Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 380, 2010 г.

С. А. Назаров

ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КАНАЛАХ

Посвящаю Василию Михайловичу Бабичу, научившему меня многому

1. Постановка задачи теории поверхностных волн. Пусть ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni x' = (x_2, x_3)$ с границей $\partial\omega$, состоящей из нескольких дуг, которые встречаются под ненулевыми углами (рис. 1, а). Предполагаем, что эта липшицева область расположена в нижней полуплоскости $\mathbb{R}^2_-$ и симметрична относительно оси x_3, т.е.

$$\omega \subset \mathbb{R}^2_- = \{x' : x_3 < 0\}, \quad \omega = \{x' : (-x_2, x_3) \in \omega\}. \tag{1}$$

Кроме того, множество

$$\gamma = \partial\omega \cap \partial\mathbb{R}^2_- = \{x' \in \partial\omega : x_3 = 0\}$$

представляет собой объединение конечного набора замкнутых сегментов, и из γ выделено объединение γ_S нескольких открытых отрезков (полужирная линия на рис. 1 а), также симметричное относительно оси x_3. Положим $\gamma_N = \partial\omega \setminus \overline{\gamma_S}$ и введем трехмерный цилиндр Ω (рис. 2, а) и части Γ_S (на рисунках глубоко тонирована) и Γ_N его поверхности:

$$\begin{gathered}\Omega = \mathbb{R} \times \omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 \in \mathbb{R}, x' \in \omega\},\\ \Gamma_S = \mathbb{R} \times \gamma_S, \quad \Gamma_N = \mathbb{R} \times \gamma_N, \quad \partial\Omega = \overline{\Gamma_S \cup \Gamma_N}.\end{gathered} \tag{2}$$

Подчеркнем, что все множества (2) симметричны относительно плоскости $x = \{x : x_2 = 0\}$.

Ключевые слова: поверхностные волны, ловушечные моды, скрещивающиеся каналы, собственные числа на непрерывном спектре.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00759).

Определим еще один цилиндр Ω^2 с тем же сечением ω и осью, перпендикулярной оси цилиндра Ω из формулы (2), который теперь обозначаем Ω^1,

$$\Omega^2 = \{x : (x_2, x_1, x_3) \in \Omega^1\} = \{x : x_2 \in \mathbb{R}, (x_1, x_3) \in \omega\}. \tag{3}$$

На объединении цилиндров Ω^1 и Ω^2 (рис. 3, a)

$$\Pi = \Omega^1 \cup \Omega^2 \tag{4}$$

рассмотрим спектральную задачу линейной теории поверхностных волн (см. [1, 2] и др.)

$$-\Delta_x u(x) = 0, \quad x \in \Pi, \tag{5}$$

$$\partial_z u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Sigma_S, \tag{6}$$

$$\partial_\nu u(x) = 0, \quad x \in \Sigma_N, \tag{7}$$

где u – потенциал скоростей, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, совпадающая с производной $\partial_z = \partial/\partial x_3$ на горизонтальной поверхности жидкости Σ_S, а $\lambda = \kappa^2/g$ – спектральный параметр, κ – частота гармонических колебаний и g – ускорение свободного падения.

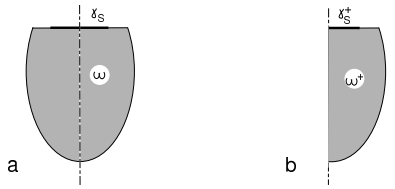

Рис. 1. Сечение (a) и половина сечения (b) канала.

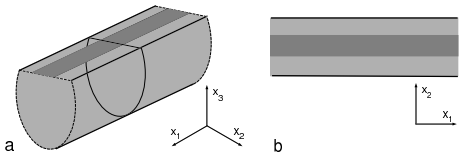

Рис. 2. Канал (a) и его двумерное изображение (b).

Множество Σ_S, на котором поставлено спектральное условие Стеклова (6), нуждается в более детальном описании. Плоскости $\{x : x_1 = \pm x_2\}$ разбивают (ср. рис. 3, b, с рис. 4, a) область (4) на четыре ($k = 1, \dots, 4$) полуцилиндра Π^k с заостренными концами, причем $\Pi^1 \cup \Pi^3 \subset \Omega^1$ и $\Pi^2 \cup \Pi^4 \subset \Omega^2$. Теперь положим

$$\Sigma_S^{p+2q} = \Gamma_S^p \cap \partial\Pi^{p+2q},\ p = 1, 2,\ q = 0, 1, \quad \Sigma_S = \bigcup_{k=1}^{4} \Sigma_S^k, \quad \Sigma_N = \partial\Pi \setminus \overline{\Sigma_S}.$$

Отметим, что $\Sigma_S = \Gamma_S^1 \cup \Gamma_S^2$ в случае (связного) отрезка γ_S (рис. 3, b), но если γ_S – объединение хотя бы двух отрезков, то $\Sigma_S \neq \Gamma_S^1 \cup \Gamma_S^2$ (рис. 3, c).

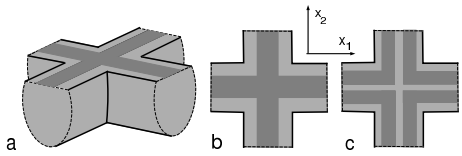

Рис. 3. Пересекающиеся каналы (a) и их двумерное изображение (b).

Из-за возможных особенностей градиента решения на ребрах границы $\partial\Pi$ задачу (5)–(7) следует понимать как интегральное тождество [3]

$$(\nabla_x u, \nabla_x v)_\Pi = \lambda (u, v)_{\Sigma_S}, \quad v \in H^1(\Pi). \tag{8}$$

Здесь ∇_x – оператор-градиент, $(\ ,\ )_\Pi$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Pi)$, а $H^1(\Pi)$ – пространство Соболева. Следуя [4–6], снабдим пространство $H^1(\Pi)$ специфическим скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = (\nabla_x u, \nabla_x v)_\Pi + (u, v)_{\Sigma_S}, \quad u, v \in H^1(\Pi), \tag{9}$$

обозначим литерой $\mathcal{H}$ полученное гильбертово пространство и определим *следовой* оператор $\mathcal{T}$ формулой

$$\langle \mathcal{T} u, v \rangle = (u, v)_{\Sigma_S}, \quad u, v \in \mathcal{H}. \tag{10}$$

Оператор $\mathcal{T}$ непрерывный и положительный, причем в силу определений (9) и (10) его норма не превосходит единицы (на самом

деле, $\|\mathcal{T};\mathcal{H}\| = 1$). Он симметрический, а значит, самосопряженный. Сравнивая соотношения (8)–(10), видим, что вариационная задача (8) эквивалентна абстрактному спектральному уравнению

$$\mathcal{T}u = \tau u \quad \text{в} \quad \mathcal{H}$$

с новым спектральным параметром

$$\tau = (1+\lambda)^{-1}. \tag{11}$$

Как известно (см. например, [1, 2] и [7, 8]) и нетрудно проверить (см. замечание ниже), непрерывный спектр задачи (5)–(7) (или (8)) занимает всю замкнутую положительную вещественную полуось $\overline{\mathbb{R}_+}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Связь (11) спектральных параметров передает свойства λ-спектра краевой задачи τ-спектру оператора $\mathcal{T}$ и наоборот, за одним исключением: точка $\tau = 0$, являющаяся бесконечнократным собственным числом оператора, переводится в бесконечно удаленную точку $\lambda = \infty$, которая, разумеется, не влияет на спектр краевой задачи. При этом собственное подпространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Pi;\Sigma_S)$ оператора $\mathcal{T}$, отвечающее его собственному числу $\tau = 0$, составлено из функций $u \in H^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на Σ_S. Итак, $\tau = 0$ – точка существенного спектра, а полуинтервал $(0,1]$ покрыт непрерывным спектром. Следовательно, спектром оператора $\mathcal{T}$ служит сегмент $[0,1]$, причем дискретный спектр отсутствует. Из сказанного вытекает, что $\|\mathcal{T};\mathcal{H}\| = 1$, так как норма непрерывного самосопряженного положительного оператора – верхняя грань его спектра.

2. Искусственные краевые условия. Цель статьи – найти достаточное условие появления собственного числа краевой задачи (5)–(7) (или вариационной (8)) для скрещивающихся каналов, а также убедиться в существовании собственных чисел при определенных ограниченных возмущениях геометрии каналов вблизи их перекрестка.

Если λ – собственное число задачи (8), то соответствующая собственная функция $u \in H^1(\Pi)$ обладает конечной энергией $\frac{1}{2}\langle u,u\rangle$, а значит, затухает на бесконечности, причем экспоненциально (см., например, [[]9, гл. 5]). Иными словами, собственная функция локализована около перекрестка $\Omega^1 \cap \Omega^2$ каналов, и поэтому она называется *ловушечной или захваченной модой* (см. [10], а также [1, 2] и [8]). Построению и доказательству существования или отсутствия захваченных мод посвящено большое количество публикаций (см., в частности, [10–14], а также монографии [1, 2] и обзор [8] для значительного расширения списка литературы).

На основе понятия [4] следового оператора $\mathcal{T}$ при помощи *вариационного метода*, сформулированного в статьях [15, 16], был предложен [5, 17, 18] весьма простой подход к выводу достаточных условий существования собственных чисел задач теории поверхностных волн. Однако этот подход применим исключительно к поиску дискретного спектра, который отсутствует у задачи (8) (ее собственные числа вкраплены в непрерывный спектр и потому принадлежат только точечному спектру). Поэтому при изучении трехмерных задач традиционно применяется метод [12] постановки искусственных краевых условий на плоскостях геометрической симметрии. Конкретизируем его применительно к задаче (5)–(7).

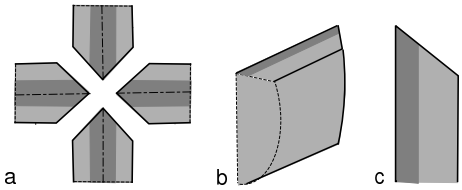

Рис. 4. Четыре полуцилиндра с заостроенными концами (a), половина одного из них (b) и ее двумерное изображение (c).

Рассмотрим половину цилиндра со скошенным торцом

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : \ x_2 > 0, x_1 < -x_2\} \tag{12}$$

(см. рис. 4, b, причем на рис. 4, c, представлен вид сверху, и аналогичное схематичное изображение каналов уже использовалось на рис. 2, b, и 3, b и c). Границу области (12) разобьем на четыре части. Обозначения Γ_S^+ и Γ_N^+ соотнесены с определениями, данными в формулах (2) и (12). Кроме того, поверхности $\partial\Omega^+$ принадлежат торец ϖ и половина Υ срединного сечения канала, т.е.

$$\varpi = \{x : \ x' \in \omega, x_1 = -x_2\}, \quad \Upsilon = \{x : \ x_1 < 0, x_2 = 0, x' \in \omega\}.$$

Вспомогательная задача с искусственными краевыми условиями Дирихле на отсекающей поверхности Υ выглядит так:

$$-\Delta_x u^+(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \tag{13}$$

$$\partial_z u^+(x) = \lambda^+ u^+(x), \quad x \in \Gamma_S^+, \tag{14}$$

$$\partial_\nu u^+(x) = 0, \quad x \in \Gamma_N^+ \cup \varpi, \tag{15}$$

$$u^+(x) = 0, \quad x \in \Upsilon. \tag{16}$$

В вариационной формулировке этой задачи

$$(\nabla_x u^+, \nabla_x v^+)_{\Omega^+} = \lambda^+ (u^+, v^+)_{\Gamma_S^+}, \quad v^+ \in \mathcal{H}^+, \tag{17}$$

фигурирует подпространство $\mathcal{H}^+ = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^+; \Upsilon)$ функций $v^+ \in H^1(\Omega^+)$, подчиненных условию Дирихле (16).

По понятным образом измененным формулам (9) и (10) введем скалярное произведение $\langle\,,\rangle_+$ и оператор $\mathcal{T}^+$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^+$. Оператор $\mathcal{T}^+$ по-прежнему положительный самосопряженный и непрерывный с нормой $\|\mathcal{T}^+; \mathcal{H}^+\| \le 1$, но теперь его существенный спектр занимает сегмент $[0, \tau_\dagger^+]$, где

$$\tau_\dagger^+ = (1 + \lambda_\dagger^+)^{-1}, \tag{18}$$

а $\lambda_\dagger^+ = \Lambda_\dagger^+ := \Lambda_1^+$ – первое собственное число следующей задачи на половине $\omega^+ = \{x' \in \omega : \ x_2 > 0\}$ сечения ω (см. рис. 1, b):

$$-\Delta_{x'} U^+(x') = 0, \quad x' \in \omega^+, \tag{19}$$

$$\partial_z U^+(x') = \Lambda^+ U^+(x'), \quad x' \in \gamma_S^+, \tag{20}$$

$$\partial_\nu U^+(x') = 0, \quad x' \in \gamma_N^+, \tag{21}$$

$$U^+(x') = 0, \quad x' \in \upsilon. \tag{22}$$

Здесь υ – средняя линия $\{x' \in \omega : \ x_2 = 0\}$ сечения. Первое собственное число положительно благодаря условиям Дирихле (22), обеспечивающим следовое неравенство

$$\|U^+; L_2(\upsilon)\| \le c \|\nabla_{x'} U^+; L_2(\omega^+)\|, \quad U^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega^+; \upsilon). \tag{23}$$

Множитель c в этом неравенстве совпадает с величиной $(\Lambda_\dagger^+)^{-1}$.

Замечание. 1) Задача (5)–(7) в одиночном цилиндре Ω (см. определение в (2)) порождает такую спектральную задачу на сечении ω:

$$-\Delta_{x'} U(x') = \beta U(x'), \ x' \in \omega, \quad \partial_z U(x') = \lambda U(x'), \ x' \in \gamma_S,$$
$$\partial_\nu U(x') = 0, \ x' \in \gamma_N.$$

Здесь $\beta = \xi^2$ и ξ – двойственная переменная преобразования Фурье. При любом $\lambda \ge 0$ задача имеет неположительное собственное число[1]

$$\beta_1 \le -\lambda (\mathrm{mess}_2(\omega))^{-1} \, \mathrm{mess}_1(\gamma_S),$$

[1]Это простое соотношение получается подстановкой в формулу Рэлея постоянной пробной функции.

а значит, задача в канале Ω приобретает осциллирующее решение

$$\exp(\pm i\sqrt{|\beta|}\,x_1)\,U_\dagger(x'),$$

из которого при помощи стандартной процедуры (умножения на срезающую функцию X_m с графиком на рис. 5) сооружается сингулярная последовательность Вейля для задач (5)–(7) в канале Ω и объединении Π каналов (4) (см. [19, § 9.1] и сопутствующие выкладки, например, в [20]), т.е. по критерию Вейля точка λ попадает на существенный спектр обеих задач, причем ввиду конечномерности ядер их операторов (см. [9, замечание 3.1.5]) она принадлежит ее непрерывному спектру. В соответствии с формулой (1) непрерывный спектр $(0,1]$ переходит к оператору $\mathcal{T}$.

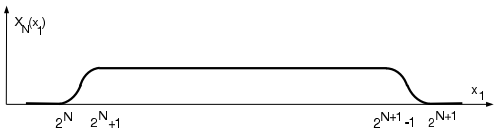

Рис. 5. График срезающей функции.

2) У модельной спектральной задачи

$$-\Delta_{x'}U^+(x') = \beta U^+(x'),\ x' \in \omega^+,\ \partial_z U^+(x') = \lambda^+ U^+(x'),\ x' \in \gamma_S^+,$$
$$\partial_\nu U^+(x') = 0,\ x' \in \gamma_N^+,\ U^+(x') = 0,\ x' \in \upsilon,$$

полученной преобразованием Фурье из краевой задачи (13)–(16) на половине $\{x \in \Omega :\ x_2 > 0\}$ цилиндра Ω, первое собственное число β^+ положительно при всяком $\lambda < \Lambda_\dagger^+$ в силу неравенства (23). Именно в создании положительного порога $\lambda_\dagger^+ = \Lambda_1^+$ непрерывного спектра и последующем исследовании возможного дискретного спектра вспомогательной задачи в искусственно образованной области Ω^+ состоит основная идея метода [12]. $\boxtimes$

Отметим, наконец, что нечетные и четные четырехкратные продолжения собственной функции $u_1^+ = u_\dagger^+$ задачи (17) соответственно через срединную плоскость Υ и торец ϖ (или их дубликаты) образуют собственную функцию $u^\boxtimes \in H^1(\Pi)$ задачи (5)–(7) в объединении Π каналов Ω^1 и Ω^2, отвечающую тому же самому собственному числу λ_1^+. Собственное число $\tau_1^+ = (1+\lambda_1^+)^{-1}$ оператора $\mathcal{T}^+$ принадлежит его непрерывному спектру.

3. Вывод достаточного условия появления собственного числа. Воспользуется вариационным методом поиска дискретного спектра, собранным из нескольких источников, сформулированным в [15, 16] и приспособленным в [5, 17, 18] к задачам теории поверхностных волн.

Норма t^+ оператора $\mathcal{T}^+$ в пространстве $\mathcal{H}^+$ вычисляется по формуле

$$t^+ = \|\mathcal{T}^+; \mathcal{H}^+\| = \sup_{u^+ \in \mathcal{H}^+ \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{T}^+ u^+, u^+ \rangle}{\langle u^+, u^+ \rangle}. \tag{24}$$

Спектр оператора расположен на сегменте $[0, t^+]$, причем $(0, \tau_\dagger^+]$ – непрерывный спектр (ср. связь (18) спектральных параметров), а точка $\tau^+ = 0$ – бесконечнократное собственное число с собственным подпространством $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^+; \Upsilon \cup \Gamma_S^+)$. Если оказалось, что $t^+ > \tau_\dagger^+$, то дискретный спектр оператора $\mathcal{T}^+$ не пуст и t^+ – наибольшее собственное число в нем. Таким образом, для проверки существования захваченной моды достаточно построить пробную функцию $u^+ \in \mathcal{H}^+ \setminus \{0\}$, при которой дробь Рэлея из правой части (24) становится больше $\tau_\dagger^+ = (1 + \lambda_\dagger^+)^{-1}$.

С целью получить противоречие предположим, что $t^+ = \tau_\dagger^+$. В силу формулы (24) и введенных определений справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{T}^+ u^+, u^+ \rangle \le \tau_\dagger^+ \langle u^+, u^+ \rangle, \quad u^+ \in \mathcal{H}^+,$$

или, что то же,

$$\|\nabla_x u^+; L_2(\Omega^+)\|^2 \ge \lambda_\dagger^+ \|u^+; L_2(\Gamma_S^+)\|^2, \quad u^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^+; \Upsilon). \tag{25}$$

Следуя [5, 17, 18], подставим в соотношение (25) пробную функцию

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} U_\dagger^+(x') & x_1 \ge -d, \\ U_\dagger^+(x') \exp(\varepsilon(x_1 + d)) & x_1 < -d, \end{cases} \tag{26}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $U_\dagger^+$ – первая собственная функция задачи (19)–(22), а число $d > 0$ подобрано так, чтобы множество $\Omega^+(-d) = (-\infty, -d) \times \omega^+$ содержалось в Ω^+. Функция (25) экспоненциально затухает при $x_1 \to -\infty$, удовлетворяет условию Дирихле

(16), является кусочно-гладкой и непрерывной, а значит, принадлежит пространству $\mathcal{H}^+$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x u^\varepsilon; L_2(\Omega^+(-d))\|^2 - \lambda_\dagger^+ \|u^\varepsilon; L_2(\Gamma_S^+(-d))\|^2 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{-d} e^{2\varepsilon(x_1+d)} \Bigg(\int\limits_{\omega^+} (|\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2 + \varepsilon^2 |U_\dagger^+(x')|^2)\, dx' \\
&- \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\gamma_S^+} |U_\dagger^+(y,0)|^2 dy \Bigg) = \frac{\varepsilon}{2} \|U_\dagger^+; L_2(\omega^+)\|^2. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Здесь было использовано равенство

$$\|\nabla_{x'} U_\dagger^+; L_2(\omega^+)\|^2 = \lambda_\dagger^+ \|U_\dagger^+; L_2(\omega^+)\|^2 \qquad (28)$$

для собственного числа $\lambda_\dagger^+ = \Lambda_1^+$ и соответствующей собственной функции задачи (19)–(22). Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x u^\varepsilon; L_2(\Omega^+ \setminus \Omega^+(-d))\|^2 - \lambda_\dagger^+ \|u^\varepsilon; L_2(\Gamma_S^+ \setminus \Gamma_S^+(-d))\|^2 \\
&= \int\limits_{\omega^+} (d - x_2) |\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2\, dx' - \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\gamma_S^+} (d - x_2) |U_\dagger^+(y,0)|^2 dy \\
&= \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\gamma_S^+} x_2 |U_\dagger^+(y,0)|^2 dy - \int\limits_{\omega^+} x_2 |\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2\, dx'. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Множитель $d - x_2$ возник в результате интегрирования по переменной $x_1 \in (-d, -x_2)$ (см. определение (12)), а слагаемое d в нем удалось убрать благодаря равенству (28).

Преобразуем правую часть (29). Умножим уравнение (19) на $x_2 U_\dagger^+(x')$ и проинтегрируем результат по частям в области ω^+ при

учете краевых условий (20)–(22):

$$0 = -\int\limits_{\omega^+} x_2 U_\dagger^+(x')\Delta_{x'} U_\dagger^+(x')\,dx' = \int\limits_{\omega^+} x_2 |\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2\,dx'$$
$$+ \int\limits_{\omega^+} U_\dagger^+(x')\frac{\partial U_\dagger^+}{\partial x_2}(x')\,dx' - \int\limits_{\omega^+} x_2 U_\dagger^+(x')\partial_\nu U_\dagger^+(x')\,ds'_x$$
$$= \int\limits_{\omega^+} x_2 |\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2\,dx' + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega^+} \frac{\partial}{\partial x_2}|U_\dagger^+(x')|^2\,dx'$$
$$- \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\gamma_S^+} x_2 |U_\dagger^+(x_2,0)|^2\,dx_2.$$

Следовательно, выражение (29) равно

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega^+} \frac{\partial}{\partial x_2}|U_\dagger^+(x')|^2\,dx' = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_N^+} \nu_2(x')|U_\dagger^+(x')|^2\,ds'_x.$$

В итоге неравенство (25) с пробной функцией (26) принимает вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_N^+} \nu_2(x')|U_\dagger^+(x')|^2\,ds'_x = -\int\limits_{\omega^+} x_2 |\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2\,dx'$$
$$+ \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\gamma_S^+} x_2 |U_\dagger^+(x_2,0)|^2\,dx_2 \geq -\frac{\varepsilon}{2}\|U_\dagger^+; L_2(\omega^+\|^2. \tag{30}$$

Если в левой части (30) стоит отрицательная величина (не зависящая от ε), то при малом $\varepsilon > 0$ формула (30) становится абсурдной, а значит, при условии

$$0 > \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\gamma_S^+} x_2 \left|U_\dagger^+(x')\right|^2 ds'_x - \int\limits_{\omega^+} x_2 \left|\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')\right|^2 dx'$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_N^+} \nu_2(x') \left|U_\dagger^+(x')\right|^2 ds'_x \tag{31}$$

предположение $t^+ = \tau_\dagger^+$ и вытекающее из него неравенство (25) неверны. Сформулируем установленное достаточное условие возникновения захваченной моды.

Теорема 1. *Пусть первое собственное число* $\Lambda_1^+ = \lambda_\dagger^+$ *задачи* (19)–(22) *и соответствующая собственная функция* $U_1^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega^+; \upsilon)$ *удовлетворяют требованию* (31). *Тогда дискретный спектр оператора* $\mathcal{T}^+$ *не пуст, т.е. вспомогательная задача* (13)–(16) *имеет собственное число* $\lambda_1^+ \in (0, \lambda_\dagger^+)$ *и собственную функцию* $u_1^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^+; \Upsilon)$. *Последняя продолжается по четности/нечетности с четверти канала* Ω^+ *на крестовидный канал* $\Pi = \Omega^1 \cup \Omega^2$ *(см. формулы* (12) *и* (2),(3)) *и образует собственную функцию* $u_1 \in H^1(\Pi)$ *задачи* (5)–(7) *(или* (8) *в вариационной формулировке), а собственное число* $\lambda_1 = \lambda_1^+$ *попадает на непрерывный спектр задачи в* Π.

Ясно, что в том случае, когда участок $\{x' \in \partial\omega^+ : x_2 > 0, x_3 = z < 0\}$ границы половины сечения ω^+ является графиком функции $x_2 = f(x_3)$ (см., например, рис. 1, b), проекция ν_2 нормали на ось x_2 положительна, а значит, неравенство (31) неверно. Поэтому сечение канала, удовлетворяющее условию (31), должно быть невыпуклым (ср. рис. 6). К сожалению, автору не удалось обнаружить такое сечение.

Рис. 6. Невыпуклое сечение канала.

4. Ловушечная мода, порожденная островом. Пусть сечение ω каналов Ω^1 и Ω^2 – прямоугольник $(-L, L) \times (-H, 0)$. В этом случае задача (19)–(22) допускает явное решение:

$$U_\dagger^+(y, z) = \sin\left(\frac{\pi}{L} y\right) \left(e^{\pi z/L} + e^{-\pi(z+2H)/L}\right), \ \lambda_\dagger^+ = \frac{\pi}{L} \frac{1 - e^{-2\pi H/L}}{1 + e^{-2\pi H/L}}. \tag{32}$$

Пусть на перекрестке каналов расположен остров с квадратным горизонтальным сечением (рис. 7, a)

$$\Theta = \{x : |x_1| + |x_2| < l, x_3 \in (-\infty, 0)\}, \quad l \in (0, L), \tag{33}$$

т.е. область, на которой формулируется задача (5)–(7) имеет вид

$$\Pi^\blacktriangle = \Pi \setminus \overline{\Theta}. \tag{34}$$

В этом случае вспомогательная задача с искусственными условиями Дирихле ставится не на скошенном полуцилиндре (12), а на полуцилиндре с заостренным торцом (рис. 7, b)

$$\Omega^{\blacktriangle} = \{x \in \Omega : \ x_2 > 0, x_1 < -\max\{x_2, l - x_2\}\}. \tag{35}$$

Как и в п. 2, введем пространство $\mathcal{H}^{\blacktriangle}$ и оператор $\mathcal{T}^{\blacktriangle}$ с нормой $t^{\blacktriangle}$, вычисляемой по аналогичной (24) формуле. Предположив, что дискретный спектр оператора $\mathcal{T}^{\blacktriangle}$ пуст, а значит, $t^{\blacktriangle} = \tau_{\dagger}^{+}$, приходим к неравенству

$$\|\nabla_x u^+; L_2(\Omega^{\blacktriangle})\|^2 \geq \lambda_{\dagger}^{+} \|u^+; L_2(\Gamma_S^{\blacktriangle})\|^2, \quad u^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^{\blacktriangle}; \Upsilon^{\blacktriangle}). \tag{36}$$

Рассмотрим соотношение (36) с пробной функцией (26). Попрежнему выполнено равенство (27). Следующая выкладка заменяет выкладку (29) для скошенного полуцилиндра Ω^+:

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x u^\varepsilon; L_2(\Omega^{\blacktriangle} \setminus \Omega^+(-d))\|^2 - \lambda_{\dagger}^{+} \|u^\varepsilon; L_2(\Gamma_S^{\blacktriangle} \setminus \Gamma_S^{+}(-d))\|^2 \\
&= \int\limits_{\omega^+} (d - \max\{x_2, l - x_2\}) |\nabla_{x'} U_{\dagger}^{+}(x')|^2 \, dx' - \lambda_{\dagger}^{+} \int\limits_{\gamma_S^+} (d \\
&- \max\{x_2, l - x_2\}) |U_{\dagger}^{+}(y, 0)|^2 dy == \lambda_{\dagger}^{+} \int\limits_{\gamma_S^+} \max\{x_2, l - x_2\} |U_{\dagger}^{+}(y, 0)|^2 dy \\
&- \int\limits_{\omega^+} \max\{x_2, l - x_2\} |\nabla_{x'} U_{\dagger}^{+}(x')|^2 \, dx'.
\end{aligned}$$

Подставим сюда выражения (32) и, вычислив интегралы по $z \in (-H, 0)$ и $y \in (0, L/2)$, получим

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x u^\varepsilon; L_2(\Omega^{\blacktriangle} \setminus \Omega^+(-d))\|^2 - \lambda_{\dagger}^{+} \|u^\varepsilon; L_2(\Gamma_S^{\blacktriangle} \setminus \Gamma_S^{+}(-d))\|^2 \\
&= \left(\frac{L}{2\pi} \big(1 - e^{-4\pi H/L}\big) + 2He^{-2\pi H/L} \right) \left(\frac{1}{2} - \Big(\sin \frac{\pi l}{2L} \Big)^2 \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Сравнивая формулы (36) и (27), (38), как и в предыдущем разделе, обнаруживаем, что предположение $t^{\blacktriangle} = \tau_{\dagger}^{+}$ неверно при условии

$$1 - 2\Big(\sin \frac{\pi l}{2L} \Big)^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad l < \frac{L}{2}.$$

Рис. 7. Канал с островом.

Иными словами, для гарантированного образования захваченной моды остров на рис. 7, а, должен перекрывать каждый из каналов Ω^1 и Ω^2.

Подчеркнем, что вывод о наличии захваченной моды сохраняет силу и в том случае, если $l = L/2$. Для проверки воспользуемся методом [15, 16] в переложении [18] для теории поверхностных волн. Именно, в качестве пробной функции в неравенстве (36) возьмем сумму $u^\varepsilon(x) + \sqrt{\varepsilon}v(x)$, где слагаемое u^ε по-прежнему имеет вид (26), а v – произвольная гладкая функция с компактным носителем. При $l = L/2$ выражение (38) обращается в нуль, а значит, при дополнительном учете формулы (27) получаем, что неравенство (36) превращается в такое:

$$2\sqrt{\varepsilon}\Big\{\int\limits_{\Omega^\blacktriangle} \nabla_x U_\dagger^+(x)\cdot\nabla_x v(x)\,dx - \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\Gamma_S^\blacktriangle} U_\dagger^+(y,0)\cdot v(y,0)\,dy\Big\} \geq -c_v\varepsilon \quad (38)$$

(все интегралы сходятся благодаря компактности носителя $\operatorname{supp} v$). В силу формулы Грина разность интегралов из фигурных скобок равна

$$\int\limits_{\partial\Omega^\blacktriangle\setminus\Gamma_S^\blacktriangle} v(x)\partial_\nu U_\dagger^+(x)\,ds_x, \quad (39)$$

причем согласно краевому условию (21) интегрирование достаточно вести по торцу $\varpi^\blacktriangle = \{x : x' \in \omega^+, x_1 < -\max\{x_2, l - x_2\}\}$ заостренного полуцилиндра (35). Если в какой-либо точке торца $\varpi^\blacktriangle$ нормальная производная отлична от нуля, то подбором гладкой функции v делаем интеграл (39) отрицательным, а соотношение – абсурдным при малом $\varepsilon > 0$. Поскольку равенство $\partial_\nu U_\dagger^+(x') = 0$ выполнено всюду на $\varpi^\blacktriangle$ лишь в случае прямого обреза $\{x : x' \in \omega^+, x_1 = 0\}$, предположение $t^\blacktriangle = \tau_\dagger^+$ неверно, т.е. дискретный спектр задачи (13)–(16) непустой и при $l = L/2$. Согласно теоремам 10.2.2 и 10.2.4 [19] об

устойчивости дискретного спектра тот же вывод можно сделать и при $l < L/2$ в случае малого $|l - L/2|$.

Выкладки, похожие на (29) и (30), возможны и при произвольной форме сечения ω, однако, как и в п. 3, результат становится условным. Действительно, функция $\omega^+ \ni x' \mapsto \Phi(x') = \max\{x_2, l - x_2\}$ имеет разрыв производной на линии $\varsigma = \{x' \in \omega^+ : x_2 = l/2\}$. Дугу γ_N^+ также нужно разбить на две части $\gamma_N^{+-} = \{x' \in \gamma_N^+ : x_2 < l/2\}$ и $\gamma_N^{++} = \{x' \in \gamma_N^+ : x_2 > l/2\}$. В итоге находим:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\int\limits_{\omega^+} \Phi(x') U_\dagger^+(x') \Delta_{x'} U_\dagger^+(x')\, dx' = \int\limits_{\omega^+} \Phi(x') |\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2\, dx' \\
&\quad + \int\limits_{\omega^+} U_\dagger^+(x') \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x') \frac{\partial U_\dagger^+}{\partial x_2}(x')\, dx' - \int\limits_{\omega^+} \Phi(x') U_\dagger^+(x') \partial_\nu U_\dagger^+(x')\, ds'_x \\
&= \int\limits_{\omega^+} \Phi(x') |\nabla_{x'} U_\dagger^+(x')|^2\, dx' - \lambda_\dagger^+ \int\limits_{\gamma_S^+} \Phi(x') |U_\dagger^+(x_2, 0)|^2\, dx_2 + J, \\
J &= -\int\limits_{\varsigma} \left| U_\dagger^+\left(\frac{l}{2}, z\right) \right|^2 dz - \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_N^{+-}} \nu_2(x') |U_\dagger^+(x')|^2\, ds'_x \\
&\quad + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_N^{++}} \nu_2(x') |U_\dagger^+(x')|^2\, ds'_x. \qquad (40)
\end{aligned}
$$

Отметим, что в случае прямоугольного сечения $\omega^+ = (0, L/2) \times (-H, 0)$ выражения (40) и (38) совпадают.

Из проделанных вычислений вытекает, что неравенство $J < 0$ обеспечивает непустоту дискретного спектра задачи (13)–(15) в области (35). Сформулируем результат, добавив к нему случай $J = 0$, обрабатываемый при помощи выкладок (38), (39).

Теорема 2. *Пусть неположительно выражение* (40), *вычисленное по первому собственному числу* $\Lambda_1^+ = \lambda_\dagger^+$ *и соответствующей собственной функции* $U_\dagger^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega^+; \upsilon)$ *задачи* (19)–(22) *на полусечении* ω^+. *Тогда задача* (5)–(7) *на области* (34) *(скрещенные каналы с квадратным островом* (33)) *имеет собственное число (элемент точечного спектра), порождающее захваченную моду. Затребованное условие* $J \le 0$ *реализуется для каналов с прямоугольным сечением* $(-L, L) \times (-H, 0)$ *в*

том случае, если $l \geq L/2$, где l – сторона квадрата (горизонтального сечения острова Θ).

По аналогичной схеме можно исследовать моды, захваченные островами иной формы.

5. Ловушечные моды, порожденные отмелью. Пусть вблизи перекрестка каналов Ω^1 и Ω^2 имеется "отмель" малой глубины $\varepsilon > 0$ (рис. 8, a), т.е. область, в которой рассматривается задача (5)–(7), имеет вид

$$\Pi^\varepsilon = \Pi \cup \theta^\varepsilon, \tag{41}$$

где Π – объединение каналов Ω^1 и Ω^2,

$$\theta^\varepsilon = \{x = (y, z) : \, y \in \vartheta, z \in (-\varepsilon, 0)\}, \tag{42}$$

а ϑ – область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$, симметричная относительно обеих осей y_1 и y_2. Предполагаем, что множество

$$\Omega^{\varepsilon+} = \{x \in \Omega \cup \theta^\varepsilon : \, x_2 > 0, x_1 < -x_2\} \tag{43}$$

(четверть канала с отмелью (41); ср. рис. 8, b) содержит параллелепипед

$$\mathcal{P}^\varepsilon = \{x = (y, z) : \, |x_q - x_q^0| < a_q, \, q = 1, 2, \, x_3 \in (-\varepsilon, 0)\} = P \times (-\varepsilon, 0), \tag{44}$$

причем горизонтальные размеры a_1 и a_2 зафиксированы и значительно превосходят h, на верхней грани $P \times \{0\}$ выставлено краевое условие Стеклова (6), а нижняя грань $P \times \{-\varepsilon\}$ лежит на границе $\partial\Omega^{\varepsilon+}$, т.е. на ней задано условие Неймана.

Рис. 8. Канал с отмелью.

Следуя [4], рассмотрим искусственно образованную спектральную задачу со смешанными краевыми условиями в параллелепипеде (44)

$$\begin{aligned}
&-\Delta_x\psi^\varepsilon(x)=0, \quad x\in\mathcal{P}^\varepsilon,\\
&\partial_z\psi^\varepsilon(y,0)=\beta^\varepsilon\psi^\varepsilon(y,0),\ \partial_z\psi^\varepsilon(y,-\varepsilon)=0, \quad y\in P,\\
&\psi^\varepsilon(y,z)=0, \quad y\in\partial P,\ z\in(-\varepsilon,0).
\end{aligned}$$

При этом на боковой поверхности параллелепипеда принудительно назначены условия Дирихле. Эта задача допускает явное решение

$$\begin{aligned}
\psi_k^\varepsilon(x)&=\alpha_k\sin\left(\frac{\pi k_1}{2a_1}(y_1-x_1^0+a_1)\right)\\
&\quad\times\sin\left(\frac{\pi k_2}{2a_2}(y_2-x_2^0+a_2)\right)\left(e^{\pi m z}+e^{-\pi m(z+2\varepsilon)}\right),\\
\beta_k^\varepsilon&=\frac{1}{\pi m}\,\frac{1-e^{2\pi m\varepsilon}}{1+e^{2\pi m\varepsilon}}, \quad k=(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2, \quad m=\frac{1}{4}\left(\frac{k_1^2}{a_1^2}+\frac{k_2^2}{a_2^2}\right).
\end{aligned}$$

При этом α_k – нормирующий множитель, призванный соблюсти условия ортогональности и нормировки

$$(\beta_k^\varepsilon)^{-1}(\nabla_x\psi_k^\varepsilon,\nabla_x\psi_\kappa^\varepsilon)_{\mathcal{P}^\varepsilon}=(\psi_k^\varepsilon,\psi_\kappa^\varepsilon)_{P\times\{0\}}=\delta_{k,\kappa}, \quad k,\kappa\in\mathbb{N}^2. \tag{45}$$

Обращаем внимание на отличительную особенность собственных чисел β_k^ε: каждое из них стремится к нулю при $\varepsilon\to+0$, а именно,

$$\beta_k^\varepsilon=\varepsilon+O\big((m\varepsilon)^2\big). \tag{46}$$

Как и ранее, введем гильбертово пространство $\mathcal{H}^\varepsilon$ со скалярным произведением

$$\langle u,v\rangle_\varepsilon=(\nabla_{x'}u,\nabla_{x'}v)_{\Omega^{\varepsilon+}}+(u,v)_{\Gamma_S^{\varepsilon+}},$$

где $\Gamma_S^{\varepsilon+}=\{x=(y,z)\in\overline{\Omega^{\varepsilon+}}:\ z=0\}$ – свободная поверхность жидкости в четверти канала (43). Определим также оператор $\mathcal{T}^\varepsilon$ в $\mathcal{H}^\varepsilon$ формулой

$$\langle\mathcal{T}^\varepsilon u,v\rangle_\varepsilon=(u,v)_{\Gamma_S^{\varepsilon+}}, \quad u,v\in\mathcal{H}^\varepsilon.$$

Применим к оператору $-\mathcal{T}^\varepsilon$ (со знаком минус) максиминимальный принцип (см., например, [19, теорема 10.2.2]): элементы дискретного спектра вычисляются по формуле

$$-\frac{1}{1+\lambda_j^\varepsilon}=-\tau_j^\varepsilon=\max_{\mathcal{E}_j^\varepsilon}\ \inf_{u\in\mathcal{E}_j^\varepsilon\setminus\{0\}}\frac{-\langle\mathcal{T}^\varepsilon u,u\rangle_\varepsilon}{\langle u,u\rangle_\varepsilon}. \tag{47}$$

Здесь $\mathcal{E}_j^\varepsilon$ – любое подпространство в $\mathcal{H}^\varepsilon$ с коразмерностью $j-1$.

Зададимся натуральным числом N и подберем глубину отмели ε так, чтобы на интервале $(0,\lambda_\dagger^+)$ поместилось не менее N собственных чисел β_k^ε (это возможно благодаря свойству (46)); соответствующее множество мультииндексов $k=(k_1,k_2)$ обозначим K_N^ε. Собственные функции ψ_k^ε продолжим нулем с параллелепипеда $\mathcal{P}^\varepsilon$ на всю область $\Omega^{\varepsilon+}$ (это возможно именно благодаря условиям Дирихле на боковой поверхности) и сохраним за продолжениями тот же символ. Каждое подпространство $\mathcal{E}_N^\varepsilon$ содержит нетривиальную линейную комбинацию

$$\Psi(\mathcal{E}_j^\varepsilon;x)=\sum_{k\in K_N}a_k\,\psi_k(x),\qquad \sum_{k\in K_N^\varepsilon}|a_k|^2=1.$$

Учитывая неравенство $\beta_k^\varepsilon<\lambda_\dagger^+$ и формулу (45), получаем, что правая часть (47) не превосходит

$$\max_{\mathcal{E}_j^\varepsilon}\frac{-\langle\mathcal{T}^\varepsilon\Psi(\mathcal{E}_j^\varepsilon),\Psi(\mathcal{E}_j^\varepsilon)\rangle_\varepsilon}{\langle\Psi(\mathcal{E}_j^\varepsilon),\Psi(\mathcal{E}_j^\varepsilon)\rangle_\varepsilon}=\max_{\mathcal{E}_j^\varepsilon}\frac{-\sum\limits_{k,\kappa\in K_N^\varepsilon}a_ka_\kappa(\psi_k^\varepsilon,\psi_\kappa^\varepsilon)_{P\times\{0\}}}{\sum\limits_{k,\kappa\in K_N^\varepsilon}a_ka_\kappa\big((\nabla_x\psi_k^\varepsilon,\nabla_x\psi_\kappa^\varepsilon)_{\mathcal{P}^\varepsilon}+(\psi_k^\varepsilon,\psi_\kappa^\varepsilon)_{P\times\{0\}}\big)}$$
$$=\max_{\mathcal{E}_j^\varepsilon}\frac{-\sum\limits_{k\in K_N^\varepsilon}|a_k|^2}{\sum\limits_{k\in K_N^\varepsilon}|a_k|^2(1+\beta_k^\varepsilon)}<\frac{-1}{1+\lambda_\dagger^+}=-\tau_\dagger^+. \tag{48}$$

Поскольку ниже точки $-\tau_\dagger^+$ у оператора $-\mathcal{T}^\varepsilon$ (выше точки $\tau_\dagger^+$ у самого оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$) располагается только дискретный спектр, в силу теоремы 10.2.2 [19] оценка (48) для правой части (47) означает, что полная кратность дискретного спектра не меньше N. Собственные числа $\tau_k^\varepsilon\in(\tau_\dagger^+,\|\mathcal{T}^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\|]$, $k\in K_N^\varepsilon$, оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$ порождают собственные числа $\lambda_k^\varepsilon=(\tau_k^\varepsilon)^{-1}-1$ задачи (13)–(16) в области (43) и такие же собственные числа задачи (5)–(7) на объединении каналов Ω^1, Ω^2 и отмели θ^ε.

Теорема 3. *Для любого натурального N найдется такое $\varepsilon_N>0$, что задача (5)–(7) в области Ω^ε, заданной формулами (41), (42) и зависящей от параметра $\varepsilon\in(0,\varepsilon_N)$, имеет не менее N собственных чисел (элементов точечного спектра) и отвечающих им захваченных мод.*

При помощи того же максиминимального принципа нетрудно убедиться в том, что собственные числа λ_k^ε, $k\in K_N^\varepsilon$, задачи (5)–(7) в Ω^ε

удовлетворяют соотношению

$$\lambda_k^\varepsilon \le \beta_k^\varepsilon,$$

которое ввиду формулы (46), устанавливает эффект *концентрации* точечного спектра: при $\varepsilon \to +0$ собственные числа сгущаются к точке $\lambda = 0$.

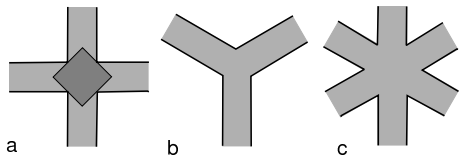

Рис. 9. Разветвляющиеся волноводы.

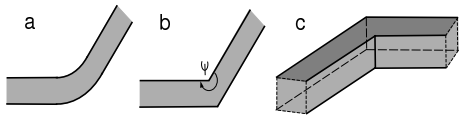

Рис. 10. Изогнутый (a) и коленчатый (b) плоские волноводы; изломанный канал (c).

Применяя результаты [6], можно получить аналогичный результат в случае отмели малой, но переменной глубины.

6. Краткий обзор известных результатов и открытые вопросы. Исследованию собственных чисел задачи Дирихле для оператора Лапласа в разветвляющихся, коленчатых и изогнутых плоских волноводах постоянной толщины (рис. 9 и 10) посвящено большое количество публикаций (см. [21–24] и др.). Впервые существование захваченной моды в крестовидном волноводе

$$\Pi = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1/2 \quad \text{или} \quad |x_2| < 1/2\}, \tag{49}$$

объединении двух перпендикулярных полос единичной толщины (рис. 9, a), анонсировано в [21], а в [22] дано простое и изящное подтверждение этого факта. Приведем его. В фигуру (49) помещается квадрат $Q_{\sqrt{2}}$ со стороной $\sqrt{2}$ (глубоко тонирован на рис. 9, a), у которого первое собственное число задачи Дирихле равно π^2. Следовательно по минимальному принципу (см., например, [19, теорема

10.2.1]) первое собственное число для любой ограниченной области $G \subset \Pi$, объемлющей квадрат $Q_{\sqrt{2}}$, строго меньше π^2. Тот же минимальный принцип доказывает существование собственного числа задачи

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{u}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Pi, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Pi, \tag{50}$$

расположенного ниже ее непрерывного спектра, который занимает луч $[\pi^2, +\infty)$.

В [24] проверено, что собственное число сохраняется и при малых вариациях ширины полуполос, составляющих Ω, или в расцентрованных волноводах (рис. 11, a, b и c, соответственно), а также в некоторых ситуациях показано, что других собственных чисел в дискретном спектре нет. Многие результаты для плоских волноводов перенесены в [24] на многомерные волноводы с условиями Дирихле.

В [22] и [23] изучены искривленные и коленчатые волноводы постоянной толщины (рис. 10, a и b, соответственно), опять-таки с условиями Дирихле, и получен безусловный результат о непустоте дискретного спектра задачи (50). Смешанная краевая задача в коленчатом волноводе рассмотрена в [24]. Если на двух лучах границы $\partial\Omega$, встречающихся под углом $\psi > \pi$, который измерен внутри волноводов (рис. 10, b), назначены условия Дирихле, а на двух других – условия Неймана, то имеется собственное число под непрерывным спектром $[\pi^2/4, +\infty)$ смешанной краевой задачи для оператора Лапласа. Если же угол ψ меньше π, то дискретный спектр пуст.

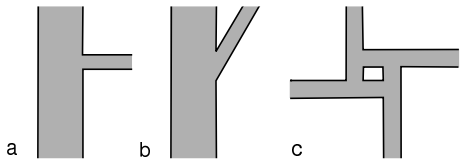

Рис. 11. Разветвляющиеся (a, b) и расцентрованный (c) волноводы.

Все упомянутые результаты относятся исключительно к дискретному спектру и поэтому требуют постановки условий Дирихле на неограниченных участках границы волновода, гарантирующих положительную нижнюю грань непрерывного спектра. В случае краевых условий Неймана спектр занимает всю замкнутую положительную полуось $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$, и многие методы становятся неприменимыми.

Автор не знает ни одной публикации, в которой были бы обнаружены собственные числа (они принадлежат точечному спектру) для плоских коленчатых или разветвляющихся волноводов с краевыми условиями Неймана.

Нетрудно вывести достаточное условие существования захваченной волны в спектральной задаче Неймана

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{u}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Pi, \quad \partial_\nu \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Pi, \tag{51}$$

на объединении (4) двух идентичных симметричных волноводов, пересекающихся под прямым углом (рис. 3, a). При этом выкладки, проведенные в п. 3, приходится повторить почти дословно. Сформулируем результат, но заметим, что по-прежнему автору не удалось построить сечение ω, для которого первое собственное число $\lambda_\dagger^+$ и соответствующая собственная функция $U_\dagger^+ \in \overset{\circ}{H}{}^1(\omega_+; \upsilon)$ модельной задачи (19), (21), (22) с искусственными условиями Дирихле на средней линии υ и условиями Неймана на остальной части $\gamma_N^+ = \partial\omega_+ \setminus \upsilon$ границы полусечения ω_+ удовлетворяют полученному достаточному условию.

Теорема 4. *Если выполнено неравенство* (31), *то задача* (51) *имеет собственное число и собственную функцию из пространства* $H^1(\Pi)$, *экспоненциально затухающую на бесконечности.*

Если удалось соблюсти требование (31) и согласно теоремам 1 и 3 обнаружить захваченные волны в крестообразном волноводе на рис. 3, a, и рис. 9, a, то незначительная модификация предыдущих рассуждений позволяет установить наличие захваченных волн у разветвляющихся волноводов на рис. 9, b и c. Отметим также, что наличие точечного спектра у задачи Неймана (51) для уравнения Гельмгольца в коленчатом плоском волноводе на рис. 10, b, означает, что у задачи (5)–(7) в изломанном канале с прямоугольным сечением (рис. 10, c) также имеются собственные числа: посредством разделения переменных вторая задача сводится к первой. Вообще же отыскание захваченных мод в изогнутых и изломанных каналах (вид сверху представлен на рис. 10, a и b) остаются открытой проблемой, интересной, но весьма сложной из-за полного отсутствия симметрии, – простыми средствами невозможно даже вывести какое-нибудь достаточное условие существования экспоненциально затухающего решения.

То же самое можно сказать и о каналах с ответвлениями (рис. 11, a и b).

Литература

1. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, and B. Vainberg B., *Linear Water Waves.* Cambridge: Cambridge University Press (2002).
2. Д. А. Индейцев, Н. Г. Кузнецов, О. В. Мотыгин, Ю. А. Мочалова, *Локализация линейных волн.* СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. (2007).
3. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М. (1973).
4. С. А. Назаров, *Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости.* — Мат. сб., **199**, №12 (2008), 53–78.
5. С. А. Назаров, *Простой способ обнаружения ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн.* — Докл. РАН. **429**, №6 (2009), 746–749.
6. С. А. Назаров, *О сгущении точечного спектра на непрерывном в задачах линейной теории волн на поверхности идеальной жидкости.* — Зап. науч. семин. петербург. отд-ния мат. ин-та РАН. **348** (2007), 99–126.
7. M. D. Groves, *On the existence of trapped modes in channels of arbitrary cross-sections.* — Math. Meth. Appl. Sci. **20** (1997), 521–545.
8. C. M. Linton and P. McIver, *Embedded trapped modes in water waves and acoustics.* — Wave motion. **45** (2007), 16–29.
9. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука. М. (1991).
10. F. Ursell, *Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves.* — J. Fluid Mech. **18** (1988), 495–503.
11. D. S. Jones, *The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains.* — Proc. Camb. Phil. Soc. **49** (1953), 668–684.
12. D. V. Evans, M. Levitin, and D. Vasil'ev, *Existence theorems for trapped modes.* — J. Fluid Mech. **261** (1994), 21–31.
13. A.-S. Bonnet-Bendhia, J. Duterte, and P. Joly, *Mathematical analysis of elastic surface waves in topographic waveguides.* — Mathematical Models and Methods in Applied Science. **9** №5 (1999), 755–798.
14. N. Kuznetsov, R. Porter, D. V. Evans, and M. J. Simon, *Uniqueness and trapped modes for surface–piercing cylinders in oblique waves.* — J. Fluid Mech. **365** (1998), 351–368.
15. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов.* — Докл. РАН. **368**, №6 (1999), 771–773.
16. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке.* — Матем. заметки. **73**, №1 (2003), 138–140.
17. S. A. Nazarov, *A novel approach for detecting trapped surface waves in a canal with periodic underwater topography.* — C. R. Mecanique. **337**, №8 (2009), 610–615.
18. С. А. Назаров, *Достаточные условия появления ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн.* — Зап. науч. семин. петербург. отд-ния мат. ин-та РАН. **369** (2009), 202–223.

19. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л.: изд-во Ленингр.ун-та (1980).
20. S. A. Nazarov, *Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domain.* — Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.) International Mathematical Series, Vol. 9. 2008. P. 261–309.
21. R. L. Shult, D. G. Ravenhall, and H. D. Wyld, *Quamtum bound states in a classically unbounded system of crossed wires.* — Phys. Rev. B. **39**, №8 (1989), 5476–5479.
22. Y. Avishai, D. Bessis, B. G. Giraud, and G. Mantica, *Quantum bound states in open geometries.* — Phys. Rev. B. **44**, №15 (1991), 8028–8034.
23. P. Duclos and P. Exner, *Curvature-induced bound sttes in quantum waveguides in two and three dimensions*, Rev. Math. Phys. **7**, №1 (1995), 73–102.
24. С. А. Назаров, *Дискретный спектр коленчатых, разветвляющихся и периодических волноводов.* — Алгебра и анализ. 20 . Т. , №. С. (Будет опубликована в 2010г.).

Nazarov S. A. The point spectrum of water-wave problem in intersecting canals.

Trapped modes are examined on the water surface in two canals which intersect each other at the right angle and have the same symmetric cross-section. These trapped modes correspond to eigenvalues embedded into the continuous spectrum of the Steklov boundary value problem, decay exponentially at infinity, i.e., are localized near the crossing of the canals. A sufficient condition is presented for the existence of such trapped waves. The effect is discussed of the concentration of eigenvalues under a perturbation in the vicinity of the canals crossing by means of the formation of a shoal, a thin water layer. A condensed review of known results on curved, cranked and branched waveguides is given and open questions are formulated.

ИПМаш РАН
В. О. Большой пр., 61,
199178 С.Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 5 июня 2010 г.