 := |P_2| - |P_1|$ и $\Delta_2 := |P_2| - r$. В силу того, что из любой вершины P_2 ведет не более одного ребра, Δ_2 равно числу вершин P_2 не смежных ни с чем в P_3.

Легко проверить, что в процессе расширения древесной пары (S_1, S_2) следующие две величины не будут уменьшаться.

$\Delta_1(S_1, S_2) := |S_2| - |S_1|$.

$\Delta_2(S_1, S_2)$ – количество вершин в S_2, не смежных ни с чем кроме вершин из $S_1 \cup S_2$.

Таким образом $\Delta_1 \geq \Delta_1(S_1, S_2)$ и $\Delta_2 \geq \Delta_2(S_1, S_2)$. Перепишем неравенство (3).

$$\frac{2}{15}\Delta_2+\frac{6}{15}(|P_2|+|P_1|)+\frac{6}{15}\Delta_1+\frac{1}{15}|P_2|-1-(\frac{2}{5}a_4+\frac{4}{15}\dot{a}_3+\frac{2}{15}\dot{a}_2+\frac{2}{15}a_3)\geq 0.$$

Как мы знаем $|P_1|+|P_2|=a_4+\dot{a}_3+\dot{a}_2+a_3+a_1$. Переписывая последнее неравенство получаем:

$$\frac{2}{15}\Delta_2+\frac{6}{15}\Delta_1+\frac{1}{15}|P_2|+\frac{2}{15}\dot{a}_3+\frac{4}{15}\dot{a}_2+\frac{4}{15}a_3+\frac{6}{15}a_1\geq 1. \qquad (\dagger)$$

Мы знаем, что при расширении древестной пары (S_1, S_2) величины Δ_1 и Δ_2 могут только увеличиваться. Не трудно видеть, что аналогичное утверждение верно для всех отсальных слагаемых в левой части последнего неравенства.

Таким образом, если взять исходную древесную пару (S_1, S_2), удовлетворяющую $(\dagger)$, кроме того содержащую в S_1 помеченную вершину, то мы докажем переход индукции, и значит мы можем назвать пару (S_1, S_2) "хорошей".

Применив те же самые рассуждения, что и в случае 1, для случаев 2 и 3 получаем, что если нам удастся найти древесную пару (S_1, S_2), такую что

$$\frac{2}{15}\Delta_2+\frac{6}{15}\Delta_1+\frac{1}{15}|S_2|+\frac{2}{15}\dot{a}_3+\frac{4}{15}\dot{a}_2+\frac{4}{15}a_3+\frac{6}{15}a_1\geq 2, \qquad (\ddagger)$$

то тогда индукционный переход будет доказан. Тем самым мы можем назвать древесную пару "хорошей", если она удовлетворяет $(\ddagger)$ и не обязательно содержит помеченную вершину. Кроме того, мы можем называть пару "хорошей", если сама она не удовлетворяет условию $(\dagger)$ или соответсвенно $(\ddagger)$, но про получающуюся из нее пару (P_1, P_2) можно точно сказать, что она удовлетворяет $(\dagger)$ или $(\ddagger)$.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что в графе найдется **хорошая** древесная пара, либо для него уже выполнено предположение базы индукции, либо найдется помеченное дерево, состоящее из одной вершины, при удалении которой из графа, сумма $\frac{2}{5}g_4+\frac{4}{15}\dot{g}_3+\frac{2}{15}\dot{g}_2+\frac{2}{15}g_3$ для оставшегося графа не уменьшится.

4. Нахождение хорошей древесной пары

Определение 6. *Определим для древесной пары (S_1, S_2) функцию $X(S_1, S_2)$.*

$$15\cdot X(S_1,S_2):=2\cdot\Delta_2+6\cdot\Delta_1+|S_2|+2\cdot\dot{a}_3+4\cdot\dot{a}_2+4\cdot a_3+6\cdot a_1.$$

Где a_i *и* $\dot{a}_i$ *обозначают количества помеченных и непомеченных вершин разных степеней в множестве* $S_1 \cup S_2$, $\Delta_1 = \Delta_1(S_1, S_2)$ *и* $\Delta_2 = \Delta_2(S_1, S_2)$.

Мы будем искать древесную пару (S_1, S_2) с подходящим значением $X(S_1, S_2)$. Если среди вершин S_1 есть помеченная вершина, то для завершения доказательства достаточно $X(S_1, S_2) \geq 1$, если же в S_1 нет помеченной вершины, то достаточно $X(S_1, S_2) \geq 2$. Пусть таких пар (S_1, S_2) нет. Рассмотрим несколько случаев. Разбирая каждый случай мы полагаем, что не могут выполняться условия каждого из предыдущих.

1. Предположим, что в $\mathcal{G}$ есть две смежные вершины u и v, с которыми смежно не мение шести отличных от них вершин. Тогда возьмем $S_1 = \{u, v\}$, по S_1 однозначно построим S_2. Тогда $\Delta_1 = |S_2| - |S_1| \geq 4$, $|S_2| \geq 6$. Подставив $\Delta_1 = 4$, $S_2 = 6$, мы получим
$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 6 \cdot 4 + 6 \geq 30.$$
2. Предположим, что в $\mathcal{G}$ есть вершина u такая, что $d(u) \geq 6$. Тогда, взяв $S_1 = \{u\}$, мы получим $\Delta_1 \geq 5$, $|S_2| \geq 6$ и
$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 6 \cdot 5 + 6 > 30.$$
Таким образом, можно считать, что степень любой вершины $\mathcal{G}$ не превосходит пяти.
3. Предположим, что в $\mathcal{G}$ есть помеченная вершина u такая, что $d(u) \geq 3$. Положим $S_1 = \{u\}$. Тогда $\Delta_1 \geq 2$, $|S_2| \geq 3$, следовательно,
$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 6 \cdot 2 + 3 \geq 15.$$
Так как u помеченная вершина, то случай разобран.
4. Пусть в $\mathcal{G}$ есть помеченная вершина u степени 2. Рассмотрим случаи.
   (a) Среди двух вершин, смежных с u, есть вершина $v : d(v) \leq 3$. Тогда либо v непомеченная и $d(v) = 3$, либо $d(v) \leq 2$. (Иначе получаем случай 3). Взяв $S_1 = \{u\}$, имеем $\Delta_1 = 1$, $|S_2| = 2$. Кроме того, u дает единичный вклад в $\dot{a}_2$ и v дает вклад 1 в одно из слагаемых $\dot{a}_2, a_1, a_3$. Значит,
$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 6 \cdot 1 + 2 + 4 \cdot 2 > 15.$$

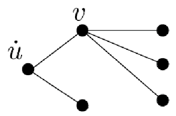

Рис. 3. Случай 4b. Здесь, как и на последующих рисунках, точка над буквой означает, что соответсвующая вершина помечена.

В S_1 есть помеченная вершина, следовательно, случай разобран.

(b) Пусть u смежна с v_1 и v_2, а среди v_1, v_2 есть вершина v, смежная хотя бы с тремя вершинами в графе $G - \{u, v_1, v_2\}$ (см. рис. 3). Возьмем $S_1 = \{u, v\}$, получим $\Delta_1 \geq 2$, $|S_2| \geq 4$, $\dot{a}_2 \geq 1$ и в S_1 есть помеченая вершина.

$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 6 \cdot 2 + 4 + 4 \cdot 1 > 15.$$

(c) Из предыдущих случаев 4a и 4b следует, что v_1 и v_2 смежны и $d(v_1) = d(v_2) = 4$.

- Предположим, что есть смежная с v_1 или с v_2 вершина w такая, что $d(w) = 5$. Не умаляя общности, будем считать, что w смежна с v_1. Тогда есть пять вершин, смежных с v_1 или w и отличных от них: u и четыре отличные от v_1 вершины смежных с w. Если w или v_1 смежна еще с какими-то вершинами, то мы приходим к случаю 1 (см. рис. 4). Следовательно, таких вершин нет, а значит, w смежна со всеми отличными от u вершинами, смежными с v_1, в частности, с v_2. Тогда мы получаем вершину w степени 5, смежную с v_1 и v_2, которые, в свою очередь, смежны с u, $d(u) = 2$. Рассмотрим $S_1 = \{w, v_1\}$ (см. рис. 5).

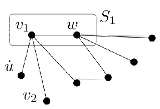

Рис. 4.

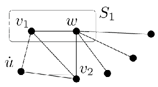

Рис. 5.

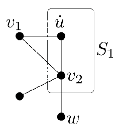

Рис. 6.

Проведя аналогичное рассуждение для v_2 и w, получаем, что v_2 не смежно ни с чем, кроме $S_1 \cup S_2$. Вершина u смежна только с вершинами из $S_1 \cup S_2$, следовательно, $\Delta_2 \geq 2$. Легко видеть, что $\Delta_1 = 3$, $|S_2| = 5$, $\dot{a}_2 \geq 1$. Тогда

$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 + 4 \cdot 1 > 30.$$

- Предположим, что есть вершина w, $d(w) \leq 3$, смежная с v_1 или с v_2. Не умаляя общности, предположим, что w смежна с v_2. Рассмотрим $S_1 = \{u, v_2\}$ (см. рис. 6). Тогда $\Delta_1 = 1$, $|S_2| = 3$, u дает вклад 1 в $\dot{a}_2$, а w дает единичный вклад в одно из слагаемых $\dot{a}_2, a_1, a_3, \dot{a}_3$. Вершина w не может быть помеченной вершиной степени 3 (см. случай 3). Тогда

$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 6 \cdot 1 + 3 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 15.$$

Так как в S_1 есть помеченная вершина, то случай разобран.
- Осталось рассмотреть случай, когда вершины v_1 и v_2 смежны; $d(v_1) = d(v_2) = 4$; смежные с v_1 вершины w_1 и w_2 таковы, что $d(w_1) = d(w_2) = 4$ (см. рис. 7).

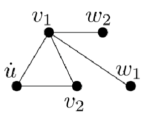

Рис. 7.

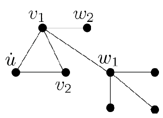

Рис. 8.

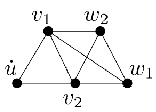

Рис. 9.

В случае, если вершина w_1 или вершина w_2 смежны с какими-то тремя вершинами не из множества $\{w_1, w_2, v_1, v_2, u\}$ (см. рис. 8, эта вершина (на рисунке это w_1) и v_1 попадают под случай 1.
- Если каждая из вершин w_1, w_2 смежна не более чем с одной вершиной из множества $G \setminus \{w_1, w_2, v_1, v_2, u\}$, тогда, так как $d(w_1) = d(w_2) = 4$, то w_1 смежна с w_2 и v_2, а w_2 смежна с w_1 и v_2 (см. рис. 9). Пусть $S_1 = \{v_1\}$, тогда $\Delta_1 = 3$, $|S_2| = 4$, $\dot{a}_2 \geq 1$, $\Delta_2 \geq 2$ (две вершины u и v_2 смежны только с вершинами из множетсва $S_1 \cup S_2$, так как v_2 имеет степень 4 и смежна с u,v_1,w_2,w_1). Имеем

$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 + 4 \cdot 1 = 30.$$

- Значит, либо w_1, либо w_2 смежна с двумя вершинами из множества $G \setminus \{w_1, w_2, v_1, v_2, u\}$. Не умаляя общности, пусть это w_1 и эти две вершины x_1 и x_2. Тогда получаем случай, изображенный на рис. 10. Обозначим через Z множество $V(\mathcal{G}) \setminus \{x_1, x_2, w_1, v_2, v_1, w_2, u\}$. Взяв $S_1 = \{v_1, w_1\}$, получим $\Delta_1 = 3$, $|S_2| = 5$, $\Delta_2 \geq 1$, $\dot{a}_2 \geq 1$. Имеем

$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 5 + 4 \cdot 1 = 29.$$

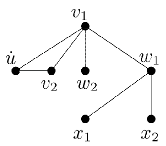

Рис. 10.

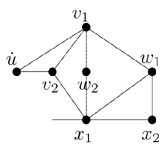

Рис. 11.

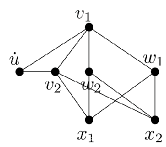

Рис. 12.

Заметим, что если $(P_1, P_2) \neq (S_1, S_2)$, то $P_1 \supsetneq S_1$, $\Delta_1(P_1, P_2) = |P_2| - |P_1| \geq \Delta_1(S_1, S_2) = |S_2| - |S_1|$, а значит $|P_2| > |S_2|$ и $X(P_1, P_2) > X(S_1, S_2)$. Из определения $X(S_1, S_2)$ следует, что $X(S_1, S_2) = \frac{c}{15}$, где $c \in \mathbb{Z}$. Тогда $X(P_1, P_2) \geq 2$ и случай разобран (пара (S_1, S_2) хорошая). Пусть $X(S_1, S_2) = \frac{29}{15}$, тогда можно считать, что $|S_2| = 5$, $S_1 = P_1$, $S_2 = P_2$, $\Delta_2 = 1$, $d(x_1) \geq 4$, $d(x_2) \geq 4$, каждая из вершин x_1, x_2, w_2, v_2 смежна ровно с одной вершиной из множества Z (иначе либо $\Delta_2 > 1$, либо можно выполнить допустимое расширение).

- Пусть $d(x_1) = 5$. Так как из x_1 в Z ведет одно ребро, и она не смежна ни с u, ни с v_1, то x_1 смежна с x_2, w_1, v_2, w_2, следовательно, v_2 и x_1 удовлетворяют условиям из случая 1 (см. рис. 11).
- Таким образом, $d(x_1) = 4$ и, аналогично, $d(x_2) = 4$, вершина x_1 смежна с двумя вершинами из множества $\{x_2, w_2, v_2\}$ и x_2 смежна с двумя вершинами из множества $\{x_1, w_2, v_2\}$. Если x_2 и x_1 не смежны, то тогда x_1 смежна с w_2 и v_2, а также x_2 смежна с w_2 и v_2, откуда $\Delta_2 \geq 2$, так как из v_2 нет ребер вне $S_1 \cup S_2$ (см. рис. 12). А значит $15X(S_1, S_2) > 29$, откуда мы заключаем, что (S_1, S_2) была хорошей парой.

- Значит, x_2 и x_1 смежны. Аналогично предыдущему случаю $(\Delta_2 \geq 2)$ получаем, что v_2 не может быть смежна одновременно с x_1 и x_2 (см. рис. 13).
- Пусть x_1 и x_2 смежны с w_2. Тогда вершины w_2 и v_1 удовлетворяют случаю 1 (см. рис. 14).
- Таким образом, каждая из вершин x_2 и x_1 смежна ровно с одной вершиной из пары w_2, v_2, причем для x_2 и x_1 эти вершины разные. Не умаляя общности, пусть x_2 смежна с w_2, а x_1 смежна с v_2 (см. рис. 15).
- Так как каждая из вершин v_2 и w_2 смежна ровно с одной вершиной из Z, то v_2 не смежна с w_2 и, следовательно, w_2 смежна с w_1, так как $d(w_2) = 4$ (см. рис. 16).

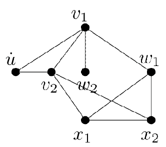

Рис. 13.

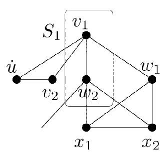

Рис. 14.

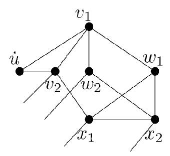

Рис. 15.

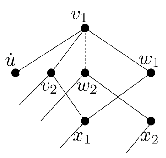

Рис. 16.

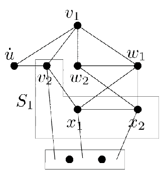

Рис. 17.

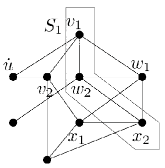

Рис. 18.

- Пусть вершины x_1, x_2, v_2 смежны в Z не с одной и той же вершиной. Положим $S_1 = \{x_1, x_2, v_2\}$ (см. рис. 17), тогда $\Delta_1 \geq 3$, $|S_2| \geq 6$, $\Delta_2 \geq 2$ (вершины u и v_1 смежны только с вершинами из $S_1 \cup S_2$), $\dot{a}_2 \geq 1$. Имеем

$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 + 4 \cdot 1 > 30.$$

- Пусть w_2 и x_2 имеют разные смежные вершины в Z, положим $S_1 = \{x_2, w_2, v_1\}$ (см. рис. 18). Тогда $\Delta_1 \geq 3$, $|S_2| \geq 6$, $\Delta_2 \geq 2$ (вершины u и w_1 смежны только с вершинами из $S_1 \cup S_2$), $\dot{a}_2 \geq 1$, откуда $X(S_1, S_2) \geq 2$.
- Значит, x_1, x_2, v_2, w_2 смежны с общей вершиной z из Z. Если $d(z) = 5$, то z и v_2 удовлетворяют условиям из случая 1. Значит, $d(z) = 4$. Тогда рассмотрим $S_1 = \{w_2, w_1, v_1\}$ (см. рис. 19). Имеем $\Delta_1 = 2$, $|S_2| = 5$, $\Delta_2 = 5$, $\dot{a}_2 = 1$. Далее

$$15 \cdot X(S_1, S_2) = 2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 5 + 4 \cdot 1 > 30.$$

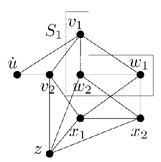

Рис. 19.

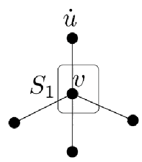

Рис. 20.

На этом разбор случая, когда в графе $\mathcal{G}$ есть помеченная вершина степени 2, закончен.

5. В графе $\mathcal{G}$ есть какая-то помеченная вершина u. Если $d(u) = 0$, то из-за связности G $V(G) = \{u\}$. Тогда u образует "хороший" остовный лес, для которого выполнены условия теоремы 1.
6. Остается разобрать случай $d(u) = 1$.

- Если u смежна с вершиной v степени по крайней мере четыре, тогда положим $S_1 = \{v\}$ (см. рис. 20). Получаем $\Delta_1 \geq 3$, $|S_2| \geq 4$, $\Delta_2 \geq 1$, $a_1 \geq 1$. Значит

$$15 \cdot X(S_1, S_2) \geq 2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 + 6 \cdot 1 = 30.$$

- Если $d(v) = 1$, то $V(\mathcal{G}) = \{u, v\}$ и тогда ребро (u, v) образует хороший остовный лес графа $\mathcal{G}$.
- Осталось разобрать случай, когда u смежна с непомеченной вершиной v, для которой $3 \geq d(v) > 1$. Добавим к нашему частично построенному лесу "хорошее" помеченное дерево $\{u\}$. Удалим из $\mathcal{G}$ вершину u и пометим v. Заметим что для оставшегося графа сумма $6 \cdot g_4 + 4 \cdot \dot{g}_3 + 2 \cdot \dot{g}_2 + 2 \cdot g_3$ не измениться и применив предположение индукции для оставшегося графа мы докажем переход индукции.

На этом разбор всех случаев завершен, теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть в графе G есть k вершин степени хотя бы 4 и k' вершин степени 3, тогда в этом графе можно выделить остовное дерево с количеством висячих вершин не менее $\lceil \frac{2}{5} \cdot k + \frac{2}{15} \cdot k' \rceil$.*

Доказательство. Возьмем любую вершину в нашем графе и будем считать, что она помеченна. Применим к этому графу *теорему* 1. Так как в графе только одна помеченная вершина, то мы получим остовное дерево исходного графа. □

Замечание 2. Заметим, что исходя из доказательства теоремы 1 легко можно построить полиномиальный алгоритм, который будет выделять остовный лес с нужным количеством висячих вершин. Действительно, вначале алгоритм должен находить хорошую древесную пару (S_1, S_2) с небольшим количеством вершин, а потом, пока это возможно, пытаться эту пару расширить жадным образом.

5. Заключение

В связи с тем, что гипотеза Линиала оказалась не верной для больших значений δ, однако при $\delta = 3, 4, 5$ она попрежнему выполняется, естественно возникает вопрос: для какого максимального δ утверждение гипотезы все еще выполняется? Кроме того, в свете нынешней работы, хотелось бы получить результат для произвольных графов, который бы учитывал с разными коэффициентами степени всех вершин в графе. В идеале, хотелось бы иметь полиномиальный алгоритм, находящий остовное дерево с количеством висячих вершин по крайней мере $\frac{1}{2}k_5 + \frac{2}{5}k_4 + \frac{1}{4}k_3$.

Автор выражает благодарность Д. В. Карпову за плодотворные обсуждения и за большое количество замечаний по улушению статьи.

Литература

1. В. Г. Визинг, *Некоторые нерешенные задачи в теории графов.* — Успехи мат. наук **23** (1968), 117–134.
2. B. Zelinka, *Finding a Spanning Tree of a Graph with Maximal Number of Terminal Vertices.* — Kybernetika **9**, No. 5 (1973), 357–360.
3. J. A. Storer, *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* — Inform. Process. Lett. **13**, No. 1 (1981), 8–11.
4. J. R. Griggs, M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. — Discreet Mathematics **104** (1992), 167–183.
5. D. J. Kleitman, D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4**, No. 1 (1991), 99-106.

6. P. S. Bonsma, T. Brueggermann, G. J. Woenginger, *A faster FPT algorithm for finding spanning trees with many leaves.* — Lect. Notes Computer Sci. 2747 (2003), 259–268.
7. F. V. Fomin, F. Grandoni, D. Kratsch, *Solving Connected Dominating Set Faster than $O(2^n)$.* — Algorithmica **52** (2008), 153–166.
8. M. R. Fellows, C. McCartin, F. A. Rasamond, U. Stege, *Coordinated kernels and catalytic reductions: An improved FPT algorithm for max leaf spanning tree and other problems.* — Lect. Notes Comput. Sci 1974 (2000), 240–251.
9. G. Galbiati, A. Morzenti, F. Maffioli, *On the approximability of some maximum spanning tree problems.* — Theoretical Computer Scinece **181** (1997), 107–118.
10. N. Linial и D. Sturtevant (1987). Необубликованный результат.
11. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* — Graphs and Combinatorics **6** (1990), 1–4.
12. Y. Caro, D. B. West, R. Yuster, *Connected domination and spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **13** (2000), 202–211.
13. N. Alon, J. Spencer, *The Probabilistic Method.*— Second Edition. Wiley, NY (2000).

Gravin N. V. Construction of a spanning tree with many leaves.

It is well known [4] that any n vertex graph of minimal degree 4 possess a spanning tree with at least $\frac{2}{5} \cdot n$ vertices, which is asymptotically sharp bound. In current work we present a polynomial algorithm that finds in a graph with k vertices of degree at least four and k' vertices of degree 3 a spanning tree with the number of leaves at least $\lceil \frac{2}{5} \cdot k + \frac{2}{15} \cdot k' \rceil$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
н.р. Фонтанки, 27,
191023 С.Петербург, Россия;
Division of Mathematical Sciences,
School of Physical and Mathematical Sciences,
Nanyang Technological University,
Singapore
E-mail: gravin@pdmi.ras.ru

Поступило 12 мая 2010 г.