

Л. А. Молотков

## О ВОЛНЕ РЕЛЕЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ И ЖИДКОСТИ

При исследовании распространения волн в слоистых средах особое внимание обращается на поверхностные волны, распространяющиеся на большие расстояния вдоль границ между слоями. Эти волны ослабляются по экспоненциальному закону по мере удаления от границ, а их скорости меньше скоростей распространения объемных волн в окружающих слоях. Среди поверхностных волн наиболее известными являются волны Релея, распространяющиеся вдоль свободной границы упругой среды, и волны Стоунли на границе с жестким контактом между упругими средами. Эти волны представляют большой практический интерес в связи с землетрясениями и цунами. Они довольно хорошо изучены в случае плоских границ [1,2].

В предлагаемой работе рассматривается волна Релея в случаях криволинейных границ между упругой средой и жидкостью. При исследовании криволинейных границ предполагается, что кривизна является малой величиной. Рассматриваются цилиндрические волны вдоль образующей и вдоль направляющей, а также меридиональные сферические волны. Во всех трех случаях строятся точные решения уравнений, описывающие волновые поля и содержащие интегралы, ряды, суммы и функции Ханкеля и Лежандра. При исследовании полученных решений используются асимптотики этих специальных функций. В результате устанавливается зависимость фазовой скорости волны Релея от присутствия жидкой среды и от кривизны вдоль трассы и в направлении, перпендикулярном трассе.

### §1. Волна вдоль плоской границы

Пусть в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  задано упругое полупространство  $z \geq 0$  и жидкое полупространство  $0 < z < 0$ .

---

*Ключевые слова:* волна Релея, упругие и жидкие среды, криволинейные границы, сферические и цилиндрические границы, асимптотики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 08-01-00511.

Среда возбуждается некоторым точечным источником, расположенным в начале координат. Источник создает осесимметричное волновое поле, в котором векторы смещения

$$\begin{aligned}\vec{u}(r, z, t) &= u_r(r, z, t)\vec{r}_1 + u_z(r, z, t)\vec{k}, \\ \vec{u}_0(r, z, t) &= u_{r0}(r, z, t)\vec{r}_1 + u_{z0}(r, z, t)\vec{k}\end{aligned}\quad (1.1)$$

не содержат составляющей  $u_\theta$  и не зависят от координаты  $\theta$ . На границе  $z = 0$  вне источника выполняются условия

$$u_z = u_{z0}, \quad \tau_{zz} = -p_0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad (1.2)$$

в которых  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{zz}$  – напряжения в упругой среде, а  $p_0$  – давление в жидкости.

Согласно монографии [3], составляющие смещений, напряжений и давление представляются равенствами

$$\begin{aligned}u_z &= -\int_0^\infty \frac{k J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [\alpha X(k, \eta) e^{-kz\alpha} + Y(k, \eta) e^{-kz\beta}] e^{kt\eta} d\eta, \\ u_{z0} &= -\int_0^\infty \frac{k J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha X_0(k, \eta) e^{kz\alpha_0} e^{kt\eta} d\eta, \\ \tau_{rz} &= -\mu \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [2\alpha X e^{-kz\alpha} + gY e^{-kz\beta}] e^{kt\eta} d\eta, \\ \tau_{zz} &= \mu \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [gX e^{-kz\alpha} + 2\beta Y e^{-kz\beta}] e^{kt\eta} d\eta, \\ -p_0 &= \rho_0 \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^2 X_0 e^{kz\alpha_0} e^{kt\eta} d\eta,\end{aligned}\quad (1.3)$$

в которых

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_P^2}}, & \beta &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_S^2}}, \\ g &= 2 + \frac{\eta^2}{v_S^2}, & \alpha_0 &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{P0}^2}},\end{aligned}\quad (1.4)$$

$v_P$  и  $v_S$  – скорости продольных и поперечных волн в упругой среде, а  $v_{P0}$  – скорость волны в жидкости. Для однозначности радикалов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha_0$  проведем из точки ветвления  $\eta = \pm iv_P$ ,  $\eta = \pm iv_S$  и  $\eta = \pm iv_{P0}$  разрезы в левую полуплоскость и фиксируем основной лист условиями  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  и  $\alpha_0 > 0$  при  $\eta > 0$ .

На основании граничных условий (1.2) устанавливается система уравнений

$$\begin{aligned} \alpha X + Y &= -\alpha_0 X_0, \\ 2\alpha X + gY &= 0, \\ \mu(gX + 2\beta Y) &= \rho_0 \eta^2 X_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Условие ненулевого решения этой системы выражается дисперсионным уравнением

$$R(\eta) + \frac{\alpha \rho \rho_0 \eta^4}{\mu^2 \alpha_0} = 0. \quad (1.6)$$

Функция

$$R(\eta) = g^2 - 4\alpha\beta \quad (1.7)$$

представляется на мнимой оси  $\eta = i\tau$  графиком (рис. 1)

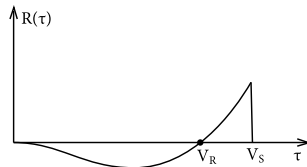


Рис. 1.

и имеет корень  $\tau = v_R$ . Со скоростью  $v_R$  распространяется волна Релея вдоль свободной плоской границы упругой среды. В случае, когда упругое полупространство граничит с жидкой средой, уравнение (1.6) имеет на мнимой оси корень  $\tau = v_{R0}$ , связанный с поверхностной волной, которую также будем именовать волной Релея. Расположение этого корня определяется неравенством

$$v_{R0} < \min(v_R, v_{P0}), \quad (1.8)$$

и корень может находиться в интервалах

$$v_{R0} < v_R < v_{P0} \quad (\text{рис. 2}) \quad (1.9)$$

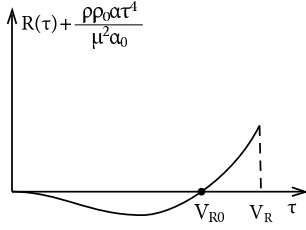


Рис. 2

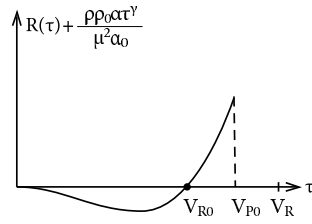


Рис. 3.

или

$$v_{R0} < v_{P0} < v_R \quad (\text{рис. 3}) \quad (1.10)$$

В случае выполнения условия (1.9) и неравенства

$$\frac{\rho\rho_0 v_R^4 \alpha}{\mu^2 \alpha_0} \ll 1 \quad (1.11)$$

скорость этой волны Релея представляется приближенным равенством

$$v = v_R - \frac{\rho\rho_0 v_R^4 \alpha}{\mu^2 \alpha_0 R'(v_R)} \quad (1.12)$$

и оказывается меньше  $v_R$ . В случае выполнения условия (1.10) для нахождения корня уравнения (1.6) полезно использовать итерационный процесс, представив уравнение (1.6) в виде равенства

$$\alpha_0 = -\frac{\rho\rho_0 \eta_R^4 \alpha}{\mu^2 R}. \quad (1.13)$$

Следует отметить в этом случае в среде также распространяется волна со скоростью  $v_R$ , но эта волна испытывает экспоненциальное затухание, так как поправочный член в (1.12) оказывается мнимым и определяет коэффициент затухания.

Исследование указанной волны Релея в случаях криволинейных границ является основной темой настоящей работы. В этих случаях оба члена, входящие в дисперсионное уравнение (1.6), приобретают дополнительные слагаемые, которые учитывают кривизну границы и наличие жидкой среды. Так как влияние кривизны свободной границы упругой среды было исследовано в работе [4], то основное внимание будет обращено на изучение влияния жидкой среды.

## §2. Волна вдоль образующей цилиндрической поверхности

Пусть задана цилиндрическая поверхность  $r = r_0$ , разделяющая упругую среду и жидкую среду 0. Будем рассматривать два случая. В первом случае упругая среда занимает область  $r < r_0$ , а жидкая среда 0 расположена при  $r > r_0$ . Во втором случае, наоборот, упругая среда заполняет область  $r > r_0$ , а жидкая среда 0 находится в области  $r < r_0$ . Предположим, что в обоих случаях волны, образующиеся на границе  $r = r_0$ , не содержат смещений  $u_\theta$  и не зависят от координаты  $\theta$ . При этих предположениях граничные условия при  $r = r_0$  выражаются равенствами

$$u_r = u_{r0}, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{rr} = -p_0. \quad (2.1)$$

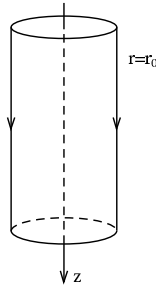


Рис. 4.

В первом случае смещения, напряжения и давления, входящие в граничные условия (2.1), представляются соотношениями [5].

$$\begin{aligned} u_r &= \int_0^\infty \frac{k e^{-ikz} dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_r(k, \eta, r) e^{k\eta} d\eta, \\ \tau_{rz} &= \int_0^\infty \frac{k^2 e^{-ikz} dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{rz}(k, \eta, r) e^{k\eta} d\eta, \\ \tau_{rr} &= \int_0^\infty \frac{k^2 e^{-ikz} dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{rr}(k, \eta, r) e^{k\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$u_{r0} = \int_0^{\infty} \frac{ke^{-ikz} dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_{r0}(k, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$-p_0 = \int_0^{\infty} \frac{k^2 e^{-ikz} dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} P_0(k, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta,$$

в которых

$$U_r = i\alpha X H_1^{(1)}(x) + Y H_1^{(1)}(y),$$

$$T_{rz} = i2\mu X H_0^{(1)}(x) + \mu g Y H_1^{(1)}(y),$$

$$T_{rr} = \mu g X H_0^{(1)}(x) - 2\mu\beta Y H_0^{(1)}(y) Y - \frac{2\mu}{kr} U_r, \quad (2.3)$$

$$U_{r0} = i\alpha_0 X_0 H_1^{(2)}(x_0),$$

$$P_0 = \rho\eta^2 H_1^{(2)}(x_0),$$

$$x = -ikr\alpha, \quad y = -ikr\beta, \quad x_0 = -ikr\alpha_0. \quad (2.4)$$

Из формул (2.2)–(2.4) и граничных условий (2.1) следует система уравнений

$$i\alpha X H_1^{(1)}(x_0) + Y H_1^{(1)}(y_0) = i\alpha_0 X_0 H_1^{(2)}(x_{00}),$$

$$i2\alpha X H_1^{(1)}(x_0) + g Y H_1^{(1)}(y_0) = 0,$$

$$\left[ g H_0^{(1)}(x_0) - \frac{i2\alpha}{kr_0} H_1^{(1)}(x_0) \right] X \quad (2.5)$$

$$- \left[ i2\beta H_0^{(1)}(y_0) + \frac{2}{kr_0} H_1^{(1)}(y_0) \right] Y = \frac{\rho_0}{\mu} \eta^2 X_0 H_0^{(2)}(x_{00}),$$

где

$$x_0 = -ikr_0\alpha, \quad y_0 = -ikr_0\beta, \quad x_{00} = -ikr_0\alpha_0. \quad (2.6)$$

Ненулевое решение системы (2.5) определяет дисперсионное уравнение

$$i\alpha_0 H_1^{(2)}(x_0) \left[ g^2 H_0^{(1)}(x) H_1^{(1)}(y) - 4\alpha\beta H_1^{(1)}(x) H_0^{(1)}(y) \right. \quad (2.7)$$

$$\left. - \frac{i2\alpha\eta^2}{kr_0 v_S^2} H_1^{(1)}(x) H_1^{(1)}(y) \right] - \frac{i\alpha\rho_0\eta^4}{\mu v_S^2} H_1^{(1)}(x) H_1^{(1)}(y) H_0^{(2)}(x_0) = 0.$$

Так как кривизна поверхности предполагается малой, то в уравнении (2.7) пренебрегаются члены, содержащие квадраты кривизны.

Чтобы исключить из уравнения (2.7) функции Ханкеля, используем асимптотику этих функций при  $|z| \gg 1$  [5]

$$H_p^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i(z - 0.5p\pi - 0.25\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p+k+0.5)}{\Gamma(p-k+0.5)} \quad (2.8)$$

и заменим в уравнении (2.7) функции Ханкеля отношениями этих функций. В результате получим уравнение

$$\alpha_0 \left[ g^2 \frac{H_0^{(1)}(x_0)}{H_1^{(1)}(x_0)} - 4\alpha\beta \frac{H_0^{(1)}(y_0)}{H_1^{(1)}(y_0)} - \frac{i2\alpha\eta^2}{kr_0 v_S^2} \right] - \frac{\rho\rho_0\eta^4\alpha}{\mu^2} \frac{H_0^{(2)}(x_{00})}{H_1^{(1)}(x_{00})} = 0. \quad (2.9)$$

Из асимптотических формул (2.8) и равенств (2.6) следуют приближенные соотношения

$$\frac{H_0^{(1,2)}(z)}{H_1^{(1,2)}(z)} = \pm i \left( 1 \mp \frac{i}{2z} \right); \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_0^{(1)}(x_0)}{H_1^{(1)}(x_0)} &= i \left( 1 + \frac{1}{2kr_0\alpha} \right), & \frac{H_0^{(1)}(y)}{H_1^{(1)}(y)} &= i \left( 1 + \frac{1}{2kr_0\beta} \right), \\ \frac{H_0^{(2)}(x_{00})}{H_1^{(2)}(x_{00})} &= -i \left( 1 - \frac{1}{2kr_0\alpha_0} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

После подстановки (2.11) в равенство (2.9) и после ряда преобразований уравнение (2.9) переходит в равенство

$$R + \frac{g^2}{2kr_0\alpha} - \frac{2\alpha}{kr_0} + \frac{2\alpha\eta^2}{kr_0 v_S^2} + \frac{\rho\rho_0\eta^4\alpha}{\mu^2\alpha_0} - \frac{\rho\rho_0\eta^4\alpha}{2kr_0\mu^2\alpha_0^2} = 0. \quad (2.12)$$

Остановимся на исследовании дисперсионного уравнения (2.12). При  $kr_0 = \infty$  уравнение (2.12) совпадает с уравнением (1.6), которое имеет на мнимой оси  $\eta = i\tau$  корень  $\tau = v_{R0}$ . При больших конечных  $kr_0$  уравнение (2.12) имеет поправочные члены, связанные с кривизной границы и с наличием жидкой среды. Существование этих членов приводит к смещению корня по мнимой оси при переходе от

уравнения (1.6) к уравнению (2.12). Для определения положения корня уравнения (2.12) при выполнении условия (1.9) полезно представить левую часть в виде суммы первых членов ряда Тейлора в окрестности точки  $\tau = v_R$ . При этом уравнение (2.12) заменится равенством

$$\begin{aligned} \tau = v_R - \frac{1}{R'(v_R)} \left[ \frac{g^2}{2kr_0\alpha} - \frac{2\alpha}{kr_0} + \frac{2\alpha\tau^2}{kr_0v_S^2} \right. \\ \left. + \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{\mu^2\alpha_0} - \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{2kr_0\mu^2\alpha_0^2} \right] \Bigg|_{\tau=v_R} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

для корня уравнения Релея с учетом поправочных членов.

Равенство (2.13) не является однозначным, так как значение функции в квадратной скобке может быть заменено тем же значением, но другой функции при  $\tau = v_R$ . Используя указанную неоднозначность, проведем замену по формуле

$$g^2 = 4\alpha\beta \quad (2.14)$$

и получим более простую формулу

$$\begin{aligned} \tau = v_R - \frac{1}{R'(v_R)} \left[ \frac{2\alpha\tau^2}{kr_0v_S^2} - \frac{\tau^4}{2\beta v_S^4 kr_0} \right. \\ \left. + \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{\mu^2\alpha_0} - \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{2kr_0\mu^2\alpha_0^2} \right] \Bigg|_{\tau=v_R} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

для скорости волны Релея.

При рассмотрении второго случая размещения сред следует в формулах и уравнениях (2.2)–(2.7) заменить первые функции Ханкеля на вторые, а вторые функции Ханкеля – на первые. В результате вместо уравнения (2.9) получим

$$\alpha_0 \left[ g^2 \frac{H_0^{(2)}(x_0)}{H_1^{(2)}(x_0)} - 4\alpha\beta \frac{H_0^{(2)}(y_0)}{H_1^{(2)}(y_0)} - \frac{i2\alpha\eta^2}{kr_0v_S^2} \right] - \frac{\rho\rho_0\eta^4\alpha}{\mu^2} \frac{H_0^{(1)}(x_{00})}{H_1^{(1)}(x_{00})} = 0. \quad (2.16)$$

Отношения функций Ханкеля заменим по формулам

$$\begin{aligned} \frac{H_0^{(2)}(x_0)}{H_1^{(2)}(x_0)} = -i \left( 1 - \frac{1}{2kr_0\alpha} \right), \quad \frac{H_0^{(2)}(y_0)}{H_1^{(2)}(y_0)} = -i \left( 1 - \frac{1}{2kr_0\beta} \right), \\ \frac{H_0^{(1)}(x_{00})}{H_1^{(1)}(x_{00})} = i \left( 1 + \frac{1}{2kr_0\alpha_0} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$



После подстановки (2.17) в (2.16) и элементарных преобразований приходим к соотношению

$$R - \frac{g^2}{2kr_0\alpha} + \frac{2\alpha}{kr_0} - \frac{2\alpha\tau^2}{kr_0v_S^2} + \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{\mu^2\alpha_0} + \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{2\mu^2kr_0\alpha_0^2} = 0. \quad (2.18)$$

Используя указанную неоднозначность в уравнении (2.18), получим при выполнении условия (1.9) приближенную формулу

$$\begin{aligned} \tau = v_R - \frac{1}{R'(v_R)} \left[ -\frac{2\alpha\tau^2}{kr_0v_S^2} + \frac{\tau^4}{2\beta v_S^4 kr_0} \right. \\ \left. + \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{\mu^2\alpha_0} + \frac{\rho\rho_0\tau^4\alpha}{2kr_0\mu^2\alpha_0^2} \right] \Bigg|_{\tau=v_R} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Сравнивая равенства (2.18) и (2.19) с соответствующими формулами (2.12) и (2.15), приходим к выводу, что поправочные члены, содержащие множитель  $1/(kr_0)$ , отличаются знаками, а основные члены оказываются одинаковыми.

### §3. ВОЛНА ВДОЛЬ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть также задана цилиндрическая поверхность  $r = r_0$ , разделяющая упругую среду и жидкую среду 0. Также будем рассматривать два случая. В первом случае упругая среда занимает область  $r < r_0$ , а жидкая среда 0 расположена при  $r > r_0$ . Во втором случае, наоборот, упругая среда заполняет область  $r > r_0$ , жидкая среда 0 находится в области  $r < r_0$ . Предположим, что в обоих случаях волны, образующиеся на границе  $r = r_0$ , не содержат смещений  $u_z$  и не зависят от координаты  $z$ . При этих предположениях граничные условия при  $r = r_0$  выражаются равенствами

$$u_r = u_{r0}, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{rr} = -p_0. \quad (3.1)$$

В первом случае смещения, напряжения и давления, входящие в граничные условия (3.1), представляются соотношениями

$$u_r = \frac{1}{2\pi} k \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_r(m, \eta, r) e^{ktn} d\eta,$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{r\theta}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \\
\tau_{rr} &= \frac{k^2}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{rr}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \\
u_{r0} &= \frac{k}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_{r0}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \\
-p_0 &= \frac{k^2}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} P_0(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

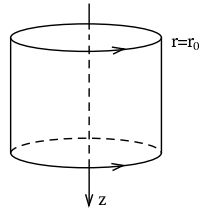


Рис. 5.

В КОТОРЫХ

$$\begin{aligned}
U_r &= \varkappa X H_m^{(1)'}(x) + M Y H_m^{(1)'}(y), \\
T_{r\theta} &= 2\mu M \left[ \varkappa H_m^{(1)'}(x) - \frac{1}{kr} H_m^{(1)}(x) \right] X + \left[ \tilde{\theta} H_m^{(1)}(y) - \frac{2\mu\varepsilon}{kr} H_m^{(1)'}(y) \right] Y, \\
T_{rr} &= \left[ \tilde{\theta} H_m^{(1)}(x) - \frac{2\mu\varkappa}{kr} H_m^{(1)'}(x) \right] X + 2\mu M \left[ \varepsilon H_m^{(1)'}(y) - \frac{1}{kr} H_m^{(1)}(y) \right] Y, \\
U_{r0} &= \varkappa_0 X_0 H_m^{(2)'}(x_0), \\
P_0 &= \rho_0 \eta^2 X_0 H_m^{(2)}(x_0);
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
x &= -ikr\eta/v_P, \quad y = -ikr\eta/v_S, \quad x_0 = -ikr\eta/v_{P0}, \\
M &= \frac{m}{kr}, \quad \varkappa = \frac{x}{kr} = -i\eta/v_P, \quad \varepsilon = \frac{y}{kr} = -i\eta/v_S, \\
\varkappa_0 &= -i\eta/v_{P0}, \quad \tilde{\theta} = 2\mu M^2 + \rho\eta^2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из формул (3.2)–(3.4) и граничных условий следует система уравнений

$$\begin{aligned}
& \varkappa H_m^{(1)}(x_0)X + M_0 H_m^{(1)}(y_0)Y - \varkappa_0 H_m^{(2)'}(x_{00})X_0 = 0, \\
& 2\mu M_0 \left[ \varkappa H_m^{(1)'}(x_0) - \frac{1}{kr_0} H_m^{(1)}(x_0) \right] X \\
& + \left[ \tilde{\theta} H_m^{(1)}(y_0) - \frac{2\mu\varepsilon}{kr_0} H_m^{(1)'}(y_0) \right] Y = 0, \\
& \left[ \tilde{\theta} H_m^{(1)}(x_0) - \frac{2\mu\varkappa}{kr_0} H_m^{(1)'}(x_0) \right] X \\
& + 2\mu M_0 \left[ \varepsilon H_m^{(1)'}(y_0) - \frac{1}{kr_0} H_m^{(1)}(y_0) \right] Y \\
& - \rho_0 \eta^2 H_m^{(2)}(x_{00})X_0 = 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
x_0 &= -ikr_0\eta/v_P, \quad y_0 = -ikr_0\eta/v_S, \quad x_{00} = -ikr_0\eta/v_{P0}, \\
M_0 &= m/(kr_0), \quad \tilde{\theta}_0 = 2\mu M_0 + \rho\eta^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Система уравнений (3.5) имеет ненулевое решение в случае равенства её определителя нулю, и это условие определяет дисперсионное уравнение. В дисперсионном уравнении полезно разделить левую часть на произведение функций Ханкеля  $H_m^{(1)}(x_0)$ ,  $H_m^{(1)}(y_0)$ ,  $H_m^{(2)}(x_{00})$  и представить дисперсионное уравнение равенством

$$\begin{vmatrix}
\frac{\varkappa H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} & M_0 & -\frac{\varkappa_0 H_m^{(2)'}(x_{00})}{H_m^{(2)}(x_{00})} \\
2\mu M_0 \left[ \frac{\varkappa H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} - \frac{1}{kr_0} \right] & \tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varepsilon}{kr_0} \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} & 0 \\
\tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varkappa}{kr_0} \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} & 2\mu M_0 \left[ \frac{\varepsilon H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} - \frac{1}{kr_0} \right] & -\rho_0 \eta^2
\end{vmatrix} = 0. \tag{3.7}$$

Определитель в уравнении (3.7) полезно разложить по элементам третьего столбца и записать соотношение

$$\varkappa_0 \frac{H_m^{(2)'}(x_{00})}{H_m^{(2)}(x_{00})} \Delta_1 + \rho_0 \eta^2 \Delta_2 = 0, \tag{3.8}$$

в котором

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2\mu M_0 \left[ \frac{x_0 H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} - \frac{1}{kr_0} \right] & \tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varepsilon_0}{kr_0} \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} \\ \tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varepsilon_0}{kr_0} \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} & 2\mu M_0 \left[ \frac{\varepsilon_0 H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} - \frac{1}{kr_0} \right] \end{vmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{x_0 H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} & M_0 \\ 2\mu M_0 \left[ \frac{x_0 H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} - \frac{1}{kr_0} \right] & \tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varepsilon_0}{kr_0} \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} \end{vmatrix}.$$

При преобразовании дисперсионного уравнения (3.8) необходимо использовать асимптотику функций Ханкеля. Выбор асимптотики определяется соотношениями между аргументами и порядком  $m$ . Согласно формулам (3.4), аргументы содержат корень  $\eta$ , расположенный на мнимой оси  $\eta = i\tau$ , и выражаются равенствами

$$x_0 = \frac{\tau kr_0}{v_P}, \quad y_0 = \frac{\tau kr_0}{v_S}, \quad x_{00} = \frac{\tau kr_0}{v_{P0}}, \quad (3.10)$$

или соотношениями

$$x_0 = \frac{\tau m}{v_P M_0}, \quad y_0 = \frac{\tau m}{v_S M_0}, \quad x_{00} = \frac{\tau m}{v_{P0} M_0}. \quad (3.11)$$

Чтобы установить интервалы изменения аргументов, укажем, что выражения (3.2) представляют собой наложение цилиндрических волн

$$kt\tau = m\theta = \text{const}. \quad (3.12)$$

Из равенства (3.12) следует, что волна Релея распространяется по окружности  $r = r_0$  со скоростью

$$\frac{r_0 d\theta}{dt} = \frac{\tau}{M_0} = \tilde{\tau} \quad (3.13)$$

С учетом формул (3.13) и (3.11) получим

$$\frac{x_0}{m} = \frac{\tilde{\tau}}{v_P}, \quad \frac{y_0}{m} = \frac{\tilde{\tau}}{v_S}, \quad \frac{x_{00}}{m} = \frac{\tilde{\tau}}{v_{P0}}. \quad (3.14)$$

Так как скорость волны Релея ограничена неравенствами

$$\tilde{\tau} < v_S, \quad \tilde{\tau} < v_{P0}, \quad (3.15)$$

а порядок  $m$  неограничен, то приходим к выводу, что в рассматриваемом случае порядок  $m$  больше аргументов. Этому случаю соответствует асимптотика [5]

$$H_m^{(1,2)}(z) = \pm i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sqrt{m^2 - z^2}}} \times \exp \left[ \sqrt{m^2 - z^2} - m \operatorname{arth} \frac{m}{z} \right] \left( 1 + \frac{1}{8\sqrt{m^2 - z^2}} \right). \quad (3.16)$$

Логарифмическая производная функций Ханкеля при  $m \gg 1$  и  $m > z$  представляется равенством

$$\frac{H_m^{(1,2)'}(z)}{H_m^{(1,2)}(z)} = \mp \frac{\sqrt{m^2 - z^2}}{z} + \frac{z}{2(m^2 - z^2)}. \quad (3.17)$$

Соотношение (3.17) может быть также получено, если использовать вместо формулы (3.16) асимптотику при малых разностях  $m - z$  [5], а функции  $H_{1/3}^{(1,2)}(z)$  заменить асимптотической формулой.

Для дальнейших преобразований дисперсионного уравнения введем функции

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_P^2}}, \quad \tilde{\beta} = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_S^2}}, \quad \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_{P0}^2}} \quad (3.18)$$

и выразим радикалы соотношениями

$$\sqrt{m^2 - x_0^2} = m\tilde{\alpha}, \quad \sqrt{m^2 - y_0^2} = m\tilde{\beta}, \quad \sqrt{m^2 - x_{00}^2} = m\tilde{\alpha}_0. \quad (3.19)$$

Из равенств (3.17)–(3.19) следуют формулы

$$\begin{aligned} \varkappa \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} &= -M_0\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_P^2 kr_0 \tilde{\alpha}^2}, \\ \varepsilon \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} &= -M_0\tilde{\beta} + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_S^2 kr_0 \tilde{\beta}^2}, \\ \varkappa_0 \frac{H_m^{(2)'}(x_{00})}{H_m^{(1)}(x_{00})} &= M_0\tilde{\alpha}_0 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{P0}^2 kr_0 \tilde{\alpha}_0^2}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \varkappa \varepsilon \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} &= M_0^2 \tilde{\alpha} \tilde{\beta} - \frac{M_0 \tilde{\tau}^2}{2kr_0} \left( \frac{\tilde{\alpha}}{v_S^2 \tilde{\beta}^2} + \frac{\tilde{\beta}}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} \right), \\ \varkappa \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} + \varepsilon \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} &= -M_0(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0); \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\tilde{\theta} = \mu M_0^2 \tilde{g}, \quad \tilde{g} = 2 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_S^2}. \quad (3.22)$$

Используя формулы и обозначения (3.6), (3.9)–(3.11), (3.13), (3.18)–(3.22), вычислим определители (3.9) и представим функции  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\mu^2 M_0^4 \left[ \tilde{R} + \frac{2\tilde{\tau}^2}{kr_0 M_0} \left( \frac{\tilde{\alpha}}{v_S^2 \tilde{\beta}^2} + \frac{\tilde{\beta}}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} - \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{v_S^2} \right) \right], \\ \Delta_2 &= M_0^3 \left[ \rho \tilde{\tau}^2 \tilde{\alpha} - \frac{\rho \tilde{\tau}^4}{2kr_0 v_P^2 M_0 \tilde{\alpha}^2} + \frac{2\mu}{kr_0 M_0} (1 - \tilde{\alpha} \tilde{\beta}) \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

в которых

$$\tilde{R} = \tilde{g}^2 - 4\tilde{\alpha}\tilde{\beta}. \quad (3.24)$$

После подстановки формул (3.23) в (3.8) и после ряда преобразований дисперсионное уравнение выразится равенством

$$\begin{aligned} &\tilde{R} + \frac{2\tilde{\tau}^2}{kr_0 M_0} \left( \frac{\tilde{\alpha}}{v_S^2 \tilde{\beta}^2} + \frac{\tilde{\beta}}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} - \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{v_S^2} \right) + \frac{\rho \rho_0 \tilde{\tau}^4 \tilde{\alpha}}{\mu^2 \tilde{\alpha}_0} \\ &+ \frac{2\rho_0 \tilde{\tau}^2 (1 - \tilde{\alpha} \tilde{\beta})}{kr_0 M \mu \tilde{\alpha}_0} - \frac{\rho \rho_0 \tilde{\tau}^6}{2kr_0 M \mu^2 \tilde{\alpha}_0} \left( \frac{1}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} + \frac{\tilde{\alpha}}{v_P^2 \tilde{\alpha}_0^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

При рассмотрении второго случая размещения сред следует в формулах и уравнениях (3.3)–(3.9) заменить первые функции Ханкеля на вторые, а вторые функции Ханкеля – на первые. При этих заменах формулы (3.18) и (3.19) сохраняются, а для логарифмических производных функций Ханкеля оказываются справедливыми равенства

$$\begin{aligned} \varkappa \frac{H_m^{(2)'}(x_0)}{H_m^{(2)}(x_0)} &= M_0 \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_P^2 kr_0 \tilde{\alpha}^2}, \\ \varepsilon \frac{H_m^{(2)'}(y_0)}{H_m^{(2)}(y_0)} &= M_0 \tilde{\beta} + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_S^2 kr_0 \tilde{\beta}^2}, \\ \varkappa_0 \frac{H_m^{(1)'}(x_{00})}{H_m^{(1)}(x_{00})} &= -M_0 \tilde{\alpha}_0 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{P0}^2 kr_0 \tilde{\alpha}_0^2}, \\ \varkappa \varepsilon \frac{H_m^{(2)'}(x_0)}{H_m^{(2)}(x_0)} \frac{H_m^{(2)'}(y_0)}{H_m^{(2)}(y_0)} &= M_0^2 \tilde{\alpha} \tilde{\beta} + \frac{M_0 \tilde{\tau}^2}{2kr_0} \left( \frac{\tilde{\alpha}}{v_S^2 \tilde{\beta}^2} + \frac{\tilde{\beta}}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} \right), \\ \varkappa \frac{H_m^{(2)'}(x_0)}{H_m^{(2)}(x_0)} + \varepsilon \frac{H_m^{(2)'}(y_0)}{H_m^{(2)}(y_0)} &= M_0 (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0); \end{aligned} \quad (3.27)$$

После замены номеров функций Ханкеля и после использования выражений (3.26) и (3.27) приходим к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{R} - \frac{2\tau^2}{kr_0 M_0} \left( \frac{\tilde{\alpha}}{v_S^2 \tilde{\beta}^2} + \frac{\tilde{\beta}}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} - \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{v_S^2} \right) + \frac{\rho \rho_0 \tilde{\tau}^4 \tilde{\alpha}}{\mu^2 \tilde{\alpha}_0} \\ - \frac{2\rho_0 \tilde{\tau}^2 (1 - \tilde{\alpha} \tilde{\beta})}{kr_0 M \mu \tilde{\alpha}_0} + \frac{\rho \rho_0 \tilde{\tau}^6}{2kr_0 M \mu^2 \alpha_0} \left( \frac{1}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} + \frac{\tilde{\alpha}}{v_{P_0}^2 \tilde{\alpha}_0^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) отличается от уравнения (3.25) только знаками радикалов  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\alpha}_0$  и знаками поправочных членов, содержащих множитель  $1/(kr_0 M)$ . Основные члены, соответствующие уравнению (1.6), оказываются одинаковыми.

В уравнениях (3.25) и (3.28) полезно заменить фазовую скорость  $\tau/M_0$  на  $\tau$  и провести обратные замены функций  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\alpha}_0$ ,  $\tilde{g}$  и  $\tilde{R}$  на соответствующие функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_0$ ,  $g$  и  $R$ . В результате придем к уравнениям

$$\begin{aligned} R + \frac{\rho \rho_0 \tau^4 \alpha}{\mu^2 \alpha_0} \mp \left[ \frac{2\tau^2}{kr_0 M_0} \left( \frac{\alpha}{v_S^2 \beta^2} + \frac{\beta}{v_P^2 \alpha^2} - \frac{\alpha + \beta}{v_S^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{2\rho_0 \tau^2 (1 - \alpha \beta)}{kr_0 M_0 \mu \alpha_0} - \frac{\rho \rho_0 \tau^6}{2kr_0 M_0 \mu^2 \alpha_0} \left( \frac{1}{v_P^2 \alpha^2} + \frac{\alpha}{v_{P_0}^2 \alpha_0^3} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

в которых верхний знак соответствует (3.25), а нижний знак – (3.28).

При выполнении условия (1.9) скорость волны Релея представляется приближенным соотношением

$$\begin{aligned} \tau = v_R - \frac{1}{R'(v_R)} \left\{ \frac{\rho \rho_0 \tau^4 \alpha}{\mu^2 \alpha_0} \pm \frac{1}{kr_0 M_0} \left[ 2\tau^2 \left( \frac{\alpha}{v_S^2 \beta^2} + \frac{\beta}{v_P^2 \alpha^2} - \frac{\alpha + \beta}{v_S^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\rho_0 \tau^2 (1 - \alpha \beta)}{\mu \alpha_0} - \frac{\rho \rho_0 \tau^6}{2\mu^2 \alpha_0} \left( \frac{1}{v_P^2 \alpha^2} + \frac{\alpha}{v_{P_0}^2 \alpha_0^3} \right) \right] \right\} \Bigg|_{\tau=v_R}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

в котором содержатся члены, учитывающие влияние кривизны и наличие жидкости.

#### §4. МЕРИДИОНАЛЬНАЯ ВОЛНА ВДОЛЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ

Пусть в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  задана сфера  $r = r_0$ , являющаяся границей упругой и жидкой сред. Также будем рассматривать два случая. В первом случае упругая среда занимает область

$r < r_0$ , а жидкая среда 0 расположена при  $r > r_0$ . Во втором случае, наоборот, упругая среда заполняет область  $r > r_0$ , а жидкая среда 0 находится в области  $r < r_0$ . Предположим, что в обоих случаях волны, образующиеся на границе  $r = r_0$ , не содержат смещений  $u_\varphi$  и не зависят от координаты  $\varphi$ . При этих предположениях граничные условия при  $r = r_0$  выражаются равенствами

$$u_r = u_{r0}, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{rr} = -p_0. \quad (4.1)$$

В первом случае смещения, напряжения и давления, входящие в граничные условия (4.1), представляются соотношениями

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{k}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sqrt{N} P_m(\cos\theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_r(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} P_m^1(\cos\theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{r\theta}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \\ \tau_{rr} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sqrt{N} P_m(\cos\theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{rr}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \\ u_{r0} &= \frac{k}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sqrt{N} P_m(\cos\theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_{r0}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \\ -p_0 &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sqrt{N} P_m(\cos\theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} P_0(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

в которых  $P_m(x)$  и  $P'_m(x)$  – полиномы и функции Лежандра,

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ \varkappa H_p^{(1)'}(x) - \frac{1}{2kr} H_p^{(1)}(x) \right] X + MY H_p^{(1)}(y) \right\}, \\ T_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ 2\mu M \varkappa H_p^{(1)'}(x) - \frac{3\mu M}{kr} H_p^{(1)}(x) \right] X \right. \\ &\quad \left. + \left[ \tilde{\theta} H_p^{(1)}(y) - \frac{2\mu}{kr} \varepsilon H_p^{(1)'}(y) \right] Y \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$



$$\begin{aligned}
T_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ \tilde{\theta} H_p^{(1)}(x) - \frac{4\mu\kappa}{kr} H_p^{(1)'}(x) \right] X \right. \\
&\quad \left. + \left[ 2\mu M \varepsilon H_p^{(1)'}(y) - \frac{3\mu M}{kr} H_p^{(1)}(y) \right] Y \right\}; \\
U_{r0} &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ \varkappa_0 H_p^{(2)'}(x) - \frac{1}{2kr} H_p^{(2)}(x) \right] X_0, \\
P_0 &= \frac{1}{\sqrt{r}} \rho_0 \eta^2 H_p^{(2)}(x) X_0; \\
x &= -\frac{ikr\eta}{v_P}, \quad y = -\frac{ikr\eta}{v_S}, \quad x_0 = -\frac{ikr\eta}{v_{P0}}, \\
M &= \frac{p}{kr}, \quad \tilde{\theta} = 2\mu M^2 + \rho\eta^2, \quad N = p(p+1), \\
p &= m + 0.5, \quad \varkappa = -\frac{i\eta}{v_P}, \quad \varepsilon = -\frac{i\eta}{v_S}, \quad \varkappa_0 = -\frac{i\eta}{v_{P0}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из формул (4.2)–(4.4) и граничных условий (4.1) следует система уравнений

$$\begin{aligned}
&\left[ \varkappa H_p^{(1)'}(x_0) - \frac{1}{2kr_0} H_p^{(1)}(x_0) \right] X + M_0 H_p^{(1)}(y_0) Y \\
&- \left[ \varkappa H_p^{(2)'}(x_{00}) - \frac{1}{2kr_0} H_p^{(2)}(x_{00}) \right] X_0 = 0, \\
&\left[ 2\mu M_0 \varkappa H_p^{(1)'}(x) - \frac{3\mu M}{kr_0} H_p^{(1)}(x_0) \right] X \\
&+ \left[ \tilde{\theta} H_p^{(1)}(y_0) - \frac{2\mu\varepsilon}{kr_0} H_p^{(1)'}(y) \right] Y = 0, \\
&\left[ \tilde{\theta}_0 H_p^{(1)}(x_0) - \frac{4\mu\kappa}{kr_0} H_p^{(1)'}(x_0) \right] X \\
&+ \left[ 2\mu M \varepsilon H_p^{(1)'}(y_0) - \frac{3\mu M_0}{kr_0} H_p^{(1)}(y_0) \right] Y - \rho_0 \eta^2 H_p^{(2)}(x_{00}) X_0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned}
x_0 &= -\frac{ikr_0\eta}{v_P}, \quad y_0 = -\frac{ikr_0\eta}{v_S}, \quad x_{00} = -\frac{ikr_0\eta}{v_{P0}}, \\
M_0 &= \frac{m}{kr_0}, \quad \tilde{\theta}_0 = 2\mu M_0 + \rho\eta^2.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Система уравнений (4.5) имеет ненулевое решение при условии равенства нулю её определителя. Это условие определяет дисперсионное уравнение. В дисперсионном уравнении полезно разделить левую

часть на произведение функций Ханкеля  $H_p^{(1)}(x_0)$ ,  $H_p^{(1)}(y_0)$ ,  $H_p^{(2)}(x_{00})$  и представить дисперсионное уравнение равенством

$$\begin{vmatrix} \varkappa \frac{H_p^{(1)'}(x_0)}{H_p^{(1)}(x_0)} - \frac{1}{2kr_0} & M_0 & -\varkappa_0 \frac{H_p^{(2)'}(x_{00})}{H_p^{(2)}(x_{00})} - \frac{1}{2kr_0} \\ 2\mu M_0 \varkappa \frac{H_p^{(1)'}(x_0)}{H_p^{(1)}(x_0)} - \frac{3\mu M_0}{kr_0} & \tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varepsilon}{kr_0} \frac{H_p^{(1)'}(y_0)}{H_p^{(1)}(y_0)} & 0 \\ \tilde{\theta}_0 - \frac{4\mu\varkappa}{kr_0} \frac{H_p^{(1)'}(x_0)}{H_p^{(1)}(x_0)} & 2\mu M_0 \varepsilon \frac{H_p^{(1)'}(y_0)}{H_p^{(1)}(y_0)} - \frac{3\mu M_0}{kr_0} & \rho_0 \eta^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

Разложим определитель в уравнении (4.7) по элементам третьего столбца и придем к соотношению

$$\left[ \varkappa_0 \frac{H_p^{(2)'}(x_{00})}{H_p^{(2)}(x_{00})} - \frac{1}{2kr_0} \right] \Delta_1 + \rho_0 \eta^2 \Delta_2 = 0, \quad (4.8)$$

в котором

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2\mu M_0 \varkappa \frac{H_p^{(1)'}(x_0)}{H_p^{(1)}(x_0)} - \frac{3\mu M_0}{kr_0} & \tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varepsilon}{kr_0} \frac{H_p^{(1)'}(y_0)}{H_p^{(1)}(y_0)} \\ \tilde{\theta}_0 - \frac{4\mu\varkappa_0}{kr_0} \frac{H_p^{(1)'}(x_0)}{H_p^{(1)}(x_0)} & 2\mu M_0 \varepsilon \frac{H_p^{(1)'}(y_0)}{H_p^{(1)}(y_0)} - \frac{3\mu M_0}{kr_0} \end{vmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \varkappa \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} - \frac{1}{2kr_0} & M_0 \\ 2\mu M_0 \varkappa \frac{H_p^{(1)'}(x_0)}{H_p^{(1)}(x_0)} - \frac{3\mu M_0}{kr_0} & \tilde{\theta}_0 - \frac{2\mu\varepsilon}{kr_0} \frac{H_p^{(1)'}(y_0)}{H_p^{(1)}(y_0)} \end{vmatrix}.$$

При исследовании дисперсионного уравнения будем предполагать

$$p \gg 1, \quad m \gg 1, \quad (4.10)$$

$$p = m, \quad (4.11)$$

так как обе эти величины отличаются только на 0.5. Используя предположения (4.10) и (4.11), воспользуемся асимптотиками (3.16), (3.17) и формулами (3.20), (3.21) и придем к формулам

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\mu^2 M_0^4 \left\{ \tilde{R} - \frac{2\tilde{\tau}^2}{kr_0 M_0} \left[ \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{v_S^2} - \frac{\tilde{\alpha}}{v_S^2 \tilde{\beta}^2} - \frac{\tilde{\beta}}{v_P^2 \tilde{\alpha}^2} \right] - \frac{2\beta(1 - \tilde{\alpha}\tilde{\beta})}{kr_0 M_0} \right\}, \\ \Delta_2 &= M_0^3 \left[ \rho \tilde{\tau}^2 \tilde{\alpha} - \frac{\rho \tilde{\tau}^4}{2kr_0 M_0 v_P^2 \tilde{\alpha}^2} + \frac{\rho \tilde{\tau}^2}{2M_0 kr_0} + \frac{2\mu}{kr_0 M_0} (1 - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

для определителей  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Сравнение формул (4.12) и (3.23) показывает, что выражения (4.12) отличаются только тем, что содержат дополнительные слагаемые по сравнению с выражениями (3.23).

После подстановки равенств (4.12) в (4.8) и после ряда преобразований дисперсионное уравнение может быть записано. При записи дисперсионного уравнения полезно учитывать асимптотические формулы для функций и полиномов Лежандра

$$P_m^\mu(\cos \theta) = \frac{1}{m^{\mu+0.5}} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.13)$$

из которых следует, что линейная скорость волны Релея представляется равенством

$$\frac{\tau}{M_0} = r_0 \frac{d\theta}{dt} \quad (4.14)$$

и величина  $\tau/M_0$  является аналогом величины  $\tau$ .

Поэтому, как и в §3, можно заменить величины  $\tilde{\tau}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_0, \tilde{g}$  и  $\tilde{R}$  соответственно на  $\tau, \alpha, \beta, \alpha_0, g$  и  $R$  и представить дисперсионное уравнение в первом случае в виде равенства

$$\begin{aligned} & R + \frac{2\tau^2}{kr_0 M_0} \left( \frac{\alpha}{v_S^2 \beta^2} + \frac{\beta}{v_P^2 \alpha^2} - \frac{\alpha + \beta}{v_S^2} \right) \\ & - \frac{2\beta(1 - \alpha\beta)}{kr_0 M_0} + \frac{\rho\rho_0 \tau^4 \alpha}{\mu\alpha_0} + \frac{2(1 - \alpha\beta)\rho_0 \tau^2}{\mu kr_0 M_0 \alpha_0} \\ & + \frac{\rho\rho_0 \tau^4}{2kr_0 M_0 \mu^2 \alpha_0} - \frac{\rho\rho_0 \tau^6}{2kr_0 M_0 \mu^2 \alpha_0} \left( \frac{1}{v_{P_0}^2 \alpha^2} + \frac{\alpha}{v_P^2 \alpha_0^3} \right) \\ & + \frac{\rho\rho_0 \tau^4}{2kr_0 M_0 \mu^2 \alpha_0} \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Дисперсионное уравнение (4.15) также содержит основные члены, входящие в равенство (1.6), и дополнительные члены, учитывающие кривизну и наличие жидкой среды.

При переходе ко второму случаю размещения сред необходимо во всех дополнительных членах дисперсионного уравнения (4.15) изменить знаки и сохранить знаки у основных членов.

При выполнении условия (1.9) скорость волны Релея представится приближенным соотношением

$$\tau = v_R - \frac{1}{R'(v_R)} \left\{ \frac{\rho\rho_0 \tau^4 \alpha}{\mu^2 \alpha_0} \pm \frac{1}{kr_0 M_0} \left[ 2\tau^2 \left( \frac{\alpha}{v_S^2 \beta^2} + \frac{\beta}{v_P^2 \alpha^2} - \frac{\alpha + \beta}{v_S^2} \right) \right] \right\}$$

$$- 2\beta(1 - \alpha\beta) + \frac{2(1 - \alpha\beta)\rho_0\tau^2}{\mu\alpha_0} + \frac{\rho\rho_0\tau^4}{2\mu^2\alpha_0} - \left. \frac{\rho\rho_0\tau^6}{2\mu^2\alpha_0} \left( \frac{1}{v_{P0}^2\alpha^2} + \frac{\alpha}{v_P^2\alpha_0^3} \right) + \frac{\rho\rho_0\tau^4}{2\mu^2\alpha_0} \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \right\},$$

в которых верхний знак относится к первому случаю, а нижний знак — ко второму случаю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Гоголадзе, *Волны Релея на границе сжимаемой жидкой среды и твердого упругого полупространства*. — Труды Сейсмологического ин-та АН СССР **127**, 1948.
2. И. А. Викторов *Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике*. Акустический ин-т АН СССР, 1966.
3. Л. А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах*. Наука, Л., 1984.
4. Н. Я. Кирпичникова, Л. А. Молотков, *О скорости волн Релея, распространяющейся вдоль криволинейных поверхностей*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **369** (2009), 48–63.
5. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. ГИТТЛ, М.-Л., 1951.

Molotkov L. A. About the Rayleigh wave on curvilinear boundary between elastic and fluid media.

Along the boundary between elastic and fluid media, the surface Rayleigh wave propagates. The velocity of this wave in the case of plane boundary  $v_{R0}$  is less than velocity of Rayleigh wave on a free plane boundary of an elastic medium  $v_R$  and less than velocity  $v_{P0}$  in a fluid medium. In order to investigate the velocity  $v_{R0}$  in the case of curvilinear boundaries, we research propagation of the Rayleigh waves under consideration along cylindrical and spherical surfaces. The velocity of the Rayleigh wave depends on curvature of wave trajectory and curvature in direction perpendicular to trajectory. Furthermore this velocity depends on presence or absence of the fluid medium.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, 191023  
Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 25 сентября 2010 г.