Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 380, 2010 г.

В. Г. Фарафонов

РАССЕЯНИЕ СВЕТА ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ЧАСТИЦАМИ: ЕДИНЫЙ ПОДХОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Автор с искренней признательностью
посвящает эту работу
профессору Василию Михайловичу Бабичу**

Предложена теория, объединяющая три широко известные метода – разделения переменных, расширенных граничных условий и поточечной сшивки, в которых поля представляются в виде разложений по волновым (сфероидальным) функциям. В рамках этих методов используются сходные представления полей, но существенно разные формулировки проблемы рассеяния света, в силу чего методы всегда обсуждались в литературе независимо. Изложение базируется на оригинальном подходе с разделением полей на две части с определенными свойствами и выбором специальных скалярных потенциалов для каждой из частей. Теория хорошо показывает принципиальное сходство и различия рассматриваемых методов. Проведенный ранее анализ методов для сферического базиса показал, что методы существенно дополняют друг друга при численной реализации, а использованный подход со сфероидальным базисом дает надежные результаты для частиц с высокой степенью асферичности, для которых другие методы и подходы не пригодны. Таким образом, предложенная теория, объединяющая три популярных метода, использующих разложения полей по волновым сфероидальным (сферическим) функциям, позволила разработать универсальный алгоритм, который высоко эффективен при расчетах оптических характеристик различных несферических частиц в широком диапазоне значений параметров задачи.

Ключевые слова: рассеяние света, несферические частицы, сфероидальные функции.

Часть исследований, представленных выше, выполнена при поддержке грантов РФФИ 10-02-00593а, РНП 2.1.1.2852 и НШ 1318.2008.2 .

1. Введение

Многие практические задачи оптики атмосферы и океана, экологии, биофизики и других областей науки и техники требуют учета эффектов, возникающих при рассеянии света отдельными частицами и их ансамблями. Реальные частицы, как правило, имеют несферическую форму, что заметно меняет их оптические свойства по сравнению с эквиобъемными шарами [1, 2]. В настояшее время проблема рассеяния света несферическими частицами наиболее часто исследуется с помощью методов, использующих в качестве базиса для разложения полей волновые функции [3–5]. К этой группе, в первую очередь, можно отнести метод разделения переменных (Separation of Variables Method, SVM), метод расширенных граничных условий (Extended Boundary Condition Method, EBCM) и метод поточечной сшивки (Point-Matching Method, PMM). Метод SVM с разложением полей по сферическим и сфероидальным функциям применялся в основном для рассмотрения рассеяния света шарами и сфероидами соответственно (см., например, [3, 6]). Хотя метод оказался весьма эффективным, его приложения к частицам иных форм единичны и только при использовании сферического базиса (например, [7–9]). Метод EBCM с разложением полей по сферическим функциям применяется очень широко [3, 5]. Со сфероидальным базисом этот метод рассматривался лишь теоретически в работах [10, 11], и только в работе [12] данный вариант метода был непосредственно применен для сфероидов и чебышевских сфероидальных частиц (т.е. для возмущенных сфероидов) и показал высокую эффективность, особенно при больших отношениях полуосей. Метод PMM при использовании разложений по сферическим функциям рассматривался в статье [13] и оказался достаточно эффективным для сильно возмущенных чебышевских частиц. В целом, анализ трех методов со сферическим базисом показал [9], что все они становятся неэффективными для сфероидов с отношением полуосей больше 5–10 и в общем случае для осесимметричных частиц с аналогичным отношением наибольшей протяженности к наименьшей. Таким образом, свойства методов SVM, EBCM, PMM при использовании сферических функций и результаты малочисленных работ, в которых применялись сфероидальные функции, позволяют предсказать, что рассматриваемые методы при использовании сфероидального базиса будут особенно эффективены (т.е. точны и быстры) для осесимметричных рассеивателей, форма которых существенно отличается от сферической (в смысле большого отношения наибольшей протяженности частицы к наименьшей).

В данной работе мы развиваем "сфероидальную" версию методов SVM, EBCM и PMM для решения проблемы рассеяния света несферической осесимметричной частицей. Эти методы используют сходные разложения полей по волновым функциям и формулы для расчета характеристик рассеянного излучения. До сих пор методы существовали каждый сам по себе, хотя их отличие заключается по сути только в способах определения коэффициентов разложений полей по выбранному базису. Ниже рассмотрение методов проведено в рамках оригинального подхода, использующего специально выбранные скалярные потенциалы.

В разделе 2 мы формулируем проблему рассеяния света и описываем используемый общий подход к ее решению для осесимметричных частиц в сфероидальных координатах. В разделе 3 рассматриваются методы, применяющие разложения полей по волновым сфероидальным функциям при решении проблемы. Изложение базируется на скалярных потенциалах, выбранных для определенных нами "осесимметричной" и "неосесимметричной" частей падающего, рассеянного и внутреннего полей. Здесь же даются выражения для оптических характеристик частиц через коэффициенты разложения потенциалов рассеянного поля. В разделе 4 рассматриваются важные частный и предельный случаи, а именно сфероидальные и сферические частицы. Последний раздел посвящен теоретическому исследованию области применимости EBCM, здесь же рассматриваются чебышевские сфероидальные частицы. В конце статьи приводятся заключительные выводы.

2. Проблема рассеяния света изолированной частицей

Поведение электромагнитного поля в среде определяется макроскопическими уравнениями Максвелла, которые в системе CGS записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{D}$ – напряженность и индукция электрического поля, $\vec{H}$ и $\vec{B}$ – напряженность и индукция магнитного поля, ρ и $\vec{j}$ – плотность свободных зарядов и плотность тока, c – скорость света в вакууме.

Уравнения Максвелла должны быть дополнены материальными уравнениями, которые включают величины, характеризующие свойства среды. Ниже рассматриваются среды, для которых справедливы линейные уравнения

$$\vec{D} = \widetilde{\varepsilon}\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{E} = \sigma\vec{j}, \tag{2}$$

где $\widetilde{\varepsilon}$ и μ – диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость среды, σ – ее проводимость.

Вследствие линейности уравнений (1)–(2) общность не теряется, если рассматривать лишь гармонические поля, зависимость от времени которых задается множителем $e^{-i\omega t}$, [2]. Ниже предполагается, что свободные заряды отсутствуют ($\rho = 0$).

2.1. Дифференциальные и интегральные формулировки задачи рассеяния

Для того, чтобы определить поле электромагнитного излучения, рассеянного частицей, приведенные выше уравнения должны быть дополнены граничными условиями на поверхности частицы (непрерывность тангенцильных составляющих электромагнитных полей) и на бесконечности (наличие только расходящихся волн – условие Зоммерфельда).

Обозначим известное поле излучения, падающего на частицу, как $\vec{E}^{\rm in}$, $\vec{H}^{\rm in}$, неизвестное поле рассеянного излучения как $\vec{E}^{\rm sca}$, $\vec{H}^{\rm sca}$ и поле излучения внутри частицы как $\vec{E}^{\rm int}$, $\vec{H}^{\rm int}$.

Проблема рассеяния света отдельной частицей в свободном пространстве может быть сформулирована следующим образом:

$$\Delta\vec{E}^{\rm sca} + k_1^2\vec{E}^{\rm sca} = 0, \qquad \vec{r} \in R^3 \setminus \overline{D}, \tag{3}$$

$$\Delta\vec{E}^{\rm int} + k^2\vec{E}^{\rm int} = 0, \quad \vec{r} \in D, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{\rm sca} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{\rm int} = 0, \tag{5}$$

$$\left(\vec{E}^{\rm in} + \vec{E}^{\rm sca}\right) \times \vec{n} = \vec{E}^{\rm int} \times \vec{n}, \quad \vec{r} \in S,$$

$$\left(\vec{H}^{\rm in} + \vec{H}^{\rm sca}\right) \times \vec{n} = \vec{H}^{\rm int} \times \vec{n}, \quad \vec{r} \in S, \tag{6}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\vec{E}^{\rm sca}}{\partial r} - ik_1\vec{E}^{\rm sca}\right) = 0, \tag{7}$$

где $k = k_1\sqrt{\varepsilon\mu}$ – волновое число в рассматриваемой среде, комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, $k_1 = \frac{\omega}{c}$ – волновое число в вакууме, ω – частота излучения, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S частицы, занимающей объем D, $\vec{r}$ – радиус-вектор, $r = |\vec{r}|$. Магнитные поля $\vec{H}^{\rm sca}$, $\vec{H}^{\rm int}$ определяются по известным электрическим полям $\vec{E}^{\rm sca}$, $\vec{E}^{\rm int}$ из уравнений Максвелла

$$\vec{H} = \frac{1}{i\mu k_1}\vec{\nabla}\times\vec{E}. \tag{8}$$

В некоторых случаях удобно представить проблему рассеяния света в интегральном виде, используя формулы Стрэттона–Чу. Как известно, все решения уравнений Максвелла внутри некоторой области D (в данном случае внутри частицы) удовлетворяют соотношениям [14]

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\times\int\limits_S \vec{n}\times\vec{E}(\vec{r}')\,G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}s' - \frac{1}{ik_1\varepsilon}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\\ &\times\int\limits_S \vec{n}\times\vec{H}(\vec{r}')\,G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}s' = \begin{cases} -\vec{E}(\vec{r}), & \vec{r}\in D,\\ 0, & \vec{r}\in R^3\setminus\overline{D},\end{cases}\end{aligned} \tag{9}$$

где $G(\vec{r},\vec{r}')$ – функция Грина скалярного уравнения Гельмгольца для свободного пространства

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{ik_1|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{10}$$

Вне области D для решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих граничному условию (7) на бесконечности, справедливо соотношение сходное с формулой (9):

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\times\int\limits_S \vec{n}\times\vec{E}(\vec{r}')\,G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}s' - \frac{1}{ik_1\varepsilon}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\\ &\times\int\limits_S \vec{n}\times\vec{H}(\vec{r}')\,G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}s' = \begin{cases} 0, & \vec{r}\in D,\\ \vec{E}(\vec{r}), & \vec{r}\in R^3\setminus\overline{D}.\end{cases}\end{aligned} \tag{11}$$

Если записать эти интегральные уравнения для падающего ($\vec{E}^{\rm in}$) и рассеянного ($\vec{E}^{\rm sca}$) излучения соответственно, сложить уравнения и принять во внимание граничные условия (6), то получится интегральная формулировка проблемы рассеяния в виде системы уравнений

$$\begin{gathered}\vec{\nabla} \times \int\limits_S \vec{n} \times \vec{E}^{\mathrm{int}}(\vec{r}')\, G(\vec{r}, \vec{r}')\, \mathrm{d}s' - \frac{1}{ik_1\varepsilon} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \\ \times \int\limits_S \vec{n} \times \vec{H}^{\mathrm{int}}(\vec{r}')\, G(\vec{r}, \vec{r}')\, \mathrm{d}s' = \begin{cases} -\vec{E}^{\mathrm{in}}(\vec{r}), & \vec{r} \in D, \\ \vec{E}^{\mathrm{sca}}(\vec{r}), & \vec{r} \in R^3 \setminus \overline{D}. \end{cases}\end{gathered} \tag{12}$$

Обычно первым шагом является решение интегрального уравнения для поля внутреннего излучения $\vec{E}^{\mathrm{int}}$ в области D. После этого, поле рассеянного излучения $\vec{E}^{\mathrm{sca}}$ легко находится из уравнения для области $R^3 \setminus \overline{D}$.

2.2. Векторы Герца и скалярные потенциалы

Для однородной среды решения уравнений Максвелла (1) и материальных уравнений (2) могут быть выражены через электрический и магнитный векторы Герца: $\vec{\Pi}_{\mathrm{e}}$, $\vec{\Pi}_{\mathrm{m}}$, [15]

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_{\mathrm{e}} + ik_1\mu\, \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_{\mathrm{m}}, \\ \vec{H} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_{\mathrm{m}} + ik_1\varepsilon\, \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_{\mathrm{e}}.\end{aligned} \tag{13}$$

Векторы Герца, как и гармонические поля $\vec{E}$, $\vec{H}$, удовлетворяют векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) имеет, как известно [15, 16], следующие решения:

$$\vec{L} = \nabla\psi, \quad \vec{M}^{\mathbf{a}} = \vec{\nabla} \times (\psi \cdot \vec{a}), \quad \vec{N}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{M}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\psi \cdot \vec{a}), \tag{15}$$

где $\vec{a}$ может быть или постоянным вектором, например, ортом декартовой системы координат или радиус-вектором $\vec{r}$. Функция ψ является решением соответствующего скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0. \tag{16}$$

Заметим, что для любого $\vec{a}$ имеют место соотношения

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{L} = -k^2\psi, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{M}^{\mathbf{a}} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{N}^{\mathbf{a}} = 0. \tag{17}$$

Эти равенства и трансверсальность полей ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$) показывают, что $\vec{E}$, $\vec{H}$ могут быть представлены линейными комбинациями лишь функций $\vec{M}^{\mathbf{a}}$ и $\vec{N}^{\mathbf{a}}$, но не $\vec{L}$.

Таким образом, только два компонента векторов Герца (и электромагнитного поля) являются действительно независимыми. Эти компоненты часто называют *скалярными потенциалами*. В качестве таких потенциалов можно использовать не только компоненты Π_{x}, Π_{y}, Π_{z} или их линейные комбинации, но и потенциалы Дебая, связанные с радиальными компонентами векторов Герца, а именно $V = \Pi_r/r$. Естественно, что скалярные потенциалы должны удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца (16).

Сравнение соотношений (13) и (15) позволяет сделать важный вывод о том, что любой выбор векторных волновых функций $\vec{M}^{\mathbf{a}}$ и $\vec{N}^{\mathbf{a}}$ эквивалентен соответствующему выбору скалярных потенциалов и наоборот.

Например, в случае рассеяния электромагнитного излучения шаром используются потенциалы Дебая

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{-1}{ik_1\varepsilon}\, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (V_{\mathrm{e}}\, \vec{r}) + \vec{\nabla} \times (V_{\mathrm{m}}\, \vec{r}),\\ \vec{H} &= \frac{1}{ik_1\mu}\, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (V_{\mathrm{m}}\, \vec{r}) + \vec{\nabla} \times (V_{\mathrm{e}}\, \vec{r}),\end{aligned} \tag{18}$$

где индексы e и m означают связь с электрическим и магнитным векторами Герца. Применение данных потенциалов эквивалентно применению векторных волновых функций $\vec{N}^{\mathbf{r}}$ и $\vec{M}^{\mathbf{r}}$.

Для бесконечных круговых цилиндров обычно используют z-компоненты векторов Герца

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{-1}{ik_1\varepsilon}\, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (U_{\mathrm{e}}\, \vec{i}_z) + \vec{\nabla} \times (U_{\mathrm{m}}\, \vec{i}_z),\\ \vec{H} &= \frac{1}{ik_1\mu}\, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (U_{\mathrm{m}}\, \vec{i}_z) + \vec{\nabla} \times (U_{\mathrm{e}}\, \vec{i}_z),\end{aligned} \tag{19}$$

где $\vec{i}_z$ – орт декартовой системы (x, y, z), при этом] ось симметрии цилиндра совпадает с осью z. Данным потенциалам эквивалентен выбор векторных волновых функций $\vec{N}^{\mathbf{z}}$ и $\vec{M}^{\mathbf{z}}$. Отметим, что задача рассеяния для бесконечных цилиндров значительно упрощается при падении излучения перпендикулярно оси вращения.

При решении задачи рассеяния вытянутыми или сплюснутыми сфероидами скалярные потенциалы вводятся для осесимметричного случая, когда электромагнитные поля не зависят от азимутального угла. Такая ситуация имеет место, например, при дифракции поля диполя, расположенного на оси вращения сфероида и направленного вдоль нее. В этом случае используются так называемые потенциалы Абрагама

$$P = E_\varphi\, h_\varphi, \quad Q = H_\varphi\, h_\varphi, \tag{20}$$

а остальные составляющие электромагнитных полей определяются по азимутальным компонентам из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} H_\xi &= \frac{1}{i\mu k_1 h_\eta h_\varphi}\frac{\partial P}{\partial \eta}, \qquad & H_\eta &= \frac{-1}{i\mu k_1 h_\xi h_\varphi}\frac{\partial P}{\partial \xi}, \\ E_\xi &= \frac{-1}{i\varepsilon k_1 h_\eta h_\varphi}\frac{\partial Q}{\partial \eta}, \qquad & E_\eta &= \frac{1}{i\varepsilon k_1 h_\xi h_\varphi}\frac{\partial Q}{\partial \xi}, \end{aligned} \tag{21}$$

где h_ξ, h_η, h_φ – метрические коэффициенты в сфероидальной системе координат (ξ, η, φ). Отметим, что потенциалы P и Q, как и тангенциальные составляющие полей, не удовлетворяют уравнению Гельмгольца, однако могут быть представлены в виде разложений по сфероидальным функциям [17].

2.3. Специальный подход для осесимметричных частиц в сфероидальной системе координат

Введем сфероидальную систему координат (ξ, η, φ) таким образом, чтобы ее связь с декартовой системой (x, y, z), ось z которой совпадает с осью симметрии частицы, можно было задать соотношениями [17]

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\cos\varphi, \\ y &= \frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\sin\varphi, \\ z &= \frac{d}{2}\,\xi\,\eta, \end{aligned} \tag{22}$$

где d – фокусное расстояние сфероидальных координатных поверхностей. Параметр $f = 1$ для вытянутых сфероидальных координат, при этом $\xi \in [1, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, и $f = -1$ для сплюснутых сфероидальных координат, при этом $\xi \in [0, \infty)$. Координатными поверхностями в сфероидальной системе координат являются вытянутые или сплюснутые софокусные сфероиды и двуполостные или однополостные гиперболоиды соответственно. Отметим, что вытянутые сфероидальные координаты возникают при вращении вокруг большой оси софокусных эллипсов и гипербол, а сплюснутые – при вращении вокруг малой оси этих фигур.

Уравнение поверхности S осесимметричной частицы в выбранных сфероидальных координатах запишется как

$$\xi = \xi(\eta), \tag{23}$$

при этом частицы должны быть звездными, т.е. радиус-вектор, проведенный в любую точку поверхности не пересекает ее дважды.

Для понимания представленных формул и некоторых переходов между ними необходимо знание ряда соотношений, справедливых для любой сфероидальной системы координат. Поскольку некоторые из этих соотношений могут быть найдены в литературе лишь с большим трудом, мы приводим их ниже.

Единичный вектор нормали к любой поверхности в сфероидальной системе координат можно представить в виде

$$\vec{i}_n = \frac{\nabla(\xi - \xi(\eta))}{|\nabla(\xi - \xi(\eta))|} = \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(h_\eta\, \vec{i}_\xi - \xi'_\eta\, h_\xi\, \vec{i}_\eta \right), \tag{24}$$

где $\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{i}_\varphi$ – орты сфероидальной системы, а

$$\begin{aligned} h_\xi &= \frac{d}{2} \left(\frac{\xi^2 - f\eta^2}{\xi^2 - f} \right)^{1/2}, \qquad h_\eta = \frac{d}{2} \left(\frac{\xi^2 - f\eta^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2}, \\ h_\varphi &= \frac{d}{2} \left[(\xi^2 - f)(1 - \eta^2) \right]^{1/2} \end{aligned} \tag{25}$$

являются ее метрическими коэффициентами, т.е. элемент длины равен

$$(\,\mathrm{d}l)^2 = h_\xi^2 (\mathrm{d}\xi)^2 + h_\eta^2 (\mathrm{d}\eta)^2 + h_\varphi^2 (\mathrm{d}\varphi)^2. \tag{26}$$

Единичными касательными векторами к поверхности частицы являются орты $\vec{i}_\varphi$ и

$$\vec{i}_\tau = \vec{i}_n \times \vec{i}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi'_\eta\, h_\xi\, \vec{i}_\xi + h_\eta\, \vec{i}_\eta \right). \tag{27}$$

В дальнейшем потребуются скалярные произведения ортов системы координат, связанной с поверхностью частицы, и векторов, определяющих векторные волновые функции (или скалярные потенциалы)

$$(\vec{i}_z, \vec{i}_n) = \frac{d/2}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\eta\, \frac{h_\eta}{h_\xi} - \xi'_\eta\, \xi \frac{h_\xi}{h_\eta}\right), \qquad (\vec{i}_z, \vec{i}_\tau) = \frac{d/2}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi'_\eta\, \eta + \xi\right), \tag{28}$$

$$(\vec{r}, \vec{i}_n) = \frac{(d/2)^2}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi\, \frac{h_\eta}{h_\xi} - f\eta\xi'_\eta\, \frac{h_\xi}{h_\eta}\right), \qquad (\vec{r}, \vec{i}_\tau) = \frac{(d/2)^2}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi'_\eta\, \xi + f\eta\right). \tag{29}$$

Кроме того, введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} \Delta &= (\vec{i}_z, \vec{i}_n)\,(\vec{r}, \vec{i}_\tau) - (\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)\,(\vec{r}, \vec{i}_n) \\ &= -\rho = -h_\varphi = -\frac{d}{2}(\xi^2 - f)(1 - \eta^2), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (\vec{i}_z, \vec{i}_n) \frac{\partial(\vec{r}, \vec{i}_n)}{\partial\tau} - (\vec{r}, \vec{i}_n) \frac{\partial(\vec{i}_z, \vec{i}_n)}{\partial\tau} \\ &= \left(\frac{d/2}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}}\right)^3 \Big(({\xi'_\eta}^2 - f)(\xi - \xi'_\eta) - \xi''_\eta\,(\xi^2 - f\eta^2)\Big) + (\vec{i}_z, \vec{i}_\tau), \end{aligned} \tag{31}$$

а также

$$\widetilde{\Delta} = (\vec{i}_z, \vec{i}_n)\,(\vec{r}, \vec{i}_\tau) + (\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)\,(\vec{r}, \vec{i}_n). \tag{32}$$

Элемент площади в сфероидальных координатах можно представить в виде

$$\vec{n}\,\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(\eta, \varphi)} \vec{i}_\mathrm{x} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(\eta, \varphi)} \vec{i}_\mathrm{y} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(\eta, \varphi)} \vec{i}_\mathrm{z}\right) \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\varphi, \tag{33}$$

где $\vec{i}_\mathrm{x}$, $\vec{i}_\mathrm{y}$, $\vec{i}_\mathrm{y}$ есть орты соответствующей декартовой системы координат (22), поэтому

$$\mathrm{d}s = h_\varphi \sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}\; \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\varphi. \tag{34}$$

Производная по нормали равна

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \nabla U \cdot \vec{i}_n = \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \xi'_\eta \, \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \qquad (35)$$

и по касательной –

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \nabla U \cdot \vec{i}_\tau = \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi'_\eta \, \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \right). \qquad (36)$$

Из уравнений (35) и (36) можно найти производные по координатам ξ, η

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{h_\xi}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi'_\eta \, h_\xi \, \frac{\partial U}{\partial \tau} + h_\eta \, \frac{\partial U}{\partial n} \right), \qquad (37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{h_\eta}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(h_\eta \, \frac{\partial U}{\partial \tau} - \xi'_\eta \, h_\xi \, \frac{\partial U}{\partial n} \right). \qquad (38)$$

Первая особенность нашего подхода состоит в том, что поля падающего, рассеянного и внутреннего излучения представляются в виде сумм [18]

$$\vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{A}} + \vec{E}_{\mathrm{N}}, \ \vec{H} = \vec{H}_{\mathrm{A}} + \vec{H}_{\mathrm{N}}, \qquad (39)$$

где $\vec{E}_{\mathrm{A}}, \vec{H}_{\mathrm{A}}$ не зависят от азимутального угла φ, а усреднение $\vec{E}_{\mathrm{N}}, \vec{H}_{\mathrm{N}}$ по этому углу дает нуль.

Осесимметричная и неосесимметричная части проблемы рассеяния света, т.е. определение $\vec{E}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{sca}}$, $\vec{H}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{sca}}$ and $\vec{E}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{sca}}$, $\vec{H}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{sca}}$ соответственно, могут быть решены независимо. Это следует из коммутативности оператора T, соответствующего проблеме рассеяния, и оператора $L_{\mathrm{z}} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Если воспользоваться интегральной формулировкой задачи рассеяния, то оператор T имеет вид

$$\begin{aligned} T\, E = \vec{\nabla} \times \int\limits_S \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}')\, G(\vec{r}, \vec{r}')\, \mathrm{d}s' - \frac{1}{i k_1 \varepsilon} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \\ \times \int\limits_S \vec{n} \times (\frac{1}{i \mu k_1} \vec{\nabla}' \times \vec{E}(\vec{r}'))\, G(\vec{r}, \vec{r}')\, \mathrm{d}s' \end{aligned} \qquad (40)$$

где штрих над оператором $\vec{\nabla}'$ означает, что он действует на штрихованные переменные. Равенство

$$T\,L_z = L_z\,T \tag{41}$$

легко доказывается интегрированием по частям по переменной φ' в левой части этого уравнения. При этом следует учесть независимость от азимутального угла уравнения поверхности частицы и метрических коэффициентов сфероидальной системы координат, а также соотношение $\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial \varphi'} = -\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial \varphi}$. Отметим, что внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, равны нулю в силу 2π-периодичности по переменной φ' всех функций, входящих в интегралы (40).

Коммутативность операторов T и L_z для осесимметричных частиц означает, что задача рассеяния для них решается независимо для каждого слагаемого разложений векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в ряд Фурье по азимутальному углу φ, т.е. в этом случае имеет место разделение относительно переменной φ.

Вторая особенность нашего подхода заключается в использовании скалярных потенциалов, специальным образом выбранных для каждой из частей.

2.3.1. Осесимметричная задача

В данном случае независимость полей от азимутального угла позволяет ввести удобные скалярные потенциалы

$$p = E_{A,\,\varphi}\cos\varphi, \quad q = H_{A,\,\varphi}\cos\varphi, \tag{42}$$

где $E_{A,\,\varphi}$, $H_{A,\,\varphi}$ – φ-компоненты векторов $\vec{E}_A, \vec{H}_A$. Важное отличие потенциалов p и q от потенциалов Абрагама P и Q (см. формулы (20)–(21)) состоит в том, что они удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца. Другие компоненты полей $\vec{E}_A, \vec{H}_A$ выражаются через азимутальные составляющие $E_{A,\,\varphi}$, $H_{A,\,\varphi}$ из уравнений Максвелла (см. соотношения (21)).

Как следует из дальнейшего, для ТЕ моды можно использовать лишь потенциал p, а для ТМ моды – только потенциал q. Таким образом, для осесимметричных частей полей удается свести решение векторной проблемы рассеяния к решению скалярной задачи.

2.3.2. Неосесимметричная задача

Два потенциала – z-компонент вектора Герца $U = \Pi_z$ и потенциал Дебая $V = \Pi_r/r$ используются для определения неосесимметричных частей полей:

(a) для TE-моды

$$\begin{aligned}\vec{E}_\mathrm{N} &= -\frac{1}{i\varepsilon k_1}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(U_\mathrm{e}\,\vec{i}_\mathrm{z} + V_\mathrm{e}\,\vec{r}\right), \\ \vec{H}_\mathrm{N} &= \vec{\nabla} \times \left(U_\mathrm{e}\,\vec{i}_\mathrm{z} + V_\mathrm{e}\,\vec{r}\right);\end{aligned} \tag{43}$$

(b) для TM-моды

$$\begin{aligned}\vec{E}_\mathrm{N} &= \vec{\nabla} \times \left(U_\mathrm{m}\,\vec{i}_\mathrm{z} + V_\mathrm{m}\,\vec{r}\right), \\ \vec{H}_\mathrm{N} &= \frac{1}{i\mu k_1}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(U_\mathrm{m}\,\vec{i}_\mathrm{z} + V_\mathrm{m}\,\vec{r}\right).\end{aligned} \tag{44}$$

Напомним, что потенциалы U и V применяются при решении проблемы рассеяния света бесконечным цилиндром и шаром (теория Ми) соответственно (см. формулы (18)–(19)). Из соотношений (43)–(44) следует, что в нашем подходе для напряженности электрического поля используются векторные волновые функции $\vec{N}^{\mathbf{z}}$ и $\vec{N}^{\mathbf{r}}$ для TE моды и $\vec{M}^{\mathbf{z}}$ и $\vec{M}^{\mathbf{r}}$ – для TM моды.

Далее в рамках рассматриваемого подхода либо решаются скалярные уравнения Гельмгольца для выбранных выше потенциалов с учетом граничных условий и условия излучения на бесконечности, либо ищутся решения интегральных уравнений для скалярных потенциалов, получающиеся из интегральной постановки задачи (12).

3. Методы, использующие волновые сфероидальные функции

Методы решения проблемы рассеяния, которые основываются на разложении полей по волновым сфероидальным функциям (SVM, EBCM и обобщенный PMM) будут излагаться в рамках описанного подхода, поэтому ниже мы оперируем потенциалами p,q,U,V, а не полями.

3.1. Разложение полей и потенциалов

Произвольно поляризованная плоская волна, падающая под углом α к оси вращения частицы, может быть представлена в виде суперпозиции волн двух типов (ТЕ и ТМ моды):

(a) волна ТЕ типа

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\rm in} &= -\vec{i_y}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \\ \vec{H}^{\rm in} &= \left(\vec{i_x}\cos\alpha - \vec{i_z}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right]; \end{aligned} \tag{45}$$

(b) волна ТМ типа

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\rm in} &= \left(\vec{i_x}\cos\alpha - \vec{i_z}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \\ \vec{H}^{\rm in} &= \vec{i_y}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \end{aligned} \tag{46}$$

где $(\vec{i_x}, \vec{i_y}, \vec{i_z})$ – орты декартовой системы координат.

Потенциалы p и q могут быть представлены разложениями по сфероидальным функциям с индексом $m = 1$, [17], поскольку зависимость этих потенциалов от азимутального угла φ задается в явном виде как $\cos\varphi$ (см. соотношение (42), где $E_{\rm A}$ не зависит от φ по определению). Для вытянутой сфероидальной системы координат имеем

$$\begin{matrix} p^{\rm sca} \\ q^{\rm sca} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_l^{\rm sca} \\ b_l^{\rm sca} \end{matrix} R_{1l}^{(3)}(c_1,\xi)\,\overline{S}_{1l}(c_1,\eta)\ \cos\varphi, \tag{47}$$

$$\begin{matrix} p^{\rm int} \\ q^{\rm int} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_l^{\rm int} \\ b_l^{\rm int} \end{matrix} R_{1l}^{(1)}(c_2,\xi)\,\overline{S}_{1l}(c_2,\eta)\ \cos\varphi, \tag{48}$$

где $c_i = k_i\frac{d}{2}$, $S_{ml}(c_i,\eta)$ являются вытянутыми угловыми сфероидальными функциями с нормировочным множителем $N_{ml}(c_i)$, $\overline{S}_{ml}(c_i,\eta) = N_{ml}^{-1}(c_i)\,S_{ml}(c_i,\eta)$ – нормированные вытянутые угловые сфероидальные функции [17], $R_{ml}^{(1),(3)}(c_i,\xi)$ – вытянутые радиальные сфероидальные функции первого и третьего рода. При выборе рода радиальных сфероидальных функций были учтены конечность внутреннего излучения в области D и условие излучения на бесконечности для рассеянного излучения.

Потенциалы для падающего излучения записывается следующим образом:

$$\begin{matrix} p^{\text{in}} \\ q^{\text{in}} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_l^{\text{in}} \\ b_l^{\text{in}} \end{matrix} R_{1l}^{(1)}(c_1,\xi)\,\overline{S}_{1l}(c_1,\eta)\,\cos\varphi. \tag{49}$$

С другой стороны, в случае волны TE типа имеем

$$\begin{aligned} p^{\text{in}} &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\left(\vec{E}^{\text{in}}(\vec{r}),\vec{i}_\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\right]\cos\varphi \\ &= \frac{-1}{2\pi}\left[\int e^{ik_1(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}\cos\varphi\;\mathrm{d}\varphi\right]\cos\varphi. \end{aligned} \tag{50}$$

Подставляя выражение для $\vec{E}^{\text{in}}$ и, учитывая разложение скалярной плоской волны в ряд по волновым сфероидальным функциям [17]

$$\begin{aligned} &\exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha+z\cos\alpha\right)\right] \\ &= 2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^l(2-\delta_{0m})\,\overline{S}_{lm}(c_1,\cos\alpha)\,R_{ml}^{(1)}(c_1,\xi)\,\overline{S}_{lm}(c_1,\eta)\,\cos m\varphi, \end{aligned} \tag{51}$$

получим

$$\begin{aligned} a_l^{\text{in}} &= -2\;i^l\;\overline{S}_{l1}(c_1,\cos\alpha), \\ b_l^{\text{in}} &= 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Таким образом, для волны TE типа отличны от нуля потенциалы p, аналогично для волны TM типа – потенциалы q, при этом

$$\begin{aligned} a_l^{\text{in}} &= 0, \\ b_l^{\text{in}} &= 2\;i^l\;\overline{S}_{l1}(c_1,\cos\alpha). \end{aligned} \tag{53}$$

Поскольку усреднение неосесимметричных частей полей по φ должно давать нуль, потенциалы U, V раскладываются следующим образом:

$$\begin{matrix} U^{\text{sca}} \\ V^{\text{sca}} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{\text{sca}} \\ b_{ml}^{\text{sca}} \end{matrix} R_{ml}^{(3)}(c_1,\xi)\,\overline{S}_{ml}(c_1,\eta)\,\cos m\varphi, \tag{54}$$

$$\begin{matrix} U^{\text{int}} \\ V^{\text{int}} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{\text{int}} \\ b_{ml}^{\text{int}} \end{matrix} R_{ml}^{(1)}(c_2,\xi)\,\overline{S}_{ml}(c_2,\eta)\,\cos m\varphi. \tag{55}$$

При разложении потенциалов $U^{\rm in}$, $V^{\rm in}$ следует взять выражения для $U^{\rm int}$, $V^{\rm int}$ с коэффициентами $a_{ml}^{\rm in}$, $b_{ml}^{\rm in}$ и параметром c_1 вместо c_2:

$$\begin{matrix} U^{\rm in} \\ V^{\rm in} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{\rm in} \\ b_{ml}^{\rm in} \end{matrix} R_{ml}^{(1)}(c_1,\xi)\, \overline{S}_{ml}(c_1,\eta)\, \cos m\varphi. \tag{56}$$

Для плоской волны имеем

$$a_{ml}^{\rm in} = -\frac{4i^{l-1}}{k_1} \frac{\overline{S}_{ml}(c_1,\cos\alpha)}{\sin\alpha}, \quad b_{ml}^{\rm in} = 0. \tag{57}$$

При $\alpha = 0$ отличны от нуля лишь коэффициенты с $m = 1$, при этом

$$\begin{aligned} \frac{\overline{S}_{1l}(c_1,\cos\alpha)}{\sin\alpha} &= -\overline{S}'_{1l}(c_1,\cos\alpha)\sin\alpha \\ &= -\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{1l}(c_1) \frac{(r+1)(r+2)}{2} N_{1l}^{-1}(c_1), \end{aligned} \tag{58}$$

где $d_r^{ml}(c_1)$ – коэффициенты разложения угловой сфероидальной функции $S_{ml}(c_1,\eta)$ по функциям Лежандра $P_{m+r}^m(\eta)$, а штрих означает, что суммирование ведется по четным r, если четна разность $l-m$ (равная в данном случае $l-1$), и по нечетным в противном случае.

Функция Грина (10) может быть представлена следующим образом [17]:

$$\begin{aligned} G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{ik_1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (2-\delta_m^0) R_{ml}^{(1)}(c_1,\xi_<)\, R_{ml}^{(3)}(c_1,\xi_>) \\ \times \overline{S}_{ml}(c_1,\eta)\, \overline{S}_{ml}(c_1,\eta')\, \cos m(\varphi-\varphi'), \end{aligned} \tag{59}$$

где $\xi_< = \min(\xi,\xi')$, $\xi_> = \max(\xi,\xi')$, $\delta_m^n = 1$ при $m = n$ и $\delta_m^n = 0$ при $m \neq n$.

3.2. Характеристики рассеянного излучения

Плоскость падения излучения определяется как плоскость, которая проходит через оси x и z (ось симметрии частицы) и является плоскостью отсчета для падающей волны, т.е. волновой вектор $\vec{k}_1$ лежит в плоскости xz. Аналогично вводится плоскость рассеяния, проходящая через ось z и направление распространения рассеянного излучения. Тогда векторы перпендикулярные и параллельные плоскостям падения и рассеяния записываются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\vec{i}_{\parallel}^{\,\mathrm{in}} &= \cos\alpha\,\vec{i}_x - \sin\alpha\,\vec{i}_z, \qquad & \vec{i}_{\parallel}^{\,\mathrm{sca}} &= -\vec{i}_\eta, \\
\vec{i}_{\perp}^{\,\mathrm{in}} &= -\vec{i}_y, & \vec{i}_{\perp}^{\,\mathrm{sca}} &= \vec{i}_\varphi,
\end{aligned} \tag{60}
$$

где $(\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{i}_\varphi)$ – орты сфероидальной системы координат, при этом векторы $(\vec{i}_{\parallel}^{\,\mathrm{in}}, \vec{i}_{\perp}^{\,\mathrm{in}}, \vec{i}_{k_1})$ и $(\vec{i}_{\parallel}^{\,\mathrm{sca}}, \vec{i}_{\perp}^{\,\mathrm{sca}}, \vec{i}_\xi)$ образуют правые тройки. Отметим, что в дальней зоне $r \to \infty$, поэтому $\xi \to \infty$, $\eta \to \cos\theta$, $\vec{i}_\eta \to -\vec{i}_\theta$.

Связь падающего и рассеянного излучений в дальней зоне определяется амплитудной матрицей рассеяния

$$
\begin{pmatrix} E_{\parallel}^{\mathrm{sca}} \\ E_{\perp}^{\mathrm{sca}} \end{pmatrix} = \frac{1}{-ik_1 r} e^{i(k_1 r - \vec{k}_1 \vec{r})} \begin{pmatrix} A_2 & A_3 \\ A_4 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^{\mathrm{in}} \\ E_{\perp}^{\mathrm{in}} \end{pmatrix}. \tag{61}
$$

Используя представления полей через потенциалы и асимптотики радиальных сфероидальных функций для больших значений аргумента, можно получить для ТМ моды при $r \gg 1$

$$
\begin{aligned}
\vec{E}^{\mathrm{sca}} &= \frac{e^{ik_1 r}}{-ik_1 r} \vec{A}^{\mathrm{sca}} \\
&= \frac{e^{ik_1 r}}{-ik_1 r} \Bigg\{ -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} i^{-l}\, b_{ml}^{\mathrm{sca}}\, \frac{m \overline{S}_{ml}(c_1, \cos\theta)}{\sin\theta}\, \sin m\varphi\; \vec{i}_\varphi \\
&\quad + \Bigg[-\sum_{l=1}^{\infty} i^{-l}\, b_l^{\mathrm{sca}}\, \overline{S}_{1l}(c_1, \cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} i^{1-l} (k_1\, a_{ml}^{\mathrm{sca}}\, \overline{S}_{ml}(c_1, \cos\theta) \\
&\quad + i\, b_{ml}^{\mathrm{sca}}\, \overline{S}'_{ml}(c_1, \cos\theta)) \sin\theta\, \cos m\varphi \Bigg] \vec{i}_\theta \Bigg\}
\end{aligned} \tag{62}
$$

и аналогичные выражения для ТЕ моды.

В рассматриваемом случае элементы амплитудной матрицы выражаются через коэффициенты разложений скалярных потенциалов для рассеянного излучения:

$$
]A_1 = -\sum_{l=1}^{\infty} i^{-l}\, b_l^{\rm sca}\, \overline{S}_{1l}(c_1,\cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{1-l}\,\Big(k_1\, a_{ml}^{\rm sca}\,\overline{S}_{ml}(c_1,\cos\theta)
+ i\, b_{ml}^{\rm sca}\,\overline{S}'_{ml}(c_1,\cos\theta)\Big)\sin\theta\,\cos m\varphi, \tag{63}
$$

$$
A_2 = -\sum_{l=1}^{\infty} i^{-l}\, b_l^{\rm sca}\, \overline{S}_{1l}(c_1,\cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{1-l}\,\Big(k_1\, a_{ml}^{\rm sca}\,\overline{S}_{ml}(c_1,\cos\theta)
+ i\, b_{ml}^{\rm sca}\,\overline{S}'_{ml}(c_1,\cos\theta)\Big)\sin\theta\,\cos m\varphi, \tag{64}
$$

$$
A_3 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-l}\, b_{ml}^{\rm sca}\,\frac{m\overline{S}_{ml}(c_1,\cos\theta)}{\sin\theta}\,\sin m\varphi, \tag{65}
$$

$$
A_4 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-l}\, b_{ml}^{\rm sca}\,\frac{m\overline{S}_{ml}(c_1,\cos\theta)}{\sin\theta}\,\sin m\varphi. \tag{66}
$$

Отметим, что в выражения для A_1 и A_3 входят коэффициенты, получающиеся при решении задачи рассеяния для ТЕ моды, а в выражения для A_2 и A_4 – для ТМ моды.

По амплитудной матрице рассеяния можно определить все характеристики рассеянного излучения [1, 2] – безразмерные индикатрисы рассеяния, матрицу рассеяния, степень линейной поляризации и т.д. Ниже приводятся выражения для интегральных сечений ослабления и рассеяния в случае ТЕ моды (для ТМ моды аналогично):

$$
\begin{aligned}
C_{\rm ext} &= \frac{4\pi}{k_1^2}\,{\rm Re}\left[\vec{A}^{\rm sca},\vec{i}^{(0)}\right]\Big|_{\Theta=0} \\
&= \frac{4\pi}{k_1^2}\,{\rm Re}\left[\sum_{l=1}^{\infty} i^{-l}\, a_l^{\rm sca}\,\overline{S}_{1l}\,(c_1,\cos\alpha)\right. \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-(l-1)}\Bigg(k_1\; a_{ml}^{\rm sca}\;\overline{S}_{ml}(c_1,\cos\alpha) \\
&\quad \left. + \, i\, b_{ml}^{\rm sca}\,\frac{{\rm d}\overline{S}_{ml}\,(c_1,\cos\alpha)}{{\rm d}\cos\alpha}\Bigg)\sin\alpha\right],
\end{aligned} \tag{67}
$$

$$C_{\rm sca} = \frac{1}{k_1^2}\int\limits_{4\pi}\int |\vec{A}^{\rm sca}|^2 {\rm d}\Omega$$

$$= \frac{\pi}{k_1^2}\Bigg\{\sum_{l=1}^{\infty} 2\,|a_l^{\rm sca}|^2 \;+ {\rm Re}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} i^{(n-l)}\Bigg[k_1^2\; a_{ml}^{\rm sca}\; a_{mn}^{\rm sca^*}\; \omega_{ln}^m$$

$$+ i\,k_1\left(b_{ml}^{\rm sca}\; a_{mn}^{\rm sca^*}\; \kappa_{ln}^m - a_{ml}^{\rm sca}\; b_{mn}^{\rm sca^*}\; \kappa_{nl}^m\right) \;+ b_{ml}^{\rm sca}\; b_{mn}^{\rm sca^*}\; \tau_{ln}^m\Bigg]\Bigg\}. \qquad (68)$$

Здесь $\vec{A}^{\rm sca}$ – амплитуда электрического поля рассеянного излучения, $\vec{i}^{(0)}$ – единичный вектор, определяющий поляризацию падающего излучения, Ω – телесный угол, $\Theta = \cos\alpha\cos\theta \;\; - \sin\alpha\sin\theta\sin\varphi$ – угол между направлениями падающего и рассеянного излучения. Интегралы от произведений угловых сфероидальных функций и их производных определяются следующим образом:

$$\kappa_{nl}^m(c_2, c_1) = \int\limits_{-1}^{1} \overline{S}_{mn}(c_2,\eta)\,\frac{\overline{S}_{ml}(c_1,\eta)}{{\rm d}\eta}(1-\eta^2)\,{\rm d}\eta$$

$$= N_{mn}^{-1}(c_2)\,N_{ml}^{-1}(c_1)\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(c_2)$$

$$\Bigg[d_{r-1}^{ml}(c_1)\frac{(r+2m+1)(r+m+2)}{(2r+2m+3)}$$

$$- d_{r-1}^{ml}(c_1)\frac{r(r+m-1)}{2r+2m-1}\Bigg]\frac{2}{2r+2m+1}\;\;\frac{(r+m)!}{r!},$$

$$\omega_{nl}^m(c_2, c_1) = \int\limits_{-1}^{1} \overline{S}_{mn}(c_2,\eta)\,\overline{S}_{ml}(c_1,\eta)\,(1-\eta^2)\,{\rm d}\eta$$

$$= -N_{mn}^{-1}(c_2)\,N_{ml}^{-1}(c_1)\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(c_2) \qquad (69)$$

$$\Bigg[d_{r+2}^{ml}(c_1)\frac{(r+2m+2)(r+2m+1)}{(2r+2m+3)(2r+2m+5)}$$

$$- d_r^{ml}(c_1)\frac{2[(r+m)(r+m+1)+m^2-1]}{(2r+2m-1)(2r+2m+3)}$$

$$+ d_{r-2}^{ml}(c_1)\frac{r(r-1)}{(2r+2m-3)(2r+2m-1)}\Bigg]\frac{2}{2r+2m+1}\frac{(r+m)!}{r!},$$

$$\tau_{nl}^{m}(c_2,c_1) = \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{\mathrm{d}\overline{S}_{mn}(c_2,\eta)}{\mathrm{d}\eta} \, \frac{\overline{S}_{ml}(c_1,\eta)}{\mathrm{d}\eta} (1-\eta^2) \right.$$

$$\left. + \, \frac{m^2 \, \overline{S}_{mn}(c_2,\eta) \, \overline{S}_{ml}(c_1,\eta)}{1-\eta^2} \right] \mathrm{d}\eta$$

$$= N_{mn}^{-1}(c_2) \, N_{ml}^{-1}(c_1) \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(c_2) d_r^{ml}(c_1) \frac{2(r+m)(r+m+1)}{(2r+2m+1)} \frac{(r+m)!}{r!}.$$

Кроме того, интерес представляют радарные сечения рассеяния, которые определяются интенсивностью излучения, рассеянного "назад" ($\Theta = \pi$ или $\theta = \pi - \alpha$, $\varphi = \pi$):

$$C_{\mathrm{bs}} = \frac{4\pi}{k_1^2} \left| \vec{A}^{\mathrm{sca}} \right|^2 \Bigg|_{\Theta=\pi} = \frac{4\pi}{k_1^2} \Bigg| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \, a_l^{\mathrm{sca}} \, \overline{S}_{1l} \, (c_1, \cos\alpha) \tag{70}$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} i^{\,(l-1)} \left(k_1 \; a_{ml}^{\mathrm{sca}} \; \overline{S}_{ml} \, (c_1, \cos\alpha) - i b_{ml}^{\mathrm{sca}} \; \frac{\mathrm{d}\overline{S}_{1l} \, (c_1, \cos\alpha)}{\mathrm{d}\cos\alpha} \right) \sin\alpha \Bigg|^2,$$

Для ТМ моды выражения для сечений аналогичны после замены a_l^{sca} на b_l^{sca}.

Таким образом, чтобы решить проблему рассеяния, необходимо лишь определить коэффициенты разложений потенциалов для рассеянного излучения из граничных условий.

3.3. Граничные условия

Эти условия могут быть заданы в двух формах: "дифференциальной", представленной уравнениями (6), и "интегральной" – в виде уравнения (12). Ниже граничные условия формулируются в терминах скалярных потенциалов подходящим образом для каждого из методов.

3.3.1. Осесимметричная задача

Из граничных условий в дифференциальной форме (6) с учетом соотношений (22)–(38) для потенциала q соответствующие граничные условия на поверхности частицы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{gathered} q^{\mathrm{in}} + q^{\mathrm{sca}} = q^{\mathrm{int}}, \\ \frac{\partial(q^{\mathrm{in}} + q^{\mathrm{sca}})}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial q^{\mathrm{int}}}{\partial n} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)}{\Delta} \, q^{\mathrm{int}}, \end{gathered} \tag{71}$$

где $\vec{r} \in S$, ξ'_η – производная функции (23) по η.

Интегральная форма граничных условий для q может быть получена, если записать уравнение (12) в терминах скалярных потенциалов в сфероидальных координатах, при этом следует использовать соотношения (71):

$$\int\limits_S \left\{ q^{\rm int} \frac{\partial G}{\partial n} - \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial q^{\rm int}}{\partial n} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)}{\Delta}\, q^{\rm int} \right] G \right\} {\rm d}s' = \begin{cases} -q^{\rm in}, & \vec{r} \in D, \\ q^{\rm sca}, & \vec{r} \in R^3 \setminus \overline{D}. \end{cases} \tag{72}$$

Граничные условия для потенциала p аналогичны – следует лишь заменить q и ε на p и μ соответственно.

В рамках РММ следует рассматривать невязку при выполнении граничных условий, например,

$$\delta = \left| q^{\rm in} + q^{\rm sca} - q^{\rm int} \right|^2 + \left| \frac{\partial \left(q^{\rm in} + q^{\rm sca} - \frac{1}{\varepsilon} q^{\rm int} \right)}{\partial n} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)}{\Delta}\, q^{\rm int} \right|^2. \tag{73}$$

Обычно выполнение граничных условий и, соответственно, общую невязку рассматривают как сумму невязок δ в M точках на поверхности рассеивателя. Наш анализ [13] показал, что лучше рассматривать интегральную невязку и определять неизвестные коэффициенты разложений из требования ее минимума:

$$\Delta(\vec{a}^{\rm sca} \vec{a}^{\rm int}) = \int\limits_0^\pi \delta \sin\theta d\theta \longrightarrow \min . \tag{74}$$

При численном интегрировании может быть использован метод Гаусса. Такой подход эквивалентен стандартному методу РММ, когда точки выбираются на образующих ($\varphi = {\rm const}$) в определенном смысле оптимальным образом, по крайней мере в тех случаях, когда нет обоснованной стратегии наилучшего выбора точек сшивки на поверхности частицы.

3.3.2. Неосесимметричная задача

Из граничных условий в дифференциальной форме (6) с учетом соотношений (22)–(38) граничные условия для потенциалов U, V записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{in}} + U^{\mathrm{sca}} &= U^{\mathrm{int}}, \\ \frac{\partial (U^{\mathrm{in}} + U^{\mathrm{sca}})}{\partial n} &= \frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial n} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{(\vec{r}, \vec{i}_\tau)}{\Delta} F, \\ V^{\mathrm{sca}} &= V^{\mathrm{int}}, \\ \frac{\partial V^{\mathrm{sca}}}{\partial n} &= \frac{\partial V^{\mathrm{int}}}{\partial n} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{(\vec{i}_{\mathrm{z}}, \vec{i}_\tau)}{\Delta} F, \end{aligned} \tag{75}$$

где

$$F = (\vec{i}_{\mathrm{z}}, \vec{i}_n) \frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial n} + (\vec{i}_{\mathrm{z}}, \vec{i}_\tau) \frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial \tau} + (\vec{r}, \vec{i}_n) \frac{\partial V^{\mathrm{int}}}{\partial n} + (\vec{r}, \vec{i}_\tau) \frac{\partial V^{\mathrm{int}}}{\partial \tau} + V^{\mathrm{int}}. \tag{76}$$

Здесь для простоты мы рассмотрели ТМ-моду и случай $\mu = 1$.

При применении EBCM, как и в осесимметричной задаче, получим интегральные уравнения для потенциалов

$$\int\limits_S \left\{ U^{\mathrm{int}} \frac{\partial G}{\partial n} - \left[\frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial n} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{(\vec{r}, \vec{i}_\tau)}{\Delta} F \right] G \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} -\vec{U}^{\mathrm{in}}, & \vec{r} \in D, \\ \vec{U}^{\mathrm{sca}}, & \vec{r} \in R^3 \setminus \overline{D}, \end{cases} \tag{77}$$

$$\int\limits_S \left\{ V^{\mathrm{int}} \frac{\partial G}{\partial n} - \left[\frac{\partial V^{\mathrm{int}}}{\partial n} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{(\vec{i}_{\mathrm{z}}, \vec{i}_\tau)}{\Delta} F \right] G \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} 0, & \vec{r} \in D, \\ \vec{V}^{\mathrm{sca}}, & \vec{r} \in R^3 \setminus \overline{D}. \end{cases} \tag{78}$$

Отметим, что эти интегральные уравнения более сложные, чем уравнения (72) для осесимметричной задачи, поскольку потенциалы входят в каждое уравнение.

Реализация PMM наиболее эффективным способом предполагает минимизацию интегральной невязки (см. граничные условия в форме (75):

$$\Delta\big(k_1\vec{a}^{\,\mathrm{sca}}, k_1\vec{a}^{\,\mathrm{int}}, \vec{b}^{\,\mathrm{sca}}, \vec{b}^{\,\mathrm{int}}\big) \tag{79}$$
$$= \int\limits_S \left\{ \left|U^{\mathrm{in}} + U^{\mathrm{sca}} - U^{\mathrm{int}}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{\partial(V^{\mathrm{sca}} - V^{\mathrm{int}})}{\partial n} + \cdots\right|^2 \right\} ds \to \min .$$

Здесь справедливы те же замечания, что и в осесимметричной задаче.

Для TE-моды после достаточно громоздких преобразований в случае $\mu = 1$ граничные условия для потенциалов U,V записываются следующим образом:

$$U^{\mathrm{in}} + U^{\mathrm{sca}} = U^{\mathrm{int}} - (\varepsilon - 1)\,\frac{(\vec{r}, \vec{i}_n)}{\Delta}\left[(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)U^{\mathrm{int}} + (\vec{r}, \vec{i}_\tau)V^{\mathrm{int}}\right],$$

$$\frac{\partial(U^{\mathrm{in}} + U^{\mathrm{sca}})}{\partial n} = \frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial n} - (\varepsilon - 1)\Bigg[\frac{(\vec{r}, \vec{i}_\tau)(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)}{\Delta}\,\frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial \tau} + \frac{\widetilde{\Delta}}{\Delta^2}\Delta_n U^{\mathrm{int}}$$
$$+ \frac{(\vec{r}, \vec{i}_\tau)^2}{\Delta}\frac{\partial V^{\mathrm{int}}}{\partial \tau} + \left(\frac{2(\vec{r}, \vec{i}_\tau)(\vec{r}, \vec{i}_n)}{\Delta^2}\Delta_n + \frac{(\vec{r}, \vec{i}_\tau)}{\Delta}\right)V^{\mathrm{int}}\Bigg],$$

$$V^{\mathrm{sca}} = V^{\mathrm{int}} + (\varepsilon - 1)\,\frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_n)}{\Delta}\left[(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)U^{\mathrm{int}} + (\vec{r}, \vec{i}_\tau)V^{\mathrm{int}}\right],$$

$$\frac{\partial V^{\mathrm{sca}}}{\partial n} = \frac{\partial V^{\mathrm{int}}}{\partial n} + (\varepsilon - 1)\Bigg[\frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)^2}{\Delta}\frac{\partial U^{\mathrm{int}}}{\partial \tau} + \frac{2(\vec{i}_z, \vec{i}_n)\,(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)}{\Delta^2}\Delta_n U^{\mathrm{int}}$$
$$+ \frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)(\vec{r}, \vec{i}_\tau)}{\Delta}\frac{\partial V^{\mathrm{int}}}{\partial \tau} + \left(\frac{\widetilde{\Delta}}{\Delta^2}\Delta_n + \frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)}{\Delta}\right)V^{\mathrm{int}}\Bigg]. \tag{80}$$

Поверхностные интегральные уравнения (EBCM) и интегральный функционал невязки в граничных условиях (PMM) в этом случае записываются аналогично тому, как это сделано выше для осесимметричной задачи или для TM моды в неосесимметричной задаче.

3.4. Определение коэффициентов разложений

Все три рассматриваемых метода (SVM, EBCM, PMM) имеют много общего и отличаются лишь способами определения неизвестных коэффициентов разложений потенциалов внутреннего и рассеянного излучений. Ниже этот вопрос рассматривается с единых позиций раздельно для осесимметричной и неосесимметричной задач рассеяния.

3.4.1. Осесимметричная задача

Сначала введем функции

$$a^j_{ml}(c,\eta) = R^{(1)}_{ml}(c,\xi)\ \overline{S}_{ml}(c,\eta),$$

$$b^j_{ml}(c,\eta) = \frac{\partial a^j_{ml}(c,\eta)}{\partial n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} R^{(1)}_{ml}{}'(c,\xi)\ \overline{S}_{ml}(c,\eta) - \xi'_\eta\, \frac{h_\xi}{h_\eta} R^{(1)}_{ml}(c,\xi)\ \overline{S}'_{ml}(c,\eta) \right),$$

$$t^j_{ml}(c,\eta) = \frac{\partial a^j_{ml}(c,\eta)}{\partial \tau}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi'_\eta R^{(1)}_{ml}{}'(c,\xi)\ \overline{S}_{ml}(c,\eta) + R^{(1)}_{ml}(c,\xi)\ \overline{S}'_{ml}(c,\eta) \right). \quad (81)$$

Теперь вспомогательные функции для осесимметричной задачи имеют вид

$$c^j_{ml}(c,\eta) = \frac{1}{\varepsilon}\, b^j_{ml}(c,\eta) - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \frac{(\vec{i}_z, \vec{i}_\tau)}{\Delta}\ a^j_{ml}(c,\eta). \quad (82)$$

Кроме того, целесообразно ввести матричные элементы по формулам

$$A^j_{m,ln}(c_2,c_1) = \int\limits_{-1}^{1} a^j_{ml}(c_2,\eta) \overline{S}_{mn}(c_1,\eta)\, d\eta, \quad (83)$$

а для всех других матриц – по формулам

$$Z^j_{m,ln}(c_2,c_1) = \int\limits_{-1}^{1} z^j_{ml}(c_2,\eta) \overline{S}_{mn}(c_1,\eta)\, h_\varphi \sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}\, d\eta, \quad (84)$$

где роль функций $z^j_{ml}(c_2,\eta)$ выполняют функции $b^j_{ml}(c_2,\eta)$ и $c^j_{ml}(c_2,\eta)$ для осесимметричной задачи, а также $d^j_{ml}(c_2,\eta)$, $e^j_{ml}(c_2,\eta)$, $f^j_{ml}(c_2,\eta)$ и $g^j_{ml}(c_2,\eta)$ для неосесимметричной задачи. На следующем шаге вводятся векторы

$$\vec{b}^{\,\mathrm{in}} = \{b_n^{\mathrm{in}}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \vec{b}^{\,\mathrm{sca}} = \{b_n^{\mathrm{sca}}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \vec{b}^{\,\mathrm{int}} = \{b_n^{\mathrm{int}}\}_{n=1}^{\infty}$$

и матрицы

$$A^j_m(c_2.c_1) = \{A^j_{m,ln}(c_2,c_1)\}_{ln=m}^{\infty}, \quad B^j_m(c_2,c_1) = \{B^j_{m,ln}(c_2,c_1)\}_{ln=m}^{\infty},$$
$$C^j_m(c_2,c_1) = \{C^j_{m,ln}(c_2,c_1)\}_{ln=m}^{\infty},$$

а также

$$A^h_m(c_2,c_1) = \{A^h_{m,ln}(c_2,c_1)\}_{ln=m}^{\infty}, \quad B^h_m(c_2,c_1) = \{B^h_{m,ln}(c_2,c_1)\}_{ln=m}^{\infty},$$
$$C^h_m(c_2,c_1) = \{C^h_{m,ln}(c_2,c_1)\}_{ln=m}^{\infty}.$$

Отметим, что верхние индексы j или h указывают на то, что в соответствующих соотношениях используются радиальные функции 1-го или 3-го рода.

Метод разделения переменных. При применении метода SVM разложения для потенциалов (47)–(49) следует подставить в граничные условия в дифференциальной форме (71), а затем умножить уравнения на угловые сфероидальные функции и проинтегрировать по поверхности частицы. Однако, учитывая разделение относительно переменной φ и специфику соотношений, первое уравнение умножим на $\overline{S}_{mn}(c_1,\eta)$, а второе на $h_\varphi\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}\;\overline{S}_{mn}(c_1,\eta)$ и проинтегрируем по η от -1 до 1. В результате получим для определения неизвестных коэффициентов бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ), которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{\,\mathrm{sca}} \\ \vec{b}^{\,\mathrm{int}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} \vec{b}^{\,\mathrm{in}}, \tag{85}$$

где матричные блоки, в свою очередь, представляются через ранее введенные матрицы:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \left(A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}}, & \alpha_{12} &= -\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}, \\
\alpha_{10} &= -\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}}, & \alpha_{21} &= \left(B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}}, \\
\alpha_{22} &= -\left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}, & \alpha_{20} &= -\left(B_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}},
\end{aligned} \tag{86}$$

а символ T означает транспонирование матриц.

Метод расширенных граничных условий. Метод основывается на интегральной формулировке граничных условий и использует разложения потенциалов и функции Грина по волновым сфероидальным функциям. После подстановки этих разложений в интегральные уравнения с учетом ортогональности волновых угловых сфероидальных функций на любом координатном сфероиде после приравнивания коэффициентов при этих функциях получим БСЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

Например, для *осесимметричной* части проблемы и TM-моды, подставляя разложения (47)–(49) и (59) в интегральные уравнение (72), получим следующую систему уравнений:

$$B^{\mathrm{S}}\vec{b}^{\mathrm{int}} = -\vec{b}^{\mathrm{in}}, \quad B^{\mathrm{r}}\vec{b}^{\mathrm{int}} = \vec{b}^{\mathrm{sca}}, \tag{87}$$

где

$$\begin{aligned} \left(B^{\mathrm{S}}\right)_{nl} &= i\int\limits_{-1}^{1}\left[a^{j}_{ml}(c_2,\eta)b^{h}_{mn}(c_1,\eta) - c^{j}_{ml}(c_2,\eta)a^{h}_{mn}(c_1,\eta)\right]\,d\eta, \\ \left(B^{\mathrm{r}}\right)_{nl} &= i\int\limits_{-1}^{1}\left[a^{j}_{ml}(c_2,\eta)b^{j}_{mn}(c_1,\eta) - c^{j}_{ml}(c_2,\eta)a^{j}_{mn}(c_1,\eta)\right]\,d\eta. \end{aligned} \tag{88}$$

Отметим, что для непоглощающих частиц справедливо соотношение $B^{\mathrm{r}} = \operatorname{Im} B^{\mathrm{S}}$. Эта система может быть записана аналогично системе (85):

$$\begin{pmatrix} 0 & B^{\mathrm{S}} \\ I & -B^{\mathrm{r}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{b}^{\mathrm{sca}} \\ \vec{b}^{\mathrm{int}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ 0 \end{pmatrix}\vec{b}^{\mathrm{in}}, \tag{89}$$

где $I = \{\delta_{nl}\}_{nl=1}^{\infty}$ – единичная матрица.

Метод поточечной сшивки. Подставляя в функционал (74) разложения (47)–(49), неизвестные коэффициенты определяются из условия минимума невязки. Стандартная процедура метода наименьших квадратов приводит к системе (85), при этом матричные блоки представляются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_{11})_{nl} &= \int\limits_{-1}^{1} \left[a^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, a^h_{ml}(c_1,\eta) + b^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, b^h_{ml}(c_1,\eta)\right] d\eta,\\
(\alpha_{12})_{nl} &= -\int\limits_{-1}^{1} \left[a^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, a^j_{ml}(c_2,\eta) + b^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, c^j_{ml}(c_2,\eta)\right] d\eta,\\
(\alpha_{21})_{nl} &= -\int\limits_{-1}^{1} \left[a^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, a^h_{ml}(c_1,\eta) + c^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, b^h_{ml}(c_1,\eta)\right] d\eta,\\
(\alpha_{22})_{nl} &= \int\limits_{-1}^{1} \left[a^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{ml}(c_2,\eta) + c^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, c^j_{ml}(c_2,\eta)\right] d\eta\\
(\alpha_{10})_{nl} &= -\int\limits_{-1}^{1} \left[a^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, a^j_{ml}(c_1,\eta) + b^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, b^j_{ml}(c_1,\eta)\right] d\eta,\\
(\alpha_{20})_{nl} &= \int\limits_{-1}^{1} \left[a^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{ml}(c_1,\eta) + c^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, b^j_{ml}(c_1,\eta)\right] d\eta,
\end{aligned}
\tag{90}
$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Отметим, что $(\alpha_{21})_{nl} = (\alpha_{12})^*_{ln}$, а свободные члены $(\alpha_{10})_{nl}$ и $(\alpha_{20})_{nl}$ получаюся из матричных элементов $(\alpha_{11})_{nl}$ и $(\alpha_{21})_{nl}$ при замене вторых множителей в первом и втором слагаемых $a^h_{ml}(c_1,\eta) \longrightarrow -a^j_{ml}(c_1,\eta)$ и $b^h_{ml}(c_1,\eta) \longrightarrow -b^j_{ml}(c_1,\eta)$ соответственно.

3.4.2. Неосесимметричная задача

Сначала в дополнение к функциям (81)–(82) введем новые вспомогательные функции

$$
\begin{aligned}
d^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) &= b^j_{ml}(c,\eta) - \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\frac{(\vec r,\vec i_\tau)}{\Delta}\left((\vec i_z,\vec i_n)b^j_{ml}(c,\eta)+(\vec i_z,\vec i_\tau)t^j_{ml}(c,\eta)\right),\\
e^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) &= -\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\frac{(\vec r,\vec i_\tau)}{\Delta}\left((\vec r,\vec i_n)\,b^j_{ml}(c,\eta)+(\vec r,\vec i_\tau)t^j_{ml}(c,\eta)+a^j_{ml}(c,\eta)\right),
\end{aligned}
$$

$$f^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) = \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\frac{(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta}\ \left((\vec{i}_z,\vec{i}_n)\, b^j_{ml}(c,\eta) + (\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)\, t^j_{ml}(c,\eta)\right)$$
$$g^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) = b^j_{ml}(c,\eta) + \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\frac{(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta}\ \Big((\vec{r},\vec{i}_n)\, b^j_{ml}(c,\eta) + (\vec{r},\vec{i}_\tau)\, t^j_{ml}(c,\eta) + a^j_{ml}(c,\eta)\Big). \tag{91}$$

для TM моды. В случае TE моды вводим функции для уравнений без нормальных производных (первое и третье):

$$\begin{aligned}
a^{\mathrm{j}}_{12,ml}(\eta,c) &= \left(1-(\varepsilon-1)\,\frac{(\vec{r},\vec{i}_n)\,(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta}\right) a^j_{ml}(c,\eta)\\
a^{\mathrm{j}}_{14,ml}(\eta,c) &= -\,(\varepsilon-1)\,\frac{(\vec{r},\vec{i}_n)\,(\vec{r},\vec{i}_\tau)}{\Delta}\, a^j_{ml}(c,\eta)\\
a^{\mathrm{j}}_{32,ml}(\eta,c) &= (\varepsilon-1)\,\frac{(\vec{i}_z,\vec{i}_n)\,(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta}\, a^j_{ml}(c,\eta)\\
a^{\mathrm{j}}_{34,ml}(\eta,c) &= \left(1+(\varepsilon-1)\,\frac{(\vec{i}_z,\vec{i}_n)\,(\vec{r},\vec{i}_\tau)}{\Delta}\right) a^j_{ml}(c,\eta)
\end{aligned} \tag{92}$$

а также для второго и четвертого уравнений, которые содержат нормальные производные:

$$\begin{aligned}
d^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) &= b^j_{ml}(c,\eta) - (\varepsilon-1)\left[\frac{(\vec{r},\vec{i}_\tau)(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta} t^j_{ml}(c,\eta) + \frac{\widetilde{\Delta}}{\Delta^2}\Delta_n a^j_{ml}(c,\eta)\right],\\
e^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) &= -(\varepsilon-1)\ \frac{(\vec{r},\vec{i}_\tau)}{\Delta}\left[(\vec{r},\vec{i}_\tau) t^j_{ml}(c,\eta) + \left(\frac{2(\vec{r},\vec{i}_n)}{\Delta}\Delta_n + 1\right) a^j_{ml}(c,\eta)\right],\\
f^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) &= (\varepsilon-1)\ \frac{(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta}\left[(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)\, t^j_{ml}(c,\eta) + \frac{2(\vec{i}_z,\vec{i}_n)}{\Delta}\Delta_n\, a^j_{ml}(c,\eta)\right],\\
g^{\mathrm{j}}_{ml}(\eta,c) &= b^j_{ml}(c,\eta) + (\varepsilon-1)\left[\frac{(\vec{r},\vec{i}_\tau)(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta} t^j_{ml}(c,\eta)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{\widetilde{\Delta}}{\Delta^2}\Delta_n + \frac{(\vec{i}_z,\vec{i}_\tau)}{\Delta}\right) a^j_{ml}(c,\eta)\right].
\end{aligned} \tag{93}$$

при этом использованы ранее введенные обозначения (см. формулы (28)–(32)).

Элементы для матриц A_{ij} вычисляются по формулам (83), а для других матриц по формулам – (84). Аналогично осесимметричному случаю вводятся векторы

$$\vec{a}_m^{\rm sca} = \{k_1\, a{\rm sca}_{ml}\}_{l=m}^{\infty}, \quad \vec{a}^{\rm int} s_m = \{k_1\, a_{ml}^{\rm int}\}_{l=m}^{\infty}, \quad \vec{a}_m^{\rm in} = \{k_1\, a{\rm in}_{ml}\}_{l=m}^{\infty},$$
$$\vec{b}_m^{\rm sca} = \{c_1\, b{\rm sca}_{ml}\}_{l=m}^{\infty}, \quad \vec{b}_m^{\rm int} = \{c_1\, b{\rm int}_{ml}\}_{l=m}^{\infty}$$

и матрицы

$$D_m^j(c_2, c_1) = \{D_{m,\,ln}^j(c_2, c_1)\}_{ln=m}^{\infty}, \quad E_m^j(c_2, c_1) = \{E_{m,\,ln}^j(c_2, c_1)\}_{ln=m}^{\infty},$$
$$F_m^j(c_2, c_1) = \{F_{m,\,ln}^j(c_2, c_1)\}_{ln=m}^{\infty}, \quad G_m^j(c_2, c_1) = \{G_{m,\,ln}^j(c_2, c_1)\}_{ln=m}^{\infty}.$$

Напомним, что верхние индексы указывают на то, какая радиальная функция используется в соответствующих соотношениях, в частности, $D_m^h(c_2, c_1) = \{D_{m,\,ln}^h(c_2, c_1)\}_{ln=m}^{\infty}$ и т.д.

Ниже будет рассматриваться случай ТЕ моды как наиболее общий. Укажем, что для ТМ моды некоторые функции (и соответствующие матрицы) можно получить по формулам $a_{12,ml}^{\rm j}(\eta, c) = a_{34,ml}^{\rm j}(\eta, c) = a_{ml}^{\rm j}(\eta, c)$ и $a_{14,ml}^{\rm j}(\eta, c) = a_{32,ml}^{\rm j}(\eta, c) = 0$, а другие ($d_{ml}^{\rm j}(\eta, c)$ и т.д.) следует вычислять по формулам (91) вместо соотношений (93).

Метод разделения переменных. При применении метода SVM для ТЕ моды разложения (54)–(56) следует подставить в граничные условия в дифференциальной форме (75) , а затем умножить первые два уравнения на угловые сфероидальные функции $\overline{S}_{mn}(c_1, \eta)$, а вторые – на $k_1\, h_\varphi \sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}\, \overline{S}_{mn}(c_1, \eta)\, \cos m\,\varphi$ и проинтегрировать по η от -1 до 1 и по φ от 0 до 2π. В результате для определения неизвестных коэффициентов получим БСЛАУ, которые в матричной форме имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_m^{\rm sca} \\ \vec{a}_m^{\rm int} \\ \vec{b}_m^{\rm sca} \\ \vec{b}_m^{\rm int} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \\ \alpha_{40} \end{pmatrix} \vec{a}_m{\rm in}, \tag{94}$$

где матричные блоки представляются следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha_{11} = \left(A^{\rm h}(c_1, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{12} = -\left(A_{12}^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{14} = -\left(A_{14}^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \\ \alpha_{21} = \left(B^{\rm h}(c_1, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{22} = -\left(D^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{24} = -\left(E^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \\ \alpha_{32} = -\left(A_{32}^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{33} = \left(A^{\rm h}(c_1, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{34} = -\left(A_{34}^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \\ \alpha_{42} = -\left(F^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{43} = \left(B^{\rm h}(c_1, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{44} = -\left(G^{\rm j}(c_2, c_1)\right)^{\rm T}, \\ \alpha_{10} = -\left(A^{\rm j}(c_1, c_1)\right)^{\rm T}, \quad \alpha_{20} = -\left(B^{\rm j}(c_1, c_1)\right)^{\rm T}, \end{gathered} \tag{95}$$

а остальные блоки равны нулю. Здесь следует отметить, что в неосесимметричной задаче имеет место разделение относительно переменной φ, т.е. приведенные выше БСЛАУ записываются и решаются раздельно для каждого индекса m ($m = 1, 2, \dots$).

Метод расширенных граничных условий. Точно так же как в осесимметричной задаче для определения неизвестных коэффициентов из интегральных уравнений (77) и (78) получим БСЛАУ

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} B_{11}^{\mathrm{S}} & B_{12}^{\mathrm{S}} \\ B_{21}^{\mathrm{S}} & B_{22}^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}^{\mathrm{int}} \\ \vec{b}^{\mathrm{int}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vec{a}^{\mathrm{in}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} B_{11}^{\mathrm{r}} & B_{12}^{\mathrm{r}} \\ B_{21}^{\mathrm{r}} & B_{22}^{\mathrm{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}^{\mathrm{int}} \\ \vec{b}^{\mathrm{int}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}^{\mathrm{sca}} \\ \vec{b}^{\mathrm{sca}} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{96}$$

$$\begin{aligned} \left(B_{11}^{\mathrm{S}}\right)_{nl} &= i \int\limits_{-1}^{1} \left[a_{12,\,ml}^{j}(c_2,\eta) b_{mn}^{h}(c_1,\eta) - d_{ml}^{j}(c_2,\eta) a_{mn}^{h}(c_1,\eta)\right] d\eta, \\ \left(B_{12}^{\mathrm{S}}\right)_{nl} &= i \int\limits_{-1}^{1} \left[a_{14,\,ml}^{j}(c_2,\eta) b_{mn}^{h}(c_1,\eta) - e_{ml}^{j}(c_2,\eta) a_{mn}^{h}(c_1,\eta)\right] d\eta, \\ \left(B_{21}^{\mathrm{S}}\right)_{nl} &= i \int\limits_{-1}^{1} \left[a_{32,\,ml}^{j}(c_2,\eta) b_{mn}^{h}(c_1,\eta) - f_{ml}^{j}(c_2,\eta) a_{mn}^{h}(c_1,\eta)\right] d\eta, \\ \left(B_{22}^{\mathrm{S}}\right)_{nl} &= i \int\limits_{-1}^{1} \left[a_{34,\,ml}^{j}(c_2,\eta) b_{mn}^{h}(c_1,\eta) - g_{ml}^{j}(c_2,\eta) a_{mn}^{h}(c_1,\eta)\right] d\eta. \end{aligned} \tag{97}$$

Формулы для матриц с индексом R можно получить из выше приведенных после замены h на j (см. соотношения (88)). Отметим, что для непоглощающих частиц справедливо соотношение $B^{\mathrm{R}} = \mathrm{Im}\, B^{\mathrm{S}}$.

Метод поточечной сшивки. Стандартная процедура метода наименьших квадратов для минимизации функционала (79) приводит к БСЛАУ, подобных (94):

$$\left(\alpha_{11}\right)_{nl} = \int\limits_{-1}^{1} \left[a_{mn}^{h}(c_1,\eta)^*\, a_{ml}^{h}(c_1,\eta) + b_{mn}^{h}(c_1,\eta)^*\, b_{ml}^{h}(c_1,\eta)\right] d\eta,$$

$$\left(\alpha_{12}\right)_{nl} = -\int\limits_{-1}^{1} \left[a_{mn}^{h}(c_1,\eta)^*\, a_{12,\,ml}^{j}(c_2,\eta) + b_{mn}^{h}(c_1,\eta)^*\, d_{ml}^{j}(c_2,\eta)\right] d\eta,$$

$$(\alpha_{13})_{nl} = 0,$$

$$(\alpha_{14})_{nl} = -\int\limits_{-1}^{1} \Big[a^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, a^j_{14,\,ml}(c_2,\eta) + b^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, e^j_{ml}(c_2,\eta)\Big]\, d\eta,$$

$$(\alpha_{22})_{nl} = \int\limits_{-1}^{1} \Big[a^j_{12,\,mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{12,\,ml}(c_2,\eta) + d^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, d^j_{ml}(c_2,\eta)$$

$$+a^j_{32,\,mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{32,\,ml}(c_2,\eta) + f^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, f^j_{ml}(c_2,\eta)\Big]\, d\eta,$$

$$(\alpha_{23})_{nl} = -\int\limits_{-1}^{1} \Big[a^j_{32,\,mn}(c_2,\eta)^*\, a^h_{ml}(c_1,\eta) + f^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, b^h_{ml}(c_1,\eta)\Big]\, d\eta,$$

$$(\alpha_{24})_{nl} = \int\limits_{-1}^{1} \Big[a^j_{12,\,mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{14,\,ml}(c_2,\eta) + d^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, e^j_{ml}(c_2,\eta) \qquad (98)$$

$$+a^j_{32,\,mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{34,\,ml}(c_2,\eta) + f^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, g^j_{ml}(c_2,\eta)\Big]\, d\eta,$$

$$(\alpha_{33})_{nl} = \int\limits_{-1}^{1} \left[a^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, a^h_{ml}(c_1,\eta) + b^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, b^h_{ml}(c_1,\eta)\right]\, d\eta,$$

$$(\alpha_{34})_{nl} = -\int\limits_{-1}^{1} \Big[a^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, a^j_{34,\,ml}(c_2,\eta) + b^h_{mn}(c_1,\eta)^*\, g^j_{ml}(c_2,\eta)\Big]\, d\eta,$$

$$(\alpha_{44})_{nl} = \int\limits_{-1}^{1} \left[a^j_{14,\,mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{14,\,ml}(c_2,\eta) + e^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, e^j_{ml}(c_2,\eta)\right.$$

$$\left.+a^j_{34,\,mn}(c_2,\eta)^*\, a^j_{34,\,ml}(c_2,\eta) + g^j_{mn}(c_2,\eta)^*\, g^j_{ml}(c_2,\eta)\right] d\eta,$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Отметим, что $(\alpha_{ij})_{nl} = (\alpha_{ji})^*_{ln}$, а свободные члены $(\alpha_{i0})_{nl}$ получаюся из матричных элементов $(\alpha_{i1})_{nl}$ при замене вторых множителей в первом и втором слагаемых $a^h_{ml}(c_1,\eta) \longrightarrow -a^j_{ml}(c_1,\eta)$ и $b^h_{ml}(c_1,\eta) \longrightarrow -b^j_{ml}(c_1,\eta)$ соответственно.

3.5. Матричный подход и эквивалентность методов

Выше матричные элементы БСЛАУ для определения неизвестных коэффициентов были представлены в виде интегралов от произведений волновых сфероидальных функций и их производных (см., например, формулы (88) и (90)). Для обозначения этих методов мы будем использовать букву “i”: SVMi, EBCMi, PMMi. Ниже матрицы БСЛАУ для EBCMi и PMMi будут представлены в виде произведений исходных бесконечномерных матриц, введенных в рамках SVM (отметим, что SVMi и SVMm просто совпадают). Для обозначения таких методов будем использовать дополнительную букву “m”: SVM, EBCMm, PMMm. Интегральные и матричные методы эквивалентны между собой с теоретической точки зрения, когда рассматриваются бесконечные разложения для полей (потенциалов) и бесконечномерные матрицы в БСЛАУ для определения неизвестных коэффициентов. Ниже мы покажем, что эквивалентны SVM, EBCMm и PMMm.

3.5.1. Осесимметричная задача

При применении EBCMi, представляя функции в подынтегральном выражении (88) в виде разложений по ортонормированной системе $\{\overline{S}_{mn}(c_1,\eta)\}_{n=m}^{\infty}$, нетрудно получить следующие матричные соотношения:

$$\begin{aligned} B^{\mathrm{S}} &= i\left[B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right], \\ B^{\mathrm{R}} &= -i\left[B_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right]. \end{aligned} \tag{99}$$

Теперь следует указать на то, что БСЛАУ (85) и (89), получающиеся в рамках SVM и EBCMm, эквивалентны, т.е. могут быть получены одна из другой. Например, умножая первое уравнение системы (85) на $B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)$, а второе на $-A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)$ и складывая, получим первое уравнение системы (89). Аналогично умножая первое уравнение системы (89) на $-(A_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1))^{\mathrm{T}}$, а второе на $(A_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1))^{\mathrm{T}}$ и складывая, получим первое уравнение системы (85). Подобные операции справедливы и для вторых уравнений систем (85) и (89). Во всех перечисленных выше преобразованиях следует учитывать соотношения

$$
\begin{aligned}
&B_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\left(A_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\left(B_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} = i\,I,\\
&B_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\left(A_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\left(B_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} = 0,\\
&B_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\left(A_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\left(B_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} = 0,\\
&\left(A_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} B_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1) - \left(A_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} B_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1) = i\,I,\\
&\left(A_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} A_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1) - \left(A_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} A_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1) = 0,\\
&\left(B_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} B_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1) - \left(B_m^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} B_m^{\mathrm{h}}(c_1,c_1) = 0,
\end{aligned}
\tag{100}
$$

при этом нужно принимать во внимание вронскианы для сфероидальных функций. Отметим, что данные соотношения можно использовать для контроля правильности численных расчетов, имея в виду, однако, что матрицы являются бесконечномерными.

В случае РММm матричные блоки БСЛАУ аналогичным способом можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \left(A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{*}\left(A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{*}\left(B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}},\\
\alpha_{12} &= -\left[\left(A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{*}\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{*}\left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\alpha_{21} &= -\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{*}\left(A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{*}\left(B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}},\\
\alpha_{22} &= \left[\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{*}\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{*}\left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\alpha_{10} &= -\left[\left(A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{*}\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{*}\left(B_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\alpha_{20} &= \left[\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{*}\left(A_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{*}\left(B_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],
\end{aligned}
\tag{101}
$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, при этом $\alpha_{11} = \left|A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right|^2 + \left|B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right|^2$, $\alpha_{21} = {\alpha_{12}}^{\mathrm{T}\,*}$ и $\alpha_{22} = \left|A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right|^2 + \left|C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right|^2$. Правые части α_{10}, α_{20} получаются из матриц α_{11}, α_{12} заменой во втором множителе каждого слагаемого индекса h на индекс j и заменой знака на противоположный. Отметим, что БСЛАУ для PMM являются положительно определенными, поэтому они всегда однозначно разрешимы.

При обсуждении связи методов SVM и PMM следует указать на то, что условие (74) эквивалентно

$$\left|(A_1^{\rm h}(c_1,c_1))^{\rm T}\,\vec{b}^{\rm sca}-(A_1^{\rm j}(c_2,c_1))^{\rm T}\,\vec{b}^{\rm in}T+(A_1^{\rm j}(c_1,c_1))^{\rm T}\,\vec{b}^{\rm in}\right|^2 \tag{102}$$
$$\left|(B_1^{\rm h}(c_1,c_1))^{\rm T}\,\vec{b}^{\rm sca}-(C_1^{\rm j}(c_2,c_1))^{\rm T}\,\vec{b}^{\rm in}T+(B_1^{\rm j}(c_1,c_1))^{\rm T}\,\vec{b}^{\rm in}\right|^2\to\min\,.$$

Достоверные результаты PMM дает, если невязка в условии (74) и, соответственно, в условии (102) равна нулю. В противном случае граничные условия на поверхности рассеивателя не выполняются. Если невязка равна нулю, то автоматически выполняются уравнения в системе (85) для SVM. И , наоборот, если справедливы уравнения (85), то невязка (102) равна нулю и PMM дает достоверные результаты.

Таким образом, при равенстве нулю невязки при выполнении граничных условий на поверхности рассеивателя все три метода эквивалентны и дают одни и те же результаты. Данное условие выполняется при выполнении так называемой гипотезы Релея – все разложения по волновым сфероидальным функциям сходятся вплоть до поверхности частицы. Если гипотеза Релея несправедлива, то результаты, полученные при помощи SVM и PMM, ставятся под сомнение. Об EBCM разговор особый и он будет продолжен в следующем параграфе. Здесь можно отметить, что в случае применения сферического базиса EBCMi дает достоверные результаты в дальней зоне при более слабом условии, чем гипотеза Релея (см. [19]). Отметим, что здесь все матрицы и системы предполагаются бесконечномерными. При численной реализации все бесконечные матрицы заменяются усеченными (конечномерными) матрицами, поэтому численные результаты получаются при применении заведомо приближенного подхода. Выбор количества учитываемых слагаемых в разложениях полей (т.е. размерности усеченных матриц) очень важен, поэтому здесь следует уделять большое внимание тестам на точность численных расчетов.

При невыполнении условий математической корректности SVM, EBCM, PMM следует рассматривать не как строгие методы, а как приближенные методы, которые, тем не менее, дают “хорошие” численные результаты (т.е. с достаточно высокой точностью) в довольно широком диапазоне изменения параметров. В этом случае особенно важную роль играют тесты по проверке точности полученных численных результатов.

В целом можно отметить, что при численной реализации SVM, EBCMm, PMMm дают более близкие друг к другу результаты по сравнению с EBCMi, PMMi. Это связано с тем, что только в рамках EBCMi вопросы разрешимости БСЛАУ напрямую связаны с асимптотиками матричных элементов при больших значениях индекса.

3.5.2. Неосесимметричная задача

Аналогичные результаты получаются при решении неосесимметричной задачи. В рамках EBCMm матричные блоки БСЛАУ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_{11}^{\mathrm{S}} &= i\left[B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(A_{12}^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(D_m^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
B_{12}^{\mathrm{S}} &= i\left[B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(A_{14}^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(E^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
B_{21}^{\mathrm{S}} &= i\left[B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(A_{32}^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(F^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
B_{22}^{\mathrm{S}} &= i\left[B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(A_{34}^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\,\left(G^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right].
\end{aligned} \tag{103}$$

Выражения для B_{ij}^{R} получаются из B_{ij}^{S} после замены матриц A^{h} и B_m^{h} на A_m^{j} и B_m^{j}.

Эквивалентность систем (94) и (96) в рамках SVM и EBCM соответственно проверяется с помощью преобразований аналогичных указанным для осесимметричного случая (см. формулы (101)).

При применении PMMm по аналогии с осесимметричным случаем имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}},\\
\alpha_{12} &= -\left[\left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(A_{12}^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(D^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\alpha_{13} &= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{14} &= -\left[\left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{14}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(E^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\alpha_{22} &= \left(A^{\mathrm{j}}_{12}(c_2,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{12}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(D^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^*\left(D^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\\
&\quad + \left(A^{\mathrm{j}}_{32}(c_2,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{32}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(F^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^*\left(F^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}},\\
\alpha_{23} &= -\left[\left(A^{\mathrm{j}}_{12}(c_2,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(F^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^*\left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\alpha_{24} &= \left(A^{\mathrm{j}}_{12}(c_2,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{14}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(D^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^*\left(E^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\\
&\quad + \left(A^{\mathrm{j}}_{32}(c_2,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{34}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(F^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^*\left(G^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}},
\end{aligned} \tag{104}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{33} &= \left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^{\mathrm{T}},\\
\alpha_{34} &= -\left[\left(A^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{14}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(B^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)\right)^*\left(E^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\right],\\
\alpha_{44} &= \left(A^{\mathrm{j}}_{14}(c_2,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{14}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(E^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^*\left(E^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}\\
&\quad + \left(A^{\mathrm{j}}_{34}(c_2,c_1)\right)^*\left(A^{\mathrm{j}}_{34}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}} + \left(G^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)\right)^*\left(G^{\mathrm{h}}(c_2,c_1)\right)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

Правые части БСЛАУ можно получить точно также как в осесимметричном случае (см. соотношения (101) и комментарий к ним).

Замечательный результат полученный в этом разделе заключается в том, что матрицы БСЛАУ для всех трех методов (а именно SVM, EBCM, PMM) зависят от одних и тех же матриц: $A_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)$, $A_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)$, $A_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)$, $B_1^{\mathrm{h}}(c_1,c_1)$, $B_1^{\mathrm{j}}(c_1,c_1)$, $C_1^{\mathrm{j}}(c_2,c_1)$.

4. Частный и предельный случаи

Важнейшим частным случаем осесимметричной частицы является сфероид. В этом случае поверхность рассеивателя является координатной и ее уравнение записывается следующим образом:

$$\xi = \xi_0, \tag{105}$$

при этом имеют место самые большие упрощения в приведенных выше формулах, поскольку

$$\xi'_\eta = 0. \tag{106}$$

Нетрудно убедиться, что соотношения для граничных условий (71), (75), интегральных уравнений (72), (77), (78) и матричных элементов (99), (89) совпадают с полученными ранее в статье [10] для версии EBCM со сфероидальными функциями, разработанной только для многослойных конфокальных сфероидов.

Если далее разбить интегралы (83), (84) (см. также (82), (91)–(93))) на части, вынести из-под интегралов радиальные функции и их производные, независящие для сфероидов от переменной интегрирования η, и представить оставшиеся интегралы от угловых функций и их производных в виде сумм коэффициентов разложения этих функций по функциям Лежандра d_r^{ml}, то получится решение, эквивалентное найденному ранее методом разделения переменных (SVM см., например, работу [6]).

Другим важным предельным случаем является переход от сфероидальной системы координат к сферической

$$\xi \to \infty, \quad \frac{d}{2} \to 0, \quad \xi\,\frac{d}{2} \to r, \quad \eta \to \cos\theta, \quad \varphi = \varphi. \tag{107}$$

Здесь имеют место соотношения для ортов

$$\vec{i}_\xi \to \vec{i}_r, \quad \vec{i}_\eta \to -\vec{i}_\theta, \quad \vec{i}_\varphi = \vec{i}_\varphi, \tag{108}$$

метрических коэффициентов

$$\begin{gathered} h_\xi \to \frac{d}{2}, \quad h_\eta \to \frac{r}{\sin\theta}, \quad h_\varphi \to r\sin\theta, \\ \sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2} \to \frac{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}}{\sin\theta} \end{gathered} \tag{109}$$

и для производных по координатам

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\xi} \to \frac{d}{2}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial\eta} \to -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\cos\theta}, \\ \xi'_\eta \to -\frac{r'_\theta}{\frac{d}{2}\sin\theta}, \quad \xi''_\eta \to \frac{(r''_\theta\sin\theta - r'_\theta\cos\theta)}{\frac{d}{2}(\sin\theta)^3}. \end{gathered} \tag{110}$$

В этом случае сфероидальные функции и их производные переходят в соответствующие сферические функции ($c \to 0$, $c\xi \to kr$)

$$\begin{gathered} S_{mn}(c,\eta) \to P_n^m(\cos\theta), \quad R_{mn}^{(1)}(c,\xi) \to j_n(kr), \\ R_{mn}^{(3)}(c,\xi) \to h_n^{(1)}(kr) \end{gathered} \tag{111}$$

и их производные

$$S'_{mn}(c,\eta) \to P_n^{m\,\prime}(\cos\theta), \quad R_{mn}^{(1)\,\prime}(c,\xi) \to c\, j'_n(kr), \\ R_{mn}^{(3)\,\prime}(c,\xi) \to c\, h_n^{(1)\,\prime}(kr). \tag{112}$$

Если выполнить эти предельные переходы в выше приведенных формулах (24)–(38), то получаются соотношения

$$\vec{i}_n = \frac{1}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}} \left(r\vec{i}_r - r'_\theta \vec{i}_\theta \right), \quad \vec{i}_\tau = \frac{-1}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}} \left(r'_\theta \vec{i}_r + r\vec{i}_\theta \right), \tag{113}$$

$$(\vec{i}_z, \vec{i}_n) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}} (r\cos\theta + r'_\theta \sin\theta), \\ (\vec{i}_z, \vec{i}_\tau) = -\frac{(r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta)}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}}, \tag{114}$$

$$(\vec{r}, \vec{i}_n) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}}, \quad (\vec{r}, \vec{i}_\tau) = \frac{-rr'_\theta}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}}, \tag{115}$$

$$\Delta = \rho = h_\varphi = r\sin\theta, \tag{116}$$

$$\Delta_n = -\frac{-r\sin\theta}{\left(\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}\right)^3} \left(r^2 - rr''_\theta + 2{r'_\theta}^2 \right), \tag{117}$$

$$\mathrm{d}s = r\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2} \sin\theta \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi, \tag{118}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}} \left(r\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{r'_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \tag{119}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{-1}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}} \left(r'_\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \tag{120}$$

при этом вспомогательные функции (81) преобразуются следующим образом:

$$a_{ml}^j(c,\eta) \to a_{ml}^j(k,\theta) = j_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta),$$

$$
\begin{aligned}
& b^j_{ml}(c,\eta) \to b^j_{ml}(k,\theta) \\
& \quad = \frac{1}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}} \left(kr j'_n(kr)\, P^m_n(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r}\, \sin\theta j_n(kr)\, P^m_n{}'(\cos\theta) \right), \\
& t^j_{ml}(c,\eta) \to t^j_{ml}(k,\theta) \qquad\qquad (121) \\
& \quad = \frac{-1}{\sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}} \left(kr'_\theta j'_n(kr)\, P^m_n(\cos\theta) - \sin\theta j_n(kr)\, P^m_n{}'(\cos\theta) \right).
\end{aligned}
$$

В результате для БСЛАУ получим найденные выше соотношения (см. §3.4), причем они совпадают с БСЛАУ, полученными ранее при использовании рассматриваемых методов со сферическим базисом [9, 13]. Отметим, что рассуждения, связанные с матричным подходом (см. §3.5), остаются верными и в случае сферического базиса.

Для шаров классическое, высоко эффективное решение, называемое теорией Ми, получается методом разделения переменных. Эта теория использует векторные волновые функции $\vec{M}^{\mathbf{r}}_{mn}$ и $\vec{N}^{\mathbf{r}}_{mn}$ или, что эквивалентно, потенциалы Дебая (см. соотношения (18)). Ниже мы покажем, как проблема рассеяния света шаром решается с использованием скалярных потенциалов p, q, U, V. Это поможет понять эффективность рассматриваемого подхода для частиц, близких к шару.

Уравнение поверхности шара радиуса R в сферической системе координат имеет вид $r(\theta) = R$, и граничные условия (71) для осесимметричной проблемы упрощаются, поскольку $r'_\theta = 0$. Подставляя разложения (47)–(49) в соотношения (71) и используя ортогональность угловых сферических функций, можно легко найти неизвестные коэффициенты в явном виде. Например, для TM-моды

$$
b^{\rm sca}_n = -\frac{j_n(x)(j_n(x_0))' - \varepsilon j_n(x_0)(j_n(x))'}{j_n(x)(x_0 h^{(1)}_n(x_0))' - \varepsilon h^{(1)}_n(x_0)(x j_n(x))'}\, b^{\rm in}_n, \qquad (122)
$$

где $x = kR$, $x_0 = k_1 R$.

Коэффициенты для $U^{\rm sca}$ и $U^{\rm int}$ получаются из первого и второго уравнений в граничных условиях (75), которые совпадают с соотношениями (71) для потенциала p в случае $\mu = 1$. Коэффициенты для $V^{\rm sca}$ и $V^{\rm int}$ определяются из двух оставшихся уравнений и выражаются через коэффициенты разложения $U^{\rm int}$ следующим образом:

$$b_{mn}^{\rm sca} = \frac{\left[\frac{n-m}{2n-1} j_n(x) a_{m,n-1}^{\rm int} + \frac{n+m+1}{2n+3}\left(j_n(x) + \frac{1}{x} j_{n+1}(x)\right) a_{m,n+1}^{\rm int}\right]}{\varepsilon j_n(x)(x_0 h_n^{(1)}(x_0))' - h_n^{(1)}(x_0)(x j_n(x))'} \times \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) k j_n(x). \tag{123}$$

В случае ТЕ-моды решение аналогично.

Сравнение соотношений (122)–(123) с хорошо известными формулами теории Ми (см., например, [1, 2] показывает, что для шаров наш подход практически столь же эффективен, как и теория Ми. Заметим, что для плоской волны, падающей на шар, всегда можно выбрать систему координат так, что волновой вектор будет параллелен оси z (оси симметрии частицы). В результате осесимметричные части полей равны нулю, а неосесимметричные таковы, что не равны нулю лишь члены разложений для $m = 1$. В результате соотношения (123) упрощаются еще больше.

5. Исследование БСЛАУ для EBCM со сфероидальным базисом

Ниже в рамках EBCM анализируется разрешимость соответствующих БСЛАУ, возможность их решения методом редукции, а также сходимость разложений полей и потенциалов вплоть до поверхности частицы (обобщенная гипотеза Релея). Аналогичная задача в случае сферического базиса была рассмотрена в статье [19].

Для исследования БСЛАУ (например, ТЕ мода в осесимметричной задаче) необходима асимптотика матричных элементов при больших значениях индексов. Сначала приведем соответствующие асимптотики сфероидальных функций [18]:

$$\begin{aligned} S_{mn}(c,\eta) &= P_n^m(\cos\vartheta)\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= n^m \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\vartheta}} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} R_{mn}^{(1)}(c,\xi) &= \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - f}}{2\sqrt{\xi^2 - f}}\right)^{\frac{1}{2}} j_n\Big(\frac{c}{2}\big(\xi + \sqrt{\xi^2 - f}\big)\Big)\left[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right] \\ &= \left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - f}}{2\sqrt{\xi^2 - f}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n!}{(2n+1)!}\left[c(\xi + \sqrt{\xi^2 - f})\right]^n \left[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right], \end{aligned} \tag{125}$$

$$R^{(3)}_{mn}(c,\xi) = \left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-f}}{2\sqrt{\xi^2-f}}\right)^{\frac{1}{2}} h^{(1)}_n\left(\frac{c}{2}\left(\xi+\sqrt{\xi^2-f}\right)\right)\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= -2i\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-f}}{2\sqrt{\xi^2-f}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2n)!}{n!}\left[c(\xi+\sqrt{\xi^2-f})\right]^{-(n+1)}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad (126)$$

где $\cos\vartheta = \eta$ и $\vartheta \in [0,\pi]$. Отметим, что соотношения (124)–(126) справедливы как для вытянутых, так и для сплюснутых сфероидальных функций.

При анализе матричных элементов БСЛАУ (87) для EBCM в случае $l \gg n$, нужно рассматривать интегралы вида

$$I_{s,1} = \int_0^\pi f_1(\vartheta)\ \exp\left\{l\left[\ln c_2\left(\xi(\vartheta)+\sqrt{\xi^2(\vartheta)-f}\right)+is\vartheta\right]\right\}d\vartheta, \qquad (127)$$

а при $n \gg l$ –

$$I_{s,2} = \int_0^\pi f_2(\vartheta)\ \exp\left\{n\left[-\ln c_1\left(\xi(\vartheta)+\sqrt{\xi^2(\vartheta)-f}\right)+is\vartheta\right]\right\}d\vartheta, \qquad (128)$$

где $s=\pm 1$, а $f_{1,2}(\vartheta)$ - медленно меняющиеся функции. После введения вместо ξ новой переменной

$$\sigma = \frac{d}{2}\left(\xi(\vartheta)+\sqrt{\xi^2(\vartheta)-f}\right) \qquad (129)$$

задача оценки интегралов становится аналогичной той, которая была решена для случая сферического базиса [19].

Оценивание интегралов (127)–(128) по методу перевала дает

$$\begin{aligned}
\left(B^S_A\right)_{nl} &= \mathrm{const}\,\frac{(k_2\,\sigma_1)^l}{2^l\,l!}\left[1+O\left(\frac{1}{l}\right)\right],\\
\left(B^S_A\right)_{nl} &= \mathrm{const}\,\frac{2^n\,n!}{(k_1\,\sigma_2)^n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],
\end{aligned} \qquad (130)$$

где

$$\sigma_1 = \max\left|\sigma(\vartheta_s)e^{is\vartheta_s}\right| = \max\left|\frac{d}{2}\left(\xi(\vartheta_s)+\sqrt{\xi^2(\vartheta_s)-f}\right)e^{is\vartheta_s}\right|, \qquad (131)$$

$$\sigma_2 = \min \left|\sigma(\vartheta_s) e^{is\vartheta_s}\right| = \min \left| \frac{d}{2} \left(\xi(\vartheta_s) + \sqrt{\xi^2(\vartheta_s) - f} \right) e^{is\vartheta_s} \right|, \qquad (132)$$

а точки перевала определяются из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - f}} \frac{d\xi}{d\vartheta} + is = 0 \qquad (133)$$

или

$$\frac{\sigma'_\vartheta}{\sigma} + is = 0. \qquad (134)$$

Максимум ищется среди тех корней ϑ_s уравнения (134), которым при отображении $z = \sigma(\vartheta) \exp i\vartheta$ соответствуют точки, лежащие внутри контуров S_+ и S_-, а минимум - среди корней, которым соответствуют точки вне этих контуров. Таким корням отвечают особенности аналитических продолжений рассеянного и внутреннего полей во внутренность и во внешность рассеивателя соответственно. Отметим, что если поверхность частицы негладкая (т.е. функция $\sigma = \sigma(\vartheta)$ имеет неаналитические точки), то их также следует учитывать при вычислении σ_1 и σ_2.

Для диагональных элементов оценки, аналогичные приведенным в статье [19], дают

$$\begin{aligned} \left(B_A^S\right)_{nn} &= \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \\ \left(B_A^S\right)_{ln} &= \left(B_A^S\right)_{nn} O\left(\frac{1}{nl}\right), |\, n - l| = O(1), \end{aligned} \qquad (135)$$

при этом по мере удаления от главной диагонали матричные элементы убывают. Оценки для свободных членов получаются непосредственно из асимптотик (124)–(125).

Если сделать замену в первом уравнении БСЛАУ (87)

$$b_l^{(2)} = \left(\frac{(k_2\,\sigma)^l}{2^l\, l\, l!}\right)^{-1} \widetilde{b}_l^2, \quad b_n^{(0)} = \frac{2^n\, n!}{(k_1\,\sigma)^n} \widetilde{b}_n^0, \qquad (136)$$

то получим новую БСЛАУ

$$\widetilde{B}_A^S\, \widetilde{\vec{b}}^{(2)} = -\widetilde{\vec{b}}^{(0)}, \qquad (137)$$

для матричных элементов которой справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\left|\left(\widetilde{B}_A^S\right)_{nl}\right| \leqslant \text{const}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^l, \quad l \gg n, \\ &\left|\left(\widetilde{B}_A^S\right)_{nl}\right| \leqslant \text{const}\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^n, \quad l \ll n, \end{aligned} \tag{138}$$

$$\begin{aligned} &\left(\widetilde{B}_A^S\right)_{nn} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ &\left(\widetilde{B}_A^S\right)_{ln} = O\left(\frac{1}{nl}\right), \quad |n-l| = O(1), \end{aligned} \tag{139}$$

при этом свободные члены достаточно быстро убывают с ростом индекса n.

Данная БСЛАУ является квазирегулярной (см. соотношения (138)–(139)), и для нее справедлива альтернатива Фредгольма при условии

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2. \tag{140}$$

С учетом единственности исходной задачи рассеяния при выполнении этого условия БСЛАУ имеет единственное решение, которое можно найти методом редукции (усечения) [18, 19]. Последнее очень важно, так как при численных расчетах решаются именно редуцированные системы.

Следует отметить, что соотношение (140) накладывает ограничения только на геометрию частицы и не зависит от ее химического состава (диэлектрической постоянной).

В случае неосесимметричной задачи справедливы оценки аналогичные соотношениям (130). Таким образом, условие (140) и в этом случае является необходимым для существования решения БСЛАУ, т.е. для обоснованного применения метода EBCM при этом только в дальней зоне [19]. Для применимости в ближней зоне необходимо выполнение гипотезы Релея (сходимость разложений вплоть до границы рассеивателя), которая справедлива при условии

$$\sigma_1 < \min \sigma(\vartheta), \quad \sigma_2 > \max \sigma(\vartheta), \tag{141}$$

где функция $\sigma = \sigma(\vartheta)$ описывает поверхность рассеивающей частицы.

Рассмотрим рассеяние плоской волны сфероидальной чебышевской частицей, уравнение которой задается следующим образом:

$$\sigma = \sigma_0\left(1 + \varepsilon \cos n\vartheta\right), \tag{142}$$

где $\vartheta = \arccos\eta$. Значение $\sigma_0 = (a_0 + b_0)$ определяет поверхность невозмущенного сфероида, неотрицательный параметр ε характеризует возмущение исходной поверхности, число n равно количеству минимумов (максимумов) на поверхности чебышевской частицы.

Для такой частицы решения уравнения (134) хорошо известны [20]

$$\sigma_{1,2} = \sigma_0 \frac{n\left[n \pm \sqrt{1+\varepsilon^2\left(n^2-1\right)}\right]}{n^2-1}\left[\frac{\pm 1+\sqrt{1+\varepsilon^2(n^2-1)}}{\varepsilon\,(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}}. \quad (143)$$

Теперь можно объяснить, почему результаты численных расчетов с использованием EBCM со сфероидальным базисом улучшаются по точности с увеличением степени асферичности [12]. Из уравнения (142) в силу условия $\sigma > d/2$ следует, что параметр возмущения должен удовлетворять неравенству

$$0 \leqslant \varepsilon < 1 - \frac{d/2}{\sigma_0} = 1 - \frac{1}{\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - f}}, \quad (144)$$

где параметр $\xi_0 = \sigma_0/d + fd/(4\sigma_0)$ определяет поверхность невозмущенного сфероида. Таким образом, с увеличением отношения полуосей a_0/b_0 невозмущенной частицы область значений параметра ε сильно сужается. Например, для вытянутого сфероида с отношением $a_0/b_0 = 10$ имеем $0 \leqslant \varepsilon < 0.055$, а для сфероида с $a_0/b_0 = 100$ имеем $0 \leqslant \varepsilon < 0.0055$. Для сплюснутых сфероидов с такими же отношениями полуосей получим соответственно $0 \leqslant \varepsilon < 0.09$ и $0 \leqslant \varepsilon < 0.009$. Для чебышевских частиц с пятью максимумами ($n = 5$) из соотношений (140), (141) и (143) нетрудно найти, что условия разрешимости БСЛАУ и гипотеза Релея справедливы при $\varepsilon \leqslant 0.14$ и $\varepsilon \leqslant 0.07$ соответственно. Таким образом, в этих случаях применение EBCM полностью оправдано при любых возмущениях сфероида, по меньшей мере в дальней зоне. Отметим, что сравнительно небольшие возмущения сфероида в координатах (σ_0, ϑ) приводят к очень существенным возмущениям сфероидальной частицы в обычных декартовых координатах. В силу приведенных выше рассуждений становится понятной высокая точность численных расчетов для сильно возмущенных сфероидальных частиц с высокой степенью асферичности, т.е. с большими отношениями полуосей a_0/b_0 (см. статью [12]).

Заключительные выводы

Результаты работы можно резюмировать следующим образом:

1. Три высокоточных и быстрых метода, используемые для решения проблемы рассеяния света несферическими частицами – методы разделения переменных, расширенных граничных условий и поточечной сшивки – рассмотрены в едином контексте с применением оригинального подхода с выбором особых скалярных потенциалов. Ранее методы обсуждались каждый сам по себе, хотя они используют одни и те же разложения полей по волновым сфероидальным (сферическим) функциям и одинаковые формулы для расчета характеристик рассеянного излучения. В силу того, что рассматриваемые методы отличаются только способами определения коэффициентов разложений потенциалов по выбранному базису, удалось разработать единый алгоритм расчета оптических свойств различных типов несферических частиц.

2. Применение подхода требует решения двух (осесимметричной и неосесимметричной) задач рассеяния света вместо первоначально одной. Однако осесимметричная задача является весьма простой и ее решение не требует больших вычислений в отличии от стандартного подхода. Тестовые расчеты показали, что решение осесимметричной задачи может быть использовано для определения значений таких параметров, как число членов, удерживаемых в разложениях, число узлов, используемых при вычислении интегралов, и т.п. Эти параметры необходимы для решения обеих задач, и опыт показывает, что значения этих параметров практически одинаковы для обеих задач. Таким образом, осесимметричная задача может быть использована в качестве модели как при рассмотрении численных аспектов, так и при аналитическом исследовании задачи рассеяния света несферическими частицами.

3. Аналитическое исследование областей применимости методов показало, что они эквиваленты (в ближней и дальней зонах) при условии математической корректности, т.е. при справедливости гипотезы Релея. В дальней зоне метод расширенных граничных условий (EBCM) корректен при более слабом условии, которое найдено в случае сфероидального базиса (для сферического базиса оно было получено ранее). В силу сказанного выше для двух других методов в этом случае также следует ожидать "хороших" по точности результатов. В целом, при невыполнении условий математической корректности рассматриваемые методы нужно рассматривать как приближенные. В этом случае достоверность получающихся результатов требуется контролировать с помощью соответствующих тестов на точность чи-

сленных расчетов.

4. Теоретический и численный анализ рассматриваемых методов при использовании сферического базиса [5, 9] показал, что методы существенно дополняют друг друга. Исследования методов при применении сфероидального базиса [5, 12, 21] продемонстрировали их высокую эффективность для сильно вытянутых и сплюснутых частиц, для которых, как известно, другие методы практически не работают.

Автор благодарен д.ф.-м.н. В. Б. Ильину за консультации и всестороннюю поддержку при написании данной работы.

Литература

1. Г. ван де Хюлст, *Рассеяние света малыми частицами.* ИЛ, М., 1961.
2. К. Борен, Д. Хафмен, *Поглощение и рассеяние света малыми частицами.* М.: Мир, 1986.
3. M. I. Mishchenko, J. M. Hovenier, L. D. Travis, *Light Scattering by Nonspherical Particles.* San Diego, Academic Press, 2000.
4. F. M. Kahnert, — J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **79–80** (2003) , 775.
5. V. G. Farafonov, V. B. Il'in, — In A. A. Kokhanovsky (ed) Light Scattering Reviews. Berlin: Springer-Praxis (2006), p. 125.
6. N. V. Voshchinnikov, V. G. Farafonov, — Astrophys. Sp. Sci. **204** (1993), 19.
7. Y. Han Y., Z. Wu, — Appl. Opt. **40** (2001), 2501.
8. J. P. Barton, — J. Opt. Soc. Amer. A. **19** (2002), 2429.
9. В. Г. Фарафонов, А. А. Винокуров, В. Б. Ильин, — Опт. Спектр **102** (2007), 741.
10. В. Г. Фарафонов, — Опт. Спектр **30** (2001), 826.
11. F. M. Kahnert, — J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **77** (2003), 61.
12. В. Б. Ильин, В. Г. Фарафонов, Е. В. Фарафонов, — Опт. Спектр **102** (2007), 136.
13. В. Г. Фарафонов, В. Б. Ильин, — Опт. Спектр **100** (2006), 484.
14. Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* Мир, М., 1987.
15. Дж. Стрэттон, *Теория электромагнетизма.* ГИТТЛ, М., 1948.
16. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики.* ИЛ, М., 1958.
17. В. И. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.* Наука, М., 1976.
18. В. Г. Фарафонов, — Дифф. уравн. **19** (1983), 1765.
19. В. Г. Фарафонов, — Опт. Спектр **92** (2002), 813.
20. В. Ф. Апельцин, А. Г. Кюркчан, *Аналитические свойства волновых полей.* МГУ, М., 1990.
21. V. G. Farafonov, N. V. Voshchinnikov, V. V. Somsikov, — Appl. Opt. **35** (1996), 5412.

Farafonov V. G. Unified approach using spheroidal functions to solve the light scattering problem for axisymmetric particles.

We suggest a theory that joins three well-known methods – the separation of variables, extended boundary condition and point matching ones where the fields are represented by their expansions in terms of (spheroidal) wave functions. Applying similar field expansions, the methods essentially differ in formulation of the problem and hence were always discussed in the literature independently. We also utilize an original approach where the fields are divided in two parts with certain properties and special scalar potentials are selected for each of the parts. The theory allows one well to see similarity and differences of the methods under consideration. Analysis performed earlier shows that the methods essentially supplement each other and the original approach used with a spheroidal basis gives reliable results for particles of high eccentricity for which other techniques do not work. Thus, the suggested theory provides a ground for development of a universal efficient algoritm for calculations of the optical characteristics of nonspherical scatterers in a very wide region of their parameter values.

Государственный университет
аэрокосмического приборостроения
190000, ул. Большая Морская, д. 67
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: far@aanet.ru

Поступило 11 октября 2009 г.