Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 381, 2010 г.

С. Л. Берлов

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА СЛОИСТЫХ ГРАФОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ КЛИКОЙ

1. Введение

Будем, как обычно, обозначать через $\omega(G)$ кликовое число графа G, а через $\chi(G)$ – его хроматическое число.

Нахождение хроматического числа графа является старейшей и труднейшей задачей теории графов, она входит в список классических NP-трудных задач. Многие научные работы были посвящены связи хроматического числа с другими характеристиками графа, такими как кликовое число, степень, число вершин графа (например, статьи [1–3]). Классической теоремой в этой области является теорема Брукса [1], утверждающая, что при $d > 2$ в графе максимальной степени d и с кликовым числом, не превосходящим d, хроматическое число также не превосходит d. Как правило, точное значение хроматического числа установить не удается, поэтому важное значение приобретают различные верхние и нижние оценки. При ограничении кликового числа графа его хроматическое число может быть сколь угодно большим, однако в связи с этим интересен вопрос: сколь велико может быть это хроматическое число в зависимости от количества вершин графа?

Определение 1. *Числом Рамсея R_a^b называется наименьшее натуральное число, обладаюее следующим свойством: в любом графе с R_a^b вершинами содержится или полный индуцированный подграф на a вершинах, или пустой индуцированный подграф на b вершинах.*

В статье [7] была получена асимптотическая оценка: для достаточно больших n в графе G с n вершинами максимальное хроматическое число равно $\omega(G)O(\frac{n}{\ln^2 n})$. Позднее эти результаты были развиты в работах [9] и [10]. Получение подобных оценок тесно связано с оценками чисел Рамсея.

Ключевые слова: хроматическое число, клика, кликовое число, теорема Холла.
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00096).

Определение 2. *Граф G будем называть n-слоистым если он представим в виде объединения k непересекающихся n-клик, называемых слоями.*

Оценке хроматических чисел слоистых графов посвящен ряд статей, например [4] или [5], но в этих работах накладывались дополнительные ограничения на граф, связанные с его степенью, а также применялась несколько иная терминология.

Задача, которая рассматривается в настоящей статье, пришла из комбинаторной геометрии. Она была поставлена в статье [6] и также тесно связана с соотношениями между $\omega(G)$ и $\chi(G)$.

В настоящей статье будут доказаны следующие верхние и нижние оценки на хроматическое число для n-слоистых графов с кликовым числом n.

1. Для любого натурального k существует такое достаточно большое натуральное n и n-слоистый граф G с kn вершинами, в котором $\omega(G) = n$, а $\chi(G) \geq \frac{1}{2}(kn - (k-1)^2\sqrt{n}\ln n)$.

2. Пусть в n-слоистом графе G kn вершин, где k — нечетное число, большее девяти. Пусть $\omega(G) = n$. Тогда $\chi(G) \leq \frac{nk}{2}(1 + \frac{2}{k(k-9)})$.

3. Пусть в n-слоистом графе G $3n$ вершин, причем $\omega(G) = n$. Тогда $\chi(G) \leq \frac{8}{5}n$, причем эта оценка достигается при всех n, кратных 5.

4. Пусть в n-слоистом графе G $5n$ вершин, причем $\omega(G) = n$. Тогда $\chi(G) \leq \frac{18}{7}n$.

2. Случай четного k

Пусть граф G является n-слоистым с максимальной кликой мощности n и состоит из k слоев. Какое максимальное хроматическое число он может иметь? Для четных k верна следующая оценка.

Лемма 1. *Пусть в n-слоистом графе G kn вершин, где k – четно, причем $\omega(G) = n$. Тогда $\chi(G) \leq \frac{kn}{2}$.*

Доказательство. Разобьем слои на пары. Любые два слоя в одной паре содержат полное антипаросочетание в силу следствия леммы Холла: в двудольном графе, в котором обе доли имеют мощность n, а максимальная антиклика тоже имеет мощность n, будет паросочетание мощности n. Это следствие надо применить для дополнительного к G графа $\overline{G}$.

Окрасим в каждой паре вершины в свой цвет, получим правильную раскраску в $\frac{kn}{2}$ цветов. $\square$

Эту оценку нельзя существенно улучшить для больших n, что иллюстрирует следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого натурального k существует такое достаточно большое натуральное n и n-слоистый граф G с kn вершинами, в котором $\omega(G) = n$, а $\chi(G) \geq \frac{1}{2}(kn - (k-1)^2\sqrt{n}\ln n)$.*

Доказательство. Заметим, что для достаточно больших n существуют графы на n вершинах без треугольников с маленькой по сравнению с n антикликой (см. [7]). Более того, в этой статье было доказано, что $R_3^s \geq \frac{s^2}{\ln^2 s}$.

Лемма 2. *Для всех достаточно больших t (подходит $t > 1000$) существует граф с t вершинами без треугольников, максимальная антиклика которого содержит менее $\sqrt{t}\ln t$ вершин.*

Доказательство. Рассмотрим минимальное q такое, что $\frac{q^2}{\ln^2 q} \geq t$. Тогда существует граф без треугольников и антиклик мощности q на t вершинах. Докажем, что $q \leq \sqrt{t}\ln t$. Если $q > \sqrt{t}\ln t$, то $q^2 > t\ln^2 t$. С другой стороны, в силу минимальности q, получаем $\frac{(q-1)^2}{\ln^2(q-1)} < t$. Но $\frac{(q-1)^2}{\ln^2(q-1)} > \frac{t\ln^2(t)-2q+1}{\ln^2(q-1)} \geq t$, противоречие. Последнее неравенство следует из того, что при $t > 1000$ выполняется неравенство $q < t/2$, поэтому $t(\ln^2 t - \ln^2(q-1)) > t\ln 2(\ln t + \ln(q-1)) > t > 2q - 1$. $\square$

Через $\mathcal{A}(H)$ будем обозначать максимальную антиклику графа H. Пусть граф H содержит t вершин. Выберем такое маленькое $\epsilon > 0$, что для любого графа G' без треугольников с t вершинами, в котором $\frac{|\mathcal{A}(G')|}{t} < \epsilon$, будет выполняться неравенство $t > 1000k^3$. Это будет верно при $\epsilon < \frac{1}{1000k^3}$, поскольку $|\mathcal{A}(G')| \geq 1$.

Для выбранного ϵ найдем граф H без треугольников с наименьшим количеством вершин такой, что $\frac{|\mathcal{A}(H)|}{|H|} < \epsilon$ и число $|\mathcal{A}(H)|$ минимально среди всех графов без треугольников с таким количеством вершин. Теперь обозначим через p количество вершин графа H. Тогда $\frac{|\mathcal{A}(H)|}{p} < \frac{\ln p}{\sqrt{p}}$ $(*)$, иначе, поскольку $p > 1000$, можно было бы выбрать граф с таким же количеством вершин и еще меньшим числом $\frac{|\mathcal{A}(H)|}{|H|}$ в силу леммы 2. Выберем в графе H максимальную антиклику A_1, удалим ее, затем в получившемся графе снова выберем максимальную антиклику A_2, удалим ее и так до A_k. Заметим, что в силу неравенства $(*)$ каждая из этих антиклик содержит менее $\sqrt{p}\ln p$ вершин, поэтому в объединении они содержат менее $k\sqrt{p}\ln p < \frac{1}{10}p^{\frac{5}{6}}\ln p$ вершин (так как $k < \frac{1}{10}p^{\frac{1}{3}}$), что меньше p, поэтому все A_i будут непусты. Кроме того, $|\mathcal{A}(H)| = |A_1| \geq |A_2| \geq |A_3| \ldots \geq |A_k|$.

Объединение этих антиклик образует индуцированный подграф H, который мы будем называть H'. Заметим, что

$$\begin{aligned} |A_k| &= |\mathcal{A}(H - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_{k-1}))| \\ &> \frac{|\mathcal{A}(H)||H - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_{k-1})|}{|H|}, \end{aligned} \tag{1}$$

иначе

$$\frac{|\mathcal{A}(H - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_{k-1}))|}{|H - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_{k-1})|} < \epsilon,$$

что противоречит выбору графа H. Тогда для любого натурального $i \leq k$ получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |A_1| - |A_i| &\leq |A_1| - |A_k| \\ &< |A_1|\left(1 - \frac{|H| - |A_1| - |A_2| - \cdots - |A_{k-1}|}{|H|}\right) \\ &= |A_1|\frac{|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{k-1}|}{|H|} \\ &\leq |A_1|\frac{(k-1)|A_1|}{|H|} < (k-1)|A_1|\frac{\ln p}{\sqrt{p}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим граф H'. Добавим по $|A_1 - A_i|$ вершин к каждому из множеств A_i. Соединим добавленные вершины со всеми остальными вершинами кроме тех, которые лежат с ними в одной образовавшейся антиклике мощности $|A_1|$. Множество добавленных вершин обозначим через $\mathcal{M}$, а число $|A_1|$ обозначим через n. Ясно, что $n > 7$, поскольку $R_7^3 < 1000$. Докажем, что граф G, дополнительный к получившемуся, будет искомым. Действительно, во-первых, граф G, очевидно, будет n-слоистым. Во-вторых, максимальная клика графа $G - \mathcal{M}$ будет мощности n, поскольку максимальная антиклика графа G имела мощность n. Если какая-то максимальная клика графа G содержит вершину B из $\mathcal{M}$, то она может содержать только вершины слоя, содержащего B, поскольку B не смежна с остальными вершинами, следовательно, мощность этой клики будет равна n. В-третьих, в графе $G - \mathcal{M}$ нет антитреугольников, поэтому его хроматическое число не менее $\frac{|G|-|\mathcal{M}|}{2}$. Оценим это число. Поскольку в силу неравенства (2) выполнено $|A_1| - |A_i| < (k-1)|A_1|\frac{\ln p}{\sqrt{p}}$, то $|\mathcal{M}| < (k-1)^2|A_1|\frac{\ln p}{\sqrt{p}}$.

Но так как $(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})' = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} < 0$ при $x > 7$, то поскольку $p > n > 7$, получим

$$|\mathcal{M}| < (k-1)^2|A_1|\frac{\ln p}{\sqrt{p}} < (k-1)^2\sqrt{n}\ln n,$$

откуда и получается требуемое неравенство. □

Полученная оценка снизу для четных k при больших n очень близка к верхней оценке в том смысле, что при фиксированном k она отклоняется от $kn/2$ на $o(n)$.

3. Случай нечетного k

В случае нечетного k ситуация сложнее. Сначала приведем методику получения оценки в общем случае. Для этого сделаем несколько предварительных замечаний.

Пронумеруем слои графа G числами от 1 до k. Рассмотрим граф G', дополнительный к G. Любые два слоя содержат полное паросочетание в силу леммы Холла, как уже объяснялось выше. Рассмотрим ребра этих паросочетаний, соединяющие слои с соседними номерами, а также слой с номером k и слой с номером 1. Они образуют граф, степени всех вершин которого равны 2. Этот граф разбивается на циклы. Заметим, что длина каждого из циклов делится на k, поскольку слои будут чередоваться при движении по ребрам цикла. Отметим, что это дает нам простую оценку на хроматическое число графа G. Действительно, каждый цикл после удаления одной из вершин можно разбить на пары смежных вершин, поэтому граф G' разбивается на пары смежных вершин после удаления из него не более n вершин. Поэтому его можно разбить не более, чем на $\frac{n(k-1)}{2} + n = \frac{n(k+1)}{2}$ клик, откуда хроматическое число G не превосходит $\frac{n(k+1)}{2}$ (впрочем, такую оценку можно получить и просто удалением одного из слоев). Но эту оценку можно значительно улучшить, если заметить, что циклы можно “склеивать”, т.е. в случае, когда два цикла соединены ребром, их объединение можно полностью разбить на пары. Кроме того, есть еще ряд ситуаций, когда можно придумать более удачное разбиение графа G' на клики.

Среди паросочетаний, в которые входят все вершины нескольких получившихся циклов, рассмотрим паросочетание P максимальной мощности. Очевидно, что останется несколько нечетных циклов, ни одна из вершин которых не вошла в рассматриваемое паросочетание. Будем называть эти циклы *базовыми*. Индуцированный подграф G', образованный вершинами базовых циклов, обозначим через W. Заметим, что любые две вершины двух различных базовых циклов несмежны, поскольку иначе можно было бы разбить объединение этих циклов на пары смежных вершин, что противоречит максимальности выбранного паросочетания. Окрасим ребра выбранного паросочетания в цвет 1, а все остальные ребра графа G', кроме ребер входящих в W – в цвет 2. Простой путь будем называть *чередующимся*, если цвета ребер в этом пути чередуются и он не проходит через ребра W (для простоты введем соглашение, что в чередующемся пути могут совпадать первая и последняя вершины).

Лемма 3. *Никакие два базовых цикла не могут соединяться чередующимся путем.*

Доказательство. Пусть два базовых цикла $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ соединяются чередующимся путем. Тогда рассмотрим вершины этих циклов, принадлежащие этому пути. Заметим, что после удаления этих вершин циклы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ можно будет разбить на пары смежных вершин. Кроме того, вершины чередующегося пути тоже разбиваются на пары, соединенные ребрами цвета 2. Но тогда полученное паросочетание будет больше исходного, что противоречит максимальности последнего. □

Рассмотрим любой базовый цикл $\mathcal{C}_1$. Присоединим к нему некоторый чередующийся путь, который начинается и заканчивается внутри этого цикла, а проходит вне его (при этом можно допустить совпадение первой и последней вершин этого пути). К полученному подграфу снова присоединим некоторый чередующийся путь, который начинается и заканчивается внутри этого подграфа, а проходит вне его. Будем проделывать такую операцию многократно. Подграфы, получающиеся из некоторого базового цикла после ряда таких присоединений, будем называть *полуорбитами* (в частности, сами базовые циклы будут полуорбитами).

Лемма 4. *Рассмотрим любой базовый цикл $\mathcal{C}_1$ и соответствующую ему полуорбиту $\mathcal{O}_1$. Тогда можно будет дойти до любой вершины $\mathcal{O}_1 - \mathcal{C}_1$ из $\mathcal{C}_1$ чередующимся путем, лежащим внутри $\mathcal{O}_1$ и заканчивающимся в этой вершине ребром цвета* 1.

Доказательство. Докажем, что это свойство будет выполняться после присоединения некоторого чередующегося пути, если оно выполнялось до этого. Будем считать, что чередующийся путь присоединили к полуорбите $\mathcal{O}_1$, и получили полуорбиту $\mathcal{O}_1'$. Заметим, что он начинается и кончается ребром цвета 2. Тогда для любой вершины A присоединенного пути одно из выходящих из нее ребер этого пути будет цвета 1. Рассмотрим кусок пути (обозначим его через $\mathcal{Q}_1$), выходящий из A по этому ребру до некоторой вершины $\mathcal{O}_1$, которую мы обозначим через B. Тогда существует чередующийся путь $\mathcal{Q}_2$, лежащий внутри $\mathcal{O}_1$, соединяющий $\mathcal{C}_1$ с B и заканчивающийся ребром цвета 1. Тогда $\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2$ будет искомым чередующимся путем. □

Лемма 5. *Никакие две полуорбиты не пересекаются и не могут быть соединены чередующимся путем.*

Доказательство. Будем доказывать эту лемму по индукции. Исходно никакие два базовых цикла не пересекаются и не соединяются чередующимся путем в силу леммы 3. Будем считать, что чередующийся путь присоединили к полуорбите $\mathcal{O}_1$ и получили полуорбиту $\mathcal{O}_1'$. Предположим, утверждение леммы не выполняется. Пусть полуорбита $\mathcal{O}_1'$ имеет с $\mathcal{O}_2$ общие вершины. Рассмотрим только что присоединенный чередующийся путь $\mathcal{P}_1$, начинающийся и кончающийся в $\mathcal{O}_1$. Будем двигаться по этому пути от какой-то вершины $X \in \mathcal{O}_1$ к вершине $Y \in \mathcal{O}_1$ (возможно, $X = Y$). Рассмотрим на этом пути самую первую вершину, принадлежащую полуорбите $\mathcal{O}_2$. Обозначим эту вершину через A. Найдется чередующийся путь $\mathcal{P}_2$, начинающийся в $\mathcal{C}_2$, и заканчивающийся ребром цвета 1 в A. Тогда рассмотрим чередующийся путь, который идет от $\mathcal{C}_1$ к X, и заканчивается ребром цвета 1, затем по чередующемуся пути $\mathcal{P}_1$ к A, а затем идет по чередующемуся пути $\mathcal{P}_2$ в $\mathcal{C}_2$. Заметим, что этот путь будет чередующимся путем, соединяющим циклы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, что противоречит утверждению леммы 3.

Пусть теперь полуорбиты $\mathcal{O}_1'$ и $\mathcal{O}_2$ соединяются чередующимся путем. Рассмотрим самый короткий такой чередующийся путь $\mathcal{T}$. Пусть этот путь соединяет вершину $A \in \mathcal{O}_1'$ с вершиной $B \in \mathcal{O}_2$. Заметим, что он начинается и кончается ребром цвета 2. Тогда рассмотрим чередующиеся пути $\mathcal{T}_1$, начинающийся в $\mathcal{C}_1$ и заканчивающийся в A ребром цвета 1, лежащий целиком в $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{T}_2$, начинающийся в $\mathcal{C}_2$ и заканчивающийся в B ребром цвета 1, лежащий целиком в $\mathcal{O}_2$ (оба пути существуют в силу леммы 4). В случае, когда какая-то из вершин A

или B будет принадлежать базовому циклу, будем считать соответствующий чередующийся путь состоящим из одной вершины). Тогда путь $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_2$ будет чередующимся путем, соединяющим циклы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, что противоречит утверждению леммы 3. $\square$

Будем последовательно проделывать процедуру присоединения чередующегося пути с концами в некоторой полуорбите и лежащего вне ее к этой полуорбите. В частности, можно присоединять к полуорбите ребро, оба конца которого смежны с вершинами полуорбиты. Через некоторое время получится ситуация, когда не останется ни одного чередующегося пути, соединяющего две вершины (возможно, совпадающие) какой-то полуорбиты, все вершины которого, кроме концов, лежат вне полуорбит.

Определение 3. *Орбитой назовем максимальную по включению полуорбиту, содержащую данный базовый цикл.*

Заметим, что теперь у каждой из пар вершин, соединенных ребром цвета 1 и лежащих вне орбит, найдется хотя бы одна вершина, не смежная с вершинами из орбит.

Определение 4. *Обозначим через $\mathcal{D}$ множество тех пар, которые не принадлежат орбитам, но одна из вершин которых смежна с орбитой. Обозначим через $\mathcal{B}'$ множество вершин из $\mathcal{D}$, не смежных с вершинами из орбит, а через $\mathcal{B}''$ – множество остальных вершин из $\mathcal{D}$. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество остальных пар, не входящих в орбиты (т.е. множество тех пар, ни одна из вершин которых не смежна ни с одной из вершин, входящих в орбиты).*

Лемма 6. *Никакие две вершины из $\mathcal{B}'$ не смежны.*

Доказательство. Предположим, что какие-то две вершины $X_1 \in \mathcal{B}'$, $X_2 \in \mathcal{B}'$ соединены ребром a. Пусть ребра цвета 1 соединяют вершину X_1 с Y_1, а вершину X_2 – с Y_2. Поскольку пары $\{X_1, Y_1\}$; $\{X_2, Y_2\}$ лежат в $\mathcal{D}$, то вершины Y_1 и Y_2 смежны с какими-то вершинами A_1 и A_2, принадлежащим некоторым орбитам соответственно (возможно, $A_1 = A_2$). Тогда $A_1 - Y_1 - X_1 - X_2 - Y_2 - A_2$ будет чередующимся путем. Если вершины A_1 и A_2 принадлежат различным орбитам, то это противоречит лемме 3, если же они принадлежат одной орбите, то весь этот чередующийся путь можно присоединить к этой орбите, что противоречит определению орбиты. $\square$

Приведенное здесь разбиение графа G' позволяет получать верхние оценки на максимальное возможное хроматическое число графа G.

Лемма 7. *Если мощность некоторой орбиты не менее $\frac{p(p+1)}{2}$, то в этой орбите либо найдется треугольник, либо антиклика мощности p.*

Доказательство. Это – стандартная оценка на числа Рамсея. Несложно доказывается методом математической индукции. Действительно, база для $p = 2$ очевидна. Переход: пусть утверждение леммы верно для всех $p < k$. Докажем это утверждение для $p = k$. Пусть в этой орбите найдется вершина A степени, не превосходящей $k - 1$. Удалим эту вершину вместе со всеми смежными с ней вершинами. Останется не менее $\frac{k(k-1)}{2}$ вершин. Среди них либо найдется треугольник, либо антиклика на $k-1$ вершинах. Тогда в исходной орбите найдется либо треугольник, либо антиклика на k вершинах, которая получается добавлением вершины A к найденной антиклике мощности $k - 1$.

Если же в орбите найдется вершина степени, не меньшей k, то все вершины смежные с ней должны образовывать антиклику, иначе найдется треугольник. □

Определение 5. *Орбиту мощности m, которую можно разбить на не более, чем $\frac{m}{2}$ клик будем называть* разбиваемой*. Все остальные орбиты будем называть* неразбиваемыми*.*

Лемма 8. *Пусть некоторая орбита имеет мощность g. Рассмотрим такое натуральное s, что $g \geq \frac{s(s+9)}{2}$. Тогда либо эта орбита разбиваема, либо содержит антиклику на $s + 1$ вершинах.*

Доказательство. Предположим, что максимальная антиклика в этой орбите имеет мощность не более s. Поскольку количество вершин в орбите не менее $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$, то в ней найдется треугольник в силу леммы 7. Удалим из орбиты все его вершины. Тогда в ней найдется еще треугольник. Будем так удалять треугольники до тех пор, пока это возможно. После этого останется менее $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ вершин. Следовательно, было удалено более $3s - 1$ вершин, т. е. не менее s треугольников. Далее, найдем пару смежных вершин и удалим их. Затем снова найдем пару смежных вершин и удалим ее. Будем продолжать этот процесс пока будут находиться пары смежных вершин. Поскольку максимальная антиклика орбиты имеет мощность не более s, то останется не более s вершин. Добавим их к удаленным кликам. Получилось, что вся орбита разбилась на $1-, 2-$ и $3-$клики, причем $3-$клик не меньше, чем $1-$клик. Заметим, что тогда всего клик не более $\frac{g}{2}$, т. е. орбита разбиваема. □

Пусть $k > 9$. Предположим, имеется ровно a_i неразбиваемых орбит, мощность которых не менее $\frac{(i-1)(i+8)}{2}$, но менее $\frac{i(i+9)}{2}$. Будем называть орбиту *маленькой*, если она содержит менее $\frac{k(k-9)}{2}$ вершин и *большой* в противном случае. Пусть все орбиты, которые не являются одновременно маленькими и неразбиваемыми, содержат суммарно t вершин. Тогда напишем оценку на общее количество вершин G'

$$\sum_{i=1}^{k-9} \frac{i(i+9)}{2} a_i + t + 2|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}| \geq kn. \tag{3}$$

Заметим, что в каждой неразбиваемой маленькой орбите, содержащей количество вершин не менее $\frac{(i-1)(i+8)}{2}$, но менее $\frac{i(i+9)}{2}$, найдется антиклика на i вершинах в силу леммы 8. Антиклики из разных орбит независимы, кроме того, из всех орбит, которые не являются маленькими неразбиваемыми можно выбрать не менее $\frac{t}{k}$ вершин одного из слоев, поэтому из объединения всех орбит можно выбрать антиклику мощности не менее

$$\sum_{i=1}^{k-9} i a_i + \frac{t}{k}.$$

Заметим, что к выбранной антиклике можно присоединить все вершины из $\mathcal{B}'$, поскольку в силу леммы 6 никакие две вершины из $\mathcal{B}'$ не смежны, а в силу определения множества $\mathcal{B}'$ никакие вершины из $\mathcal{B}'$ не смежны с вершинами антиклик. Поскольку максимальная антиклика G' по условию не превосходит n, то можно написать неравенство:

$$\sum_{i=1}^{k-9} i a_i + \frac{t}{k} + |\mathcal{D}| \leq n. \tag{4}$$

Теперь к выбранной из орбит антиклике мощности $\sum\limits_{i=1}^{k-9} i a_i + \frac{t}{k}$ добавим все вершины из пересечения множества вершин, входящих в $\mathcal{B}'$ или пары из $\mathcal{C}$ с одним из слоев. Слой выберем таким образом, чтобы количество вершин в этом пересечении было бы не менее $\frac{|\mathcal{D}|+2|\mathcal{C}|}{k}$. Поскольку вершины из орбит смежны только с вершинами из $\mathcal{B}''$, то после добавления получится антиклика. Так как ее мощность также не может превосходить n, то можно написать еще одно неравенство:

$$\sum_{i=1}^{k-9} i a_i + \frac{t}{k} + \frac{|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}|}{k} \leq n. \tag{5}$$

Вычтем неравенство (4), домноженное на k, из неравенства (3), получим:

$$2|C| - (k-2)|\mathcal{D}| \geq \sum_{i=1}^{k-9}(ki - \frac{i(i+9)}{2})a_i. \qquad (6)$$

Аналогичным образом вычитая неравенство (5), домноженное на k, из неравенства (3), получим:

$$|\mathcal{D}| \geq \sum_{i=1}^{k-9}(ki - \frac{i(i+9)}{2})a_i. \qquad (7)$$

Рассмотрим подробнее каждое слагаемое в сумме справа. Поскольку $k \geq i+9$, то

$$kia_i - \frac{i(i+9)}{2}a_i \geq a_i\frac{i(i+9)}{2},$$

что не меньше суммарного количества вершин во всех неразбиваемых маленьких орбитах, содержащих количество вершин не менее $\frac{(i-1)(i+8)}{2}$, но менее $\frac{i(i+9)}{2}$, поэтому вся сумма не менее суммарной мощности всех неразбиваемых маленьких орбит, которую мы обозначим через U. Тогда неравенства (6) и (7) можно переписать так:

$$\begin{aligned} 2|\mathcal{C}| - (k-2)|\mathcal{D}| &\geq U, \\ |\mathcal{D}| &\geq U, \end{aligned}$$

откуда

$$U + 2|\mathcal{C}| + 2|\mathcal{D}| \geq 2U + k|\mathcal{D}| \geq (k+2)U. \qquad (8)$$

Теорема 2. *Пусть в n-слоистом графе G kn вершин, где k – нечетное число, большее девяти. Пусть $\omega(G) = n$. Тогда*

$$\chi(G) \leq \frac{nk}{2}\Big(1 + \frac{2}{k(k-9)}\Big).$$

Доказательство. Давайте будем разбивать граф G', дополнительный к рассматриваемому графу G, на клики. Будем для этого использовать полученную выше конструкцию орбит. Для этого сначала разобьем все разбиваемые орбиты на минимальное количество клик, этих клик будет не более половины от общего количества вершин в разбиваемых орбитах. Все неразбиваемые орбиты будем разбивать так: исходный базовый нечетный цикл разобьем на 2-клики и одну 1-клику. Все добавленные к этому базовому циклу вершины разобьются на пары соединенных ребром цвета 1. Все вершины, входящие в пары из $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$, также разбиваются на пары вершин, соединенных ребрами цвета 1. Таким образом, после удаления всех 1-клик, образовавшихся от разбиения неразбиваемых орбит (обозначим это множество через $\mathcal{Z}$), граф G' разбивается на клики, которых не более половины от общего количества оставшихся вершин. Оценим мощность множества $\mathcal{Z}$. В это множество входят вершины из больших неразбиваемых орбит (обозначим это подмножество $\mathcal{Z}'$) и маленьких неразбиваемых орбит (это подмножество обозначим через $\mathcal{Z}''$). Оценим каждое из множеств $\mathcal{Z}'$ и $\mathcal{Z}''$ отдельно. Каждая из больших неразбиваемых орбит содержит не менее $\frac{k(k-9)}{2}$ вершин, поэтому множество $\mathcal{Z}'$ содержит не более $\frac{2U'}{k(k-9)}$ вершин, где через U' обозначено общее количество вершин во всех больших неразбиваемых орбитах.

Заметим, что любая орбита содержит не менее k вершин, поскольку в нее, в частности, входит какой-то базовый цикл, а мощность каждого из них, напомним, делится на k. Во всех маленьких неразбиваемых орбитах содержится U вершин, из них не более $\frac{U}{k}$ входит в $\mathcal{Z}''$. Но в силу неравенства (8) и того, что $U+U'+2|\mathcal{C}|+2|\mathcal{D}| \leq nk$ (слева мощность подмножества вершин графа G', а справа – мощность множества всех вершин), получаем

$$|\mathcal{Z}''| \leq \frac{U}{k} \leq \frac{U+2|\mathcal{C}|+2|\mathcal{D}|}{k(k+2)} \leq \frac{nk-U'}{k(k+2)} \leq \frac{nk-U'}{k(k-9)}. \tag{9}$$

Поэтому

$$|\mathcal{Z}| = |\mathcal{Z}'| + |\mathcal{Z}''| \leq \frac{2U'}{k(k-9)} + \frac{nk-U'}{k(k-9)} = \frac{nk+U'}{k(k-9)} \leq \frac{2nk}{k(k-9)}.$$

Следовательно, общее количество клик не превосходит

$$\frac{nk - \frac{2nk}{k(k-9)}}{2} + \frac{2nk}{k(k-9)} = \frac{nk}{2}\left(1 + \frac{2}{k(k-9)}\right).$$

□

4. Случай $k = 3$

Рассмотрим подробнее случай $k = 3$. Для него можно получить точную оценку. Будем для этого случая применять полученную выше конструкцию орбит.

Теорема 3. *Пусть в n-слоистом графе G $3n$ вершин, причем $\omega(G) = n$. Тогда $\chi(G) \leq \frac{8}{5}n$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы докажем сперва несколько лемм. Здесь мы снова переходим к дополнительному графу G' и рассмотрим для него конструкцию из предыдущего раздела.

Лемма 9. *Любой базовый цикл на 9 вершинах либо содержит антиклику на 4 вершинах, либо разбивается на не более, чем четыре клики.*

Доказательство. Предположим, наш базовый цикл (обозначим его через $\mathcal{C}_1$) не содержит антиклики на четырех вершинах. Тогда, в силу теоремы Рамсея, в $\mathcal{C}_1$ существует треугольник. Будем измерять расстояние между двумя вершинами по циклу минимальным количеством ребер, которое содержит путь по циклу от одной из этих вершин до другой. Заметим, что никакие две вершины на расстоянии 3 не смежны, поскольку принадлежат одному слою. Если смежны какие-то вершины на расстоянии 2, то получится треугольник, у которого два ребра идут по ребрам цикла. Возьмем этот треугольник, а остальные вершины цикла разбиваются на пары смежных – искомое разбиение на четыре клики получено. Следовательно, единственный возможный вариант треугольника – треугольник XYZ, в котором расстояния XY, YZ, ZX равны $1, 4, 4$ соответственно. Пронумеруем вершины цикла числами от 1 до 9 последовательно таким образом, чтобы вершина X имела номер 1, а вершина Y – номер 2. Рассмотрим теперь вершины с номерами $3, 5, 7, 9$. Поскольку вершины на расстоянии 2 и 3 не могут быть смежными, а антиклики на 4 вершинах в $\mathcal{C}_1$ не существует, то смежными должны быть или вершины с номерами 3 и 7, или вершины с номерами 5 и 9. Но в первом случае получим разбиение на 4 клики: $X - Y - Z, 3 - 7, 4 - 5, 8 - 9$, а во втором: $X - Y - Z, 5 - 9, 3 - 4, 7 - 8$. □

Определение 6. *Обозначим через $\mathcal{U}$ множество базовых циклов на девяти вершинах, в которых найдется антиклика на четырех вершинах, через $\mathcal{A}_1$ – множество орбит мощности 9, образованных базовыми циклами из $\mathcal{U}$, через $\mathcal{A}_2$ – множество орбит мощности 11,* *образованных базовыми циклами из $\mathcal{U}$, через $\mathcal{A}_3$ – множество орбит мощности 13, образованных базовыми циклами из $\mathcal{U}$, через t – количество вершин в остальных орбитах.*

Запишем общее количество вершин в графе G':

$$9|\mathcal{A}_1| + 11|\mathcal{A}_2| + 13|\mathcal{A}_3| + t + 2|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}| = 3n. \tag{10}$$

Здесь $|\mathcal{D}|$ и $|\mathcal{C}|$ означают количество пар в множествах из определения 4. Заметим теперь, что из орбиты мощности k можно выбрать не менее $k/3$ попарно несмежных вершин. Для этого достаточно рассмотреть пересечение этой орбиты со слоями и взять то из них, которое содержит максимальное количество вершин. Также из любой орбиты мощности 9, образованной базовым циклом из $\mathcal{U}$, можно выбрать антиклику мощности 4. Кроме того, все вершины, входящие в $\mathcal{B}'$, образуют антиклику в силу леммы 6. Выберем все эти антиклики. Заметим, что никакие две из выбранных вершин не могут быть смежны, поскольку никакие вершины из разных орбит не смежны, а вершины из $\mathcal{B}'$ не могут быть смежны с вершинами из орбит в силу определения $\mathcal{B}'$. Таким образом, выбранные вершины образуют антиклику в G'. Но по условию эта антиклика не может иметь более n вершин. Запишем это в виде формулы:

$$4|\mathcal{A}_1| + 4|\mathcal{A}_2| + 5|\mathcal{A}_3| + \frac{t}{3} + |\mathcal{D}| \le n. \tag{11}$$

Домножим обе части неравенства на 3 и заменим правую часть на ее значение из формулы (10). Получим:

$$\begin{aligned} &12|\mathcal{A}_1| + 12|\mathcal{A}_2| + 15|\mathcal{A}_3| + t + 3|\mathcal{D}| \\ &\qquad\qquad \le 9|\mathcal{A}_1| + 11|\mathcal{A}_2| + 13|\mathcal{A}_3| + t + 2|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}| \end{aligned}$$

или после сокращений

$$2|\mathcal{C}| \ge |\mathcal{D}| + 3|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + 2|\mathcal{A}_3|. \tag{12}$$

Лемма 10. *Рассмотрим множество всех вершин одного из слоев (обозначим его через $\mathcal{T}$), не входящих в базовые циклы. Обозначим это множество через $\mathcal{H}$. Тогда каждому базовому циклу из $\mathcal{U}$ можно* *сопоставить вершину из $\mathcal{H}$, смежную с какой-то вершиной этого цикла, причем все сопоставленные вершины будут различны.*

Доказательство. Воспользуемся леммой Холла. Для этого рассмотрим двудольный граф, в котором первую долю будут составлять базовые циклы из $\mathcal{U}$, вершинами второй доли будут вершины множества $\mathcal{H}$. Вершины будем считать смежными, если вершина соответствующего базового цикла смежна с вершиной из $\mathcal{H}$. Проверим, что выполняется условие Холла. Пусть это не так. Тогда существует множество $\mathcal{S}$ из первой доли такое, что мощность множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ вершин, смежных хотя бы с одной из вершин $\mathcal{S}$, не превосходит $|\mathcal{S}|-1$. Рассмотрим циклы из $\mathcal{U}$, соответствующие $\mathcal{S}$. Выберем из каждого из этих циклов антиклику на четырех вершинах (это можно сделать по определению множества $\mathcal{U}$). Все выбранные вершины попарно несмежны в силу леммы 3. Добавим к этим $4|\mathcal{S}|$ вершинам еще $n - \frac{9|\mathcal{S}|}{3}$ вершин слоя $\mathcal{T}$, которые не входят в базовые циклы, соответствующие $\mathcal{S}$. Из полученного множества из $n + |\mathcal{S}|$ вершин удалим те, которые смежны с вершинами из $\mathcal{S}$ – их не более $|\mathcal{S}| - 1$. Останется не менее $n + 1$ вершин, образующих антиклику, что противоречит свойствам графа G'. $\square$

Лемма 11. $|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| \leq |\mathcal{D}|$.

Доказательство. Воспользуемся результатом леммы 10. Каждому базовому циклу из $\mathcal{U}$ можно сопоставить три смежные с ним вершины – по одной из каждого слоя – таким образом, что все эти $3|\mathcal{U}|$ вершин будут попарно различны. Следовательно, для каждой орбиты из $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ найдется сопоставленная вершина из $\mathcal{B}''$, смежная с этой орбитой, причем все эти вершины будут различны. Действительно, только вершины из $\mathcal{B}''$ могут быть смежны с орбитами, а в каждой из орбит, входящих в множества $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, найдется не более 2 вершин, не принадлежащих базовому циклу. Поэтому вершин в $\mathcal{B}''$ будет не менее, чем $|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|$. $\square$

Замечание 1. На самом деле, каждой вершине из $\mathcal{A}_1$ будет соответствовать три вершины из $\mathcal{B}''$, поэтому даже $3|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| \leq |\mathcal{D}|$.

Вернемся к исходной задаче правильной раскраски графа G. В терминах графа G' это означает, что этот граф необходимо разбить на не более, чем $\frac{8n}{5}$ клик. Будем называть клику *тривиальной*, если она содержит ровно одну вершину. Достаточно доказать, что существует разбиение, содержащее не более $\frac{n}{5}$ тривиальных клик. Действительно, тогда остальные клики будут содержать не менее, чем по две вершины, тогда всего клик будет не более, чем $\frac{1}{2}(3n - \frac{n}{5}) + \frac{n}{5} = \frac{8n}{5}$. Будем доказывать это.

Все орбиты, кроме тех, которые входят в множества $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, разобьем на клики таким образом: если орбита содержит не менее 15 вершин, то разбиваем все вершины, кроме одной, на пары смежных; если же орбита содержит не более 13 вершин, то она образована либо циклом длины 3, либо циклом длины 9, который не входит в $\mathcal{U}$. В первом случае орбита легко разбивается на нетривиальные клики: сам цикл – 3-клика, остальные клики – пары вершин, соединенных ребрами цвета 1. Во втором случае сам цикл можно разбить на 4 нетривиальные клики в силу леммы 9, остальные вершины разбиваются на пары, соединенные ребром цвета 1. Таким образом, все вершины, не входящие в орбиты из $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ можно разбить на клики таким образом, что будет не более $\frac{|t|}{15}$ тривиальных (т.е. одновершинных) клик. У каждой орбиты, входящие в множества $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, разбиваем все вершины, кроме одной, на пары смежных. Таким образом, количество тривиальных клик будет не более, чем

$$\frac{|t|}{15} + |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_3|.$$

Докажем, что это число не превосходит $\frac{n}{5}$. Домножив на 15 получим, что требуется доказать, что

$$|t| + 15|\mathcal{A}_1| + 15|\mathcal{A}_2| + 15|\mathcal{A}_3| \le 3n.$$

Заменяя правую часть по формуле(10) получим:

$$|t| + 15|\mathcal{A}_1| + 15|\mathcal{A}_2| + 15|\mathcal{A}_3| \le 9|\mathcal{A}_1| + 11|\mathcal{A}_2| + 13|\mathcal{A}_3| + |t| + 2|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}|,$$

или после сокращений

$$6|\mathcal{A}_1| + 4|\mathcal{A}_2| + 2|\mathcal{A}_3| \le 2|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}|.$$

Применим неравенство (12) к числу $2|\mathcal{C}|$. Получим, что достаточно доказать неравенство

$$6|\mathcal{A}_1| + 4|\mathcal{A}_2| + 2|\mathcal{A}_3| \le 2|\mathcal{D}| + |\mathcal{D}| + 3|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + 2|\mathcal{A}_3|.$$

Это неравенство после сокращений сводится к неравенству $|\mathcal{D}| \ge |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|$, которое, в свою очередь, следует из леммы 11. $\square$

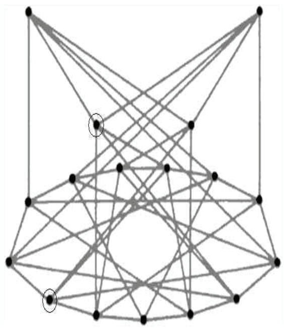

Рис. 1. Граф без треугольников и антиклик на 6 вершинах.

Заметим, что эта оценка точная и достигается для всех n, кратных пяти. Построим пример. Для этого сначала рассмотрим пример из книги [8] графа на 17 вершинах без треугольников и антиклик мощности 6. Этот граф изображен на рисунке 1.

Теперь удалим из этого графа две отмеченные на рисунке вершины. После этого граф разобьется на три антиклики мощности 5. Отметим, что в получившемся графе по-прежнему нет антиклик мощности 6, а также треугольников. Поэтому, если его разбить на клики, то получившиеся клики будут иметь мощность 1 или 2, причем хотя бы одна из этих клик будет мощности 1, поскольку 15 – нечетное число. Следовательно, этих клик должно быть не менее восьми. Этот граф, который мы обозначим через G_1 в дальнейшем будем использовать как базовый для построения примера. Он изображен на рисунке 2.

Рассмотрим граф G', получающийся объединением n компонент, изоморфных графу G_1. Заметим, что в таком графе будет $15n$ вершин, которые можно разбить на три антиклики мощности $5n$. Любая антиклика полученного графа G' будет пересекаться с каждой из компонент, изоморфных G_1, по антиклике мощности не более 5. Поэтому мощность любой антиклики G' будет не больше, чем $5n$. Рассмотрим любое разбиение G' на клики. Как было показано выше, каждая из компонент, изоморфных графу G_1, должна разбиваться не менее, чем на 8 клик, следовательно, сам граф G' будет разбиваться не менее, чем на $8n$ клик. Тогда хроматическое число его дополнения будет не менее $8n$. Но это дополнение будет слоистым графом на $15n$ вершинах, в котором максимальная клика будет иметь мощность $5n$,

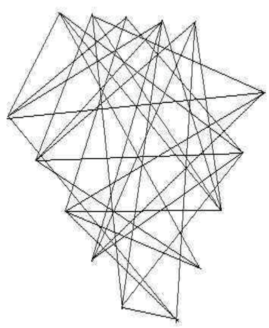

Рис. 2. Граф на 15 вершинах без треугольников
и антиклик на 6 вершинах, который разбивается на 3 антиклики мощности 5.

поэтому для него будет достигаться точная оценка из теоремы 3.

5. Случай $k = 5$

Приведем здесь разбор этого случая, чтобы проиллюстрировать метод получения оценок для небольших значений k.

Для этого случая вновь будем применять полученную выше конструкцию орбит.

Теорема 4. *Пусть в n-слоистом графе G $5n$ вершин, причем $\omega(G) = n$. Тогда $\chi(G) \leq \frac{18}{7}n$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы снова перейдем к рассмотрению дополнительного графа G' и будем использовать разбиение на орбиты. Но сначала докажем несколько лемм. Введем понятие *разбиваемости* графа.

Определение 7. *Граф на m вершинах, который можно разбить на не более, чем $\frac{m}{2}$ клик, будем называть разбиваемым. Все остальные графы будем называть неразбиваемыми.*

Напомним, что *числом Рамсея* R_m^n называется наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: любой граф на R_m^n вершинах содержит либо клику на m вершинах, либо антиклику на

n вершинах в качестве индуцированного подграфа. В книге [8] содержится подробное исследование на тему чисел Рамсея и приведены некоторые из них, известные математикам. Так $R_3^3 = 6, R_3^4 = 9, R_3^5 = 14, R_3^6 = 18, R_3^7 = 23$.

В дальнейшем мы снова будем использовать терминологию из предыдущих частей.

Лемма 12. *Неразбиваемый граф H на семи вершинах содержит антиклику мощности* 3.

Доказательство. Предположим противное. Поскольку $R_3^3 < 7$, то в этом графе найдется треугольник. Заметим, что оставшиеся после удаления треугольника четыре вершины разбиваются на две пары смежных, поскольку в оставшемся графе нет нечетных антициклов. □

Лемма 13. *Неразбиваемый граф H на 11 вершинах содержит антиклику мощности* 4.

Доказательство. Предположим противное. Поскольку $R_3^4 < 11$, то в этом графе найдется треугольник. После его удаления останется граф H_1 на 8 вершинах. Если в этом графе есть еще треугольник, то удалим также его. Если в оставшемся графе на пяти вершинах есть треугольник, то выберем образовавшиеся три треугольника и две оставшиеся вершины – это противоречит неразбиваемости графа. В противном случае выберем максимальное паросочетание. Если оно содержит хотя бы две пары вершин, то вместе с двумя треугольниками и оставшейся вершиной они образуют разбиение графа H на 5 клик, что противоречит его неразбиваемости. Если же среди этих пяти оставшихся вершин любые две пары смежных вершин пересекаются и нет треугольников, то удалим вершину наибольшей степени, которая будет инцидентна всем ребрам. После этого останется антиклика на четырех вершинах.

Если же в графе H_1 нет треугольников, то выберем в нем максимальное паросочетание. Оно должно быть мощности 3, иначе либо граф H будет разбиваемым, либо в нем будет антиклика мощности 4. Рассмотрим эти 3 пары. Если какая-то из этих пар будет соединена с оставшимися двумя вершинами (их множество обозначим через $\mathcal{X}$) ребрами, выходящими из обоих вершин пары, то можно вместо этой пары взять две новых, что противоречит максимальности паросочетания. С одной и той же вершиной $\mathcal{X}$ обе вершины пары быть соединены не могут, поскольку в H_1 нет треугольников. Следовательно, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Среди этих трех вершин найдутся две несмежные, поскольку иначе в H_1 будет треугольник. Добавив эти две вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику на четырех вершинах. $\square$

Лемма 14. *Неразбиваемый граф H на 17 вершинах содержит антиклику мощности 5.*

Доказательство. Предположим противное. Поскольку $R_3^5 = 14 < 17$, то в этом графе найдется треугольник. После его удаления останется граф на 14 вершинах. Поскольку $R_3^5 = 14$, то в этом графе есть еще треугольник, удалим также его. Если в оставшемся графе H_1 на 11 вершинах есть два непересекающихся треугольника, то оставшиеся 5 вершин должны образовывать антиклику, иначе граф разобьется на 8 клик. Если в H_1 найдется один треугольник, удалим его. Среди оставшихся 8 вершин выберем максимальное паросочетание. Если оно содержит хотя бы три пары вершин, то вместе с тремя удаленными треугольниками и оставшимися двумя вершинами они образуют разбиение графа H на 8 клик, что противоречит его неразбиваемости. Если же среди оставшихся 8 вершин максимальное паросочетание имеет мощность не более двух, то если какая-то из этих пар будет соединена с оставшимися четырьмя вершинами (их множество обозначим через $\mathcal{X}$) ребрами, выходящими из обоих вершин пары, то можно вместо этой пары взять две новых, что противоречит максимальности паросочетания. С одной и той же вершиной $\mathcal{X}$ обе вершины пары быть соединены не могут, поскольку в H_1 больше нет треугольников. Поэтому в каждой из этих пар есть вершина, несмежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Добавив любую из них к $\mathcal{X}$, получим антиклику на пяти вершинах.

Если же в графе H_1 нет треугольников, то выберем в нем максимальное паросочетание. Оно должно быть мощности 4, иначе либо граф H будет разбиваемым, либо в нем будет антиклика мощности 5. Рассмотрим эти 4 пары. Аналогично предыдущему случаю, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Среди этих четырех вершин найдутся две несмежные, поскольку иначе в H_1 будет треугольник. Добавив эти две вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику на пяти вершинах. $\square$

Лемма 15. *Неразбиваемый граф H на 23 вершинах содержит антиклику мощности 6.*

Доказательство. Предположим противное. Поскольку $R_3^6 = 18 <$

23, то в этом графе найдется треугольник. После его удаления останется граф на 20 вершинах. Поскольку $R_3^6 = 18$, то в этом графе есть еще треугольник, удалим также его. Если в оставшемся графе H_1 на 17 вершинах есть 3 непересекающихся треугольника, то среди оставшихся 8 вершин не может быть двух непересекающихся пар смежных, иначе граф разобьется на 11 клик. Но тогда среди них есть антиклика мощности 6.

Если в H_1 найдется два непересекающихся треугольника, удалим их. Среди оставшихся 11 вершин выберем максимальное паросочетание. Если оно содержит хотя бы 4 пары вершин, то вместе с четырьмя удаленными треугольниками и оставшимися тремя вершинами они образуют разбиение графа H на 11 клик, что противоречит его неразбиваемости. Если же в множестве оставшихся вершин не более трех непересекающихся пар смежных, то аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из оставшихся не менее, чем пяти вершин $\mathcal{X}$. Добавив любую из них к $\mathcal{X}$ получим антиклику на шести вершинах.

Если в графе H_1 есть треугольник, то удалим его и выберем в оставшемся множестве максимальное паросочетание. Оно должно быть мощности 5, иначе либо граф H будет разбиваемым, либо в нем будет антиклика мощности 6. Рассмотрим эти 5 пар. Множество четырех оставшихся вершин обозначим через $\mathcal{X}$. Аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Среди этих пяти вершин найдутся две несмежные, поскольку иначе в H_1 будет треугольник. Добавив эти две вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику на шести вершинах.

Наконец, если же в графе H_1 нет треугольников, то выберем в нем максимальное паросочетание. Оно должно быть мощности 6 или 7, иначе либо граф H будет разбиваемым, либо в нем будет антиклика мощности 6. Пусть сначала этих пар 6. Множество оставшихся пяти вершин обозначим через $\mathcal{X}$. Аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Среди этих вершин найдутся две несмежные, поскольку иначе в H_1 будет еще треугольник. Добавив эти две вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику даже на семи вершинах.

Остался случай семи пар. Множество оставшихся трех вершин снова обозначим через $\mathcal{X}$. Аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Поскольку в H_1 нет треугольников, а $R_3^3 = 6 < 7$, то среди этих вершин найдутся три попарно несмежные. Добавив эти вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику на шести вершинах. $\square$

Лемма 16. *Неразбиваемый граф H на 29 вершинах содержит антиклику мощности 7.*

Доказательство. Предположим противное. Поскольку $R_3^7 = 23$, то в этом графе найдется три непересекающихся треугольника. После их удаления останется граф на 20 вершинах, обозначим его через H_1.

Если в H_1 найдется четыре непересекающихся треугольника, удалим их. Среди оставшихся 8 вершин найдется пара смежных. Остальные 6 вершин образуют антиклику, иначе граф H будет разбиваем. Аналогично доказательству леммы 14, в этой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из оставшихся шести вершин. Добавляя ее к ним, получим антиклику на 7 вершинах.

Если в H_1 найдется три непересекающихся треугольника, удалим их. Среди оставшихся 11 вершин выберем максимальное паросочетание. Если оно содержит хотя бы 3 пары вершин, то вместе с удаленными треугольниками и оставшимися пятью вершинами они образуют разбиение графа H на 14 клик, что противоречит его неразбиваемости. Если же в множестве оставшихся вершин не более двух непересекающихся пар смежных, то остальные вершины образуют антиклику мощности 7.

Если в графе H_1 есть два непересекающихся треугольника, удалим их. Среди оставшихся 14 вершин выберем максимальное паросочетание. Оно должно быть мощности 4, иначе либо граф H будет разбиваемым, либо в нем будет антиклика мощности 7. Рассмотрим эти 4 пары. Множество оставшихся шести вершин обозначим через $\mathcal{X}$. Аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Среди этих четырех вершин найдутся две несмежные, поскольку иначе в H_1 будет еще треугольник. Добавив эти две вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику даже на 8 вершинах.

Если в графе H_1 есть треугольник, то удалим его. Среди оставшихся 17 вершин выберем максимальное паросочетание. Оно должно быть мощности 6, иначе либо граф H будет разбиваемым, либо в нем будет антиклика мощности 7. Рассмотрим эти 6 пар. Множество оставшихся пяти вершин обозначим через $\mathcal{X}$. Аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Среди этих шести вершин найдутся две несмежные, поскольку иначе в H_1 будет еще треугольник. Добавив эти две вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику на семи вершинах.

Наконец, если же в графе H_1 нет треугольников, то выберем в нем максимальное паросочетание. Оно должно быть мощности 7 или 8, иначе либо граф H будет разбиваемым, либо в нем будет антиклика мощности 7. Пусть сначала этих пар 7. Множество оставшихся шести вершин обозначим через $\mathcal{X}$. Аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Среди этих вершин найдутся две несмежные, поскольку иначе в H_1 будет еще треугольник. Добавив эти две вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику даже на восьми вершинах.

Остался случай восьми пар. Множество оставшихся четырех вершин снова обозначим через $\mathcal{X}$. Аналогично доказательству леммы 14, в каждой паре найдется вершина, не смежная ни с одной из вершин $\mathcal{X}$. Поскольку в H_1 нет треугольников, а $R_3^3 = 6 < 8$, то среди этих вершин найдутся три попарно несмежные. Добавив эти вершины к $\mathcal{X}$, получим антиклику на семи вершинах. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Неразбиваемые орбиты мощности, меньшей 35, будем называть *маленькими*. Рассмотрим только маленькие неразбиваемые орбиты. Обозначим через $\mathcal{A}_1$ множество таких орбит мощности 5, через $\mathcal{A}_2$ – множество орбит мощности от 7 до 9, через $\mathcal{A}_3$ – множество орбит мощности от 11 до 15, через $\mathcal{A}_4$ – множество орбит мощности от 17 до 21, через $\mathcal{A}_5$ – множество орбит мощности от 23 до 27, через $\mathcal{A}_6$ – множество орбит мощности от 29 до 33. Пусть все орбиты, не являющиеся маленькими и неразбиваемыми, содержат в сумме t вершин, множества пар $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$ возьмем как в определении 4. Тогда напишем неравенство на общее количество вершин в G':

$$5|\mathcal{A}_1|+9|\mathcal{A}_2|+15|\mathcal{A}_3|+21|\mathcal{A}_4|+27|\mathcal{A}_5|+33|\mathcal{A}_6|+t+2|\mathcal{D}|+2|\mathcal{C}| \geq 5n. \quad (13)$$

Теперь заметим, что в каждой неразбиваемой маленькой орбите, входящей в $\mathcal{A}_1$, можно выбрать антиклику мощности 2, в каждой неразбиваемой маленькой орбите, входящей в $\mathcal{A}_2$, можно выбрать антиклику мощности 3 в силу леммы 12, в каждой неразбиваемой маленькой орбите, входящей в $\mathcal{A}_3$, можно выбрать антиклику мощности 4 в силу леммы 13, в каждой неразбиваемой маленькой орбите, входящей в $\mathcal{A}_4$, можно выбрать антиклику мощности 5 в силу леммы 14, в каждой неразбиваемой маленькой орбите, входящей в $\mathcal{A}_5$, можно выбрать антиклику мощности 6 в силу леммы 15, в каждой неразбиваемой маленькой орбите, входящей в $\mathcal{A}_6$, можно выбрать антиклику мощности 7 в силу леммы 16. Антиклики из разных орбит независимы, кроме того, из всех орбит, которые не являются маленькими неразбиваемыми, можно выбрать не менее $\frac{t}{5}$ вершин одного из слоев, поэтому из объединения всех орбит можно выбрать антиклику мощности не менее

$$2|\mathcal{A}_1| + 3|\mathcal{A}_2| + 4|\mathcal{A}_3| + 5|\mathcal{A}_4| + 6|\mathcal{A}_5| + 7|\mathcal{A}_6| + \frac{t}{5}.$$

Заметим, что к выбранной антиклике можно присоединить все вершины из $\mathcal{B}'$, поскольку в силу леммы 6 никакие две вершины из $\mathcal{B}'$ не смежны, а в силу определения множества $\mathcal{B}'$ никакие вершины из $\mathcal{B}'$ не смежны с вершинами антиклик. Поскольку максимальная антиклика G' по условию не превосходит n, то можно написать неравенство:

$$2|\mathcal{A}_1| + 3|\mathcal{A}_2| + 4|\mathcal{A}_3| + 5|\mathcal{A}_4| + 6|\mathcal{A}_5| + 7|\mathcal{A}_6| + \frac{t}{5} + |\mathcal{D}| \leq n. \tag{14}$$

Теперь к выбранной из орбит антиклике мощности $2|\mathcal{A}_1| + 3|\mathcal{A}_2| + 4|\mathcal{A}_3| + 5|\mathcal{A}_4| + 6|\mathcal{A}_5| + 7|\mathcal{A}_6| + \frac{t}{5}$ добавим все вершины из пересечения множества вершин, входящих в $\mathcal{B}'$ или $\mathcal{C}$ с одним из слоев. Слой выберем таким образом, чтобы количество вершин в этом пересечении было бы не менее $\frac{|\mathcal{D}|+2|\mathcal{C}|}{5}$. Поскольку вершины из орбит смежны только с вершинами из $\mathcal{B}''$, то после добавления получится антиклика. Так как ее мощность также не может превосходить n, то можно написать еще одно неравенство:

$$2|\mathcal{A}_1| + 3|\mathcal{A}_2| + 4|\mathcal{A}_3| + 5|\mathcal{A}_4| + 6|\mathcal{A}_5| + 7|\mathcal{A}_6| + \frac{t}{5} + \frac{|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}|}{5} \leq n. \tag{15}$$

Теперь вычтем из неравенства (13) неравенства (14) и (15), умноженные на 5. Получим

$$2|\mathcal{C}| - 3|\mathcal{D}| - 5|\mathcal{A}_1| - 6|\mathcal{A}_2| - 5|\mathcal{A}_3| - 4|\mathcal{A}_4| - 3|\mathcal{A}_5| - 2|\mathcal{A}_6| \geq 0, \tag{16}$$

$$|\mathcal{D}| - 5|\mathcal{A}_1| - 6|\mathcal{A}_2| - 5|\mathcal{A}_3| - 4|\mathcal{A}_4| - 3|\mathcal{A}_5| - 2|\mathcal{A}_6| \geq 0. \tag{17}$$

Прибавляя к первому из этих неравенств второе, домноженное на 5, получаем:

$$2|\mathcal{D}| + 2|\mathcal{C}| \geq 30\mathcal{A}_1 + 36\mathcal{A}_2 + 30\mathcal{A}_3 + 24\mathcal{A}_4 + 18\mathcal{A}_5 + 12\mathcal{A}_6.$$

Добавим к обоим частям этого неравенства число $|\mathcal{U}|$ – общее количество вершин во всех маленьких неразбиваемых орбитах, которое не менее $5\mathcal{A}_1+7\mathcal{A}_2+11\mathcal{A}_3+17\mathcal{A}_4+23\mathcal{A}_5+29\mathcal{A}_6$. Получим неравенство

$$\begin{aligned} 2|\mathcal{D}|+2|\mathcal{C}|+|\mathcal{U}| &\geq 35\mathcal{A}_1+43\mathcal{A}_2+41\mathcal{A}_3+41\mathcal{A}_4+41\mathcal{A}_5+41\mathcal{A}_6 \\ &\geq 35(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4+\mathcal{A}_5+\mathcal{A}_6). \end{aligned} \tag{18}$$

Будем разбивать граф G' на клики аналогично доказательству теоремы 2. Разобьем все разбиваемые орбиты на минимальное количество клик. Этих клик будет не более половины от общего количества вершин в разбиваемых орбитах. Все неразбиваемые орбиты разобьются на пары вершин, соединенных ребром цвета 1, и еще одну вершину. Все вершины, входящие в пары из $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$, также разбиваются на пары вершин, соединенных ребрами цвета 1. Таким образом, после удаления всех 1-клик, образовавшихся от разбиения неразбиваемых орбит (обозначим это множество через $\mathcal{Z}$), граф G' разбивается на клики, которых не более половины от общего количества оставшихся вершин. Оценим мощность множества $\mathcal{Z}$. В это множество входят вершины из больших неразбиваемых орбит (обозначим это подмножество $\mathcal{Z}'$) и маленьких неразбиваемых орбит (это подмножество обозначим через $\mathcal{Z}''$). Оценим каждое из множеств $\mathcal{Z}'$ и $\mathcal{Z}''$ отдельно. Каждая из больших неразбиваемых орбит содержит не менее 35 вершин, поэтому множество $\mathcal{Z}'$ содержит не более $\frac{|\mathcal{U}'|}{35}$ вершин, где через $\mathcal{U}'$ обозначено множество вершин во всех больших неразбиваемых орбитах. В силу неравенства (18), общее количество вершин в $\mathcal{Z}''$, равное $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4+\mathcal{A}_5+\mathcal{A}_6$, будет не больше $\frac{1}{35}$ от количества всех вершин, не входящих в множество $\mathcal{U}'$. Следовательно, мощность $\mathcal{Z}$ не превосходит $\frac{1}{35}$ от общего количества вершин графа G'. Тогда граф G можно правильно окрасить не более, чем в $\frac{5n-n/7}{2}+n/7=\frac{18}{7}n$ цветов. □

Литература

1. R. L. Brooks, *On coloring the nodes of a network.* — Proc. Cambrige Phil. Soc. **37** (1941), 194–197.
2. B. Reed, *A strengthening of Brooks' theorem.* – J. Combin. Theory, Series B **76**, No. 2 (1999), 136–149.
3. A. V. Kostochka, *Degree, density, and chromatic number of graphs.* — Metody Diskret. Analiz **35** (1980), 45–70, 104–105.
4. N. Alon, *The strong chromatic number of a graph.* — Random Struct. Alg. **3** (1992), 1–7.

5. P. E. Haxell, *On the strong chromatic number.* — Combin., Probab. Comput. **13** (2004), No. 6, 857–865.
6. В. Л. Дольников, *Об одной задаче окрашивания.* — Сиб. мат. журн. **13** (1972), No. 6, 1272–1281.
7. P. Erdös, *Some remarks on the theory of graphs.* — Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292–294.
8. R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer. *Ramsey Theory.* Second Edition John Wiley and Sons, Inc. (1990).
9. E. A. Nordhaus, *On the density and chromatic numbers of graphs.* — Lect. Notes Math. **110** (1969), 245–249.
10. K. Schurger, *Inequalities for the chromatic numbers of graphs.* — J. Combin. Theory, Series B **16** (1974), No. 1, 77–85.

Berlov S. L. Chromatic numbers of layered graphs with bounded maximal clique.

A graph is called n-layered if the set of its vertices is a union of pairwise nonintersected n-cliques. We estimate chromatic numbers of n-layered graphs without $(n+1)$-cliques.

Физико-математический лицей No. 239,
ул. Кирочная, д. 8а,
191028 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sberlov@rambler.ru

Поступило 10 ноября 2010 г.