

Г. Л. Заворохин, А. И. Назаров

ОБ УПРУГИХ ВОЛНАХ В КЛИНЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование волн, бегущих вдоль ребра изотропного упругого клина (клиновые волны), было установлено многими авторами (см., например, [1]–[4]) на “физическом” уровне строгости посредством численных расчетов. Эти волны представляют собой фундаментальный тип колебаний твердого тела наряду с объемными и поверхностными волнами. Их скорости, как правило, значительно ниже скорости рэлеевской волны на плоской поверхности [5]. Локализованные вблизи ребра и не обладающие дисперсией, такие волны реализуют волноводное распространение колебаний.

В работе [1] Лагассом с помощью метода конечных элементов была приближенно определена фазовая скорость как функция угла клина для двух низших антисимметричных мод. Независимое исследование было проведено Марадудиным с сотрудниками [2], которые сразу рассматривали неограниченный клин и, разлагая поле смещений по полиномам Лагерра, находили численное решение задачи. Последним авторам удалось рассчитать фазовые скорости симметричной моды и нескольких антисимметричных мод в зависимости от угла клина. Вместе с фундаментальной (нижнего порядка) антисимметричной модой симметричная мода исследовалась в работе [3]. Представляя смещения в виде суммы двух решений уравнений теории упругости, каждое из которых удовлетворяет точно краевому условию лишь на одной грани клина, а на другой – приближенно, Тирстен и Рубин, используя проекционный метод, получили численное решение. Строгое доказательство существования локализованной волноводной моды для клина с углом раскрытия меньше прямого было представлено И. В. Камоцким в [6].

Идея [6] состоит в сведении задачи к исследованию спектра неко-

Ключевые слова: клиновая волна, волна Рэлея, вариационный принцип.

Работа второго автора частично поддержана ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2010-1.1-111-128-033).

торого самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, где Ω – угол в \mathbb{R}^2 . Доказав, что существенный спектр этого оператора совпадает с лучом $[c_R^2 k^2, +\infty)$, где c_R – скорость волны Рэля, а k – длина волнового вектора, И. В. Камоцкий затем строит тестовую функцию, на которой отношение Рэля меньше $c_R^2 k^2$, и, таким образом, оператор имеет хотя бы одну точку дискретного спектра, которой и соответствует локализованная клиновья волна в исходной задаче.

Развивая метод, использованный в [6], мы предлагаем более сложный анзац для тестовых функций. В результате доказано существование локализованных клиновых волн для некоторого интервала значений углов, больших $\pi/2$. Кроме того, наш анзац позволяет разделить случаи существования симметричных и антисимметричных мод. Для некоторых (отрицательных) значений коэффициента Пуассона $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ доказано существование обоих видов волн.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РЕЗУЛЬТАТ И. КАМОЦКОГО

Пусть

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : r > 0, \phi \in (0, \varphi)\}$$

– угол на плоскости \mathbb{R}^2 , (r, ϕ) – полярные координаты.

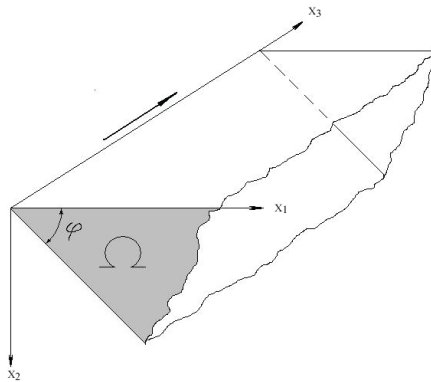


Рис. 1.

Предположим, что в объеме, занятом клином $K = \Omega \times \mathbb{R}$ (см. рис. 1), выполняются уравнения движения изотропного твердого тела. Если

зависимость смещения от времени гармоническая $U(x)e^{-i\omega t}$, то уравнения для U имеют вид

$$LU \equiv L(\partial_1, \partial_2, \partial_3)U := -\partial_m \sigma_{nm} = \rho \omega^2 U_n, \quad n = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность материала (в дальнейшем, не умаляя общности, полагаем $\rho = 1$), $U = (U_1, U_2, U_3)$ – вектор смещений, σ_{nm} – компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{nm} = \lambda \partial_l U_l \delta_{nm} + \mu (\partial_m U_n + \partial_n U_m),$$

где λ, μ – коэффициенты Ламэ, δ_{nm} – символ Кронекера. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

На поверхности клина ∂K выполнены условия отсутствия напряжений

$$NU \equiv N(\partial_1, \partial_2, \partial_3)U := \sigma_{nm} \nu_m = 0, \quad n = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь (ν_1, ν_2, ν_3) – вектор внешней нормали.

Домножая левую часть (1) на $\overline{U_n}$ (черта означает комплексное сопряжение) и интегрируя по частям, получим тождество

$$(LU, U)_K + (NU, U)_{\partial K} = a_K(U, U) \equiv \int_K a(\partial_1, \partial_2, \partial_3; U, U) dx, \quad (3)$$

где

$$a(\partial_1, \partial_2, \partial_3; U, U) = \sigma_{nm} \overline{\partial_m U_n}.$$

Будем искать решение задачи (1), (2) в виде

$$U(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) e^{ikx_3},$$

где k – волновое число. Тогда для вектора $u(x_1, x_2)$ получаем краевую задачу в области Ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &\equiv L(\partial_1, \partial_2, ik)u = \omega^2 u \quad \text{в } \Omega, \\ \mathcal{N}u &\equiv N(\partial_1, \partial_2, ik)u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично (3) выводится следующее тождество:

$$(\mathcal{L}u, u)_\Omega + (\mathcal{N}u, u)_{\partial\Omega} = a_\Omega(ik; u, u) \equiv \int_\Omega a(\partial_1, \partial_2, ik; u, u) dx_1 dx_2. \quad (5)$$

Симметричная квадратичная форма в правой части (5) является положительной и замкнутой в гильбертовом пространстве $(H^1(\Omega))^3$. Поэтому (см., напр., [7, гл. 10]) краевой задаче (4) соответствует самосопряженный оператор $\mathcal{A}(ik)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Как известно, нижняя граница спектра оператора $\mathcal{A}(ik)$ равна $\inf_{(H^1(\Omega))^3} \Phi(u)$, где

$$\Phi(u) := \frac{a_\Omega(ik; u, u)}{(u, u)_\Omega}$$

– отношение Рэля.

Если $u(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$ – нетривиальная собственная функция оператора $\mathcal{A}(ik)$, $k > 0$, то функцию $U(x, t) = u(x_1, x_2)e^{i(kx_3 - \omega t)}$, $\omega > 0$, будем называть волноводной модой. Поскольку в задаче имеется плоскость симметрии, оператор $\mathcal{A}(ik)$ приводится разложением пространства $(H^1(\Omega))^3$ на подпространства антисимметричных (\mathcal{H}_a) и симметричных (\mathcal{H}_s) смещений, что порождает принципиальную возможность существования как антисимметричных (изгибных), так и симметричных мод.

Как уже упоминалось во введении, в работе [6] показано, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}(ik)$ совпадает с лучом $[c_R^2 k^2, +\infty)$, где c_R – скорость волны Рэля. Поэтому ниже частоты отсечки $\omega_R^2 = c_R^2 k^2$ может располагаться лишь дискретный спектр, наличие которого соответствует существованию локализованных волноводных мод клина.

Для доказательства существования дискретного спектра достаточно предъявить такую функцию $u^{test} \in (H^1(\Omega))^3$, что

$$\Phi(u^{test}) < c_R^2 k^2. \quad (6)$$

В [6] в качестве тестовой функции была взята $u_n^{test}(x_1, x_2) = e^{-\frac{x_1}{n}} u^R(x_2)$, n – большой параметр, где

$$U^R(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-i\omega t + ikx_3} u^R(x_2) \quad (7)$$

– волна Рэля, распространяющаяся в направлении $(0, 0, 1)$ и оставляющая свободной от напряжений плоскость $x_2 = 0$. Оказывается,

$$\Phi(u_n^{test}) = c_R^2 k^2 - cn^{-1} + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $c > 0$ при $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Взяв достаточно большое n , получаем (6), что доказывает существование волноводной моды при $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и при всех значениях σ .

3. ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА И. КАМОЦКОГО

Рассмотрим теперь, наряду с (8), волну Рэлея

$$V^R(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-i\omega t + ikx_3} u^R(\sin(\varphi)x_1 - \cos(\varphi)x_2), \quad (8)$$

распространяющуюся в направлении $(0,0,1)$ и оставляющую свободной от напряжений другую грань клина $\sin(\varphi)x_1 - \cos(\varphi)x_2 = 0$.

В качестве тестовой функции возьмем линейную комбинацию “подрезанных” профилей волн Рэлея (7) и (8):

$$v_n^{test}(x_1, x_2) = \alpha e^{-\frac{x_1}{n}} u^R(x_2) + \beta e^{-\frac{\cos(\varphi)x_1 + \sin(\varphi)x_2}{n}} u^R(\sin(\varphi)x_1 - \cos(\varphi)x_2).$$

Очевидно, что

$$\Phi(v_n^{test}) = \frac{\mathfrak{A}_n(\alpha, \beta)}{\mathfrak{B}_n(\alpha, \beta)},$$

где \mathfrak{A}_n и \mathfrak{B}_n – квадратичные формы на \mathbb{R}^2 . Поэтому неравенство $\Phi(v_n^{test}) < c_R^2 k^2$ при каких-нибудь α и β равносильно наличию отрицательного собственного числа у формы $\mathfrak{A}_n - c_R^2 k^2 \mathfrak{B}_n$.

Прямой подсчет показывает, что

$$\mathfrak{A}_n(\alpha, \beta) - c_R^2 k^2 \mathfrak{B}_n(\alpha, \beta) = \mathfrak{M}(\alpha, \beta) + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где \mathfrak{M} – квадратичная форма, матрица которой $\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_1 \end{bmatrix}$ не зависит от n и имеет сложное, но явное выражение.

Очевидно, что форма \mathfrak{M} имеет собственные векторы $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Несложно видеть также, что если отрицательному собственному числу соответствует собственный вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, то при достаточно большом n неравенство $\Phi(v_n^{test}) < c_R^2 k^2$ достигается на антисимметричной функции, что дает $\inf_{\mathcal{H}_a} \Phi(u) < c_R^2 k^2$ и, таким образом, доказывает существование антисимметричной моды. Аналогично, наличие отрицательного собственного числа с собственным вектором $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ доказывает существование симметричной моды.

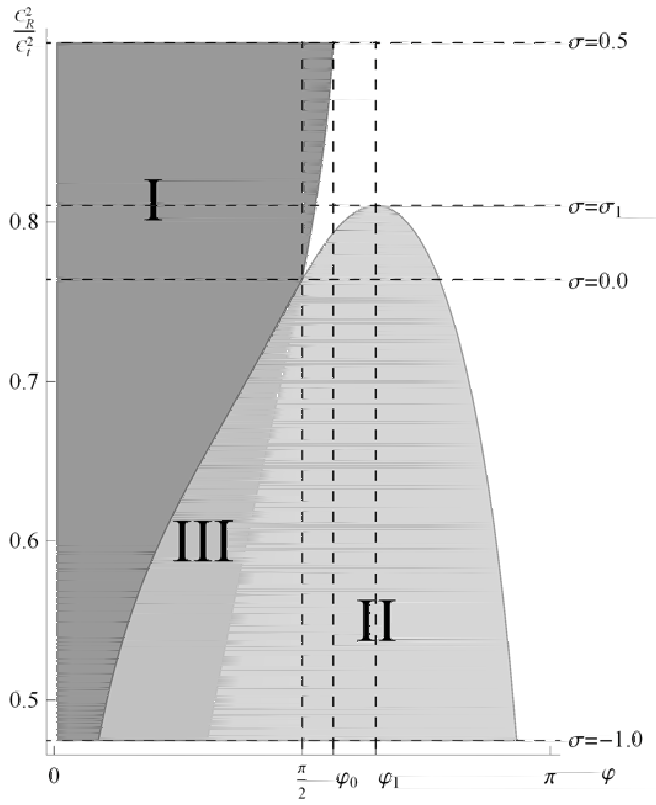


Рис. 2.

Пользуясь элементарными фактами из линейной алгебры, получаем следующие достаточные признаки существования волноводных мод¹:

I	$ m_1 < m_2$	антисимметричная мода
II	$ m_1 < -m_2$	симметричная мода
III	$ m_2 < -m_1$	как антисимметричная, так и симметричная мода

¹Граница между зонами I и III (соответственно, II и III) принадлежит зоне I (соответственно, II).

Дальнейшее усложнение анзаца с использованием более двух волн Рэлея не дает расширения областей существования антисимметричной моды. Область значений параметров, для которых существует симметричная мода, удается несколько расширить, добавляя в тестовой функции к волнам Рэлея, бегущим вдоль обеих граней клина, третью волну, “бегущую” вдоль плоскости $\cos(\varphi/2)x_1 + \sin(\varphi/2)x_2 = 0$.

Результаты вычислений можно видеть на рис. 2. Из рисунка видно, что фундаментальная антисимметричная мода может распространяться как локализованная в клине с углом раскрытия $\varphi < \varphi_0 \approx 101.25^\circ$, что хорошо согласуется с результатами [2]. Существование симметричной моды удалось доказать, помимо нереальных (отрицательных) значений σ , лишь при $\sigma < \sigma_1 \approx 0.139$ для некоторых интервалов углов, больших $\pi/2$ (значению $\sigma_1 \approx 0.139$ соответствует $\varphi_1 \approx 116.65^\circ$), что согласуется с результатами [3]. Любопытно, что в прямоугольном клине ($\varphi = \pi/2$) при $\sigma > 0$ может распространяться антисимметричная мода, а при $\sigma < 0$ – симметричная.

Следует отметить случай полного обнуления квадратичной формы \mathfrak{M} при $\lambda = 0$ и $\varphi = \pi/2$. В этом случае, как и в [6], доказать существование какой-либо моды не удалось, и мы предполагаем, что ее просто не существует.

Мы весьма признательны В. М. Бабичу за постоянное внимание к нашей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. E. Lagasse, *Analysis of a Dispersion-Free Guide for Elastic Waves*. — Electron. Lett. **8**, No. 15, (1972), 372–373.
2. S. L. Moss, A. A. Maradudin and S. L. Cunningham, *Vibrational Edge Modes for Wedges with Arbitrary Interior Angles*. — Phys. Rev., B, **8**, No. 6 (1973) 2999–3008.
3. H. F. Tiersten, D. Rubin, *On the Fundamental Antisymmetric Mode of the Wedge Guide*. — Proc. IEEE Ultrason. Symp. (1974), 117–120.
4. В. В. Крылов, *Геометро-акустический подход к описанию локализованных мод колебаний упругого клина*. — ЖТФ **60**, No. 2 (1990), 1–7.
5. Lord Rayleigh (J. W. Strutt), *On Waves Propagating Along the Plane Surface of an Elastic Solid*. — Proc. London Math. Soc. **17**, No. 4 (1887).
6. И. В. Камоцкий, *О поверхностной волне, бегущей вдоль ребра упругого клина*. — Алгебра и Анализ **20**, No. 1 (2008), 86–92.
7. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. ЛГУ, Л. (1980).

Zavorokhin G. L., Nazarov A. I. On elastic waves in a wedge.

The existence of waves propagating along the edge of the elastic wedge was established by many authors by physically rigorous arguments on the base of numerical computations. The mathematically rigorous proof for wedge with aperture angle less than $\pi/2$ was presented by I. Kamotskii.

We amplify the I. Kamotskii result and prove the existence of the fundamental modes for some range of aperture angles greater than $\pi/2$.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр., д. 28,
Петродворец, 198504
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: germanzavorokhin@rambler.ru,
al.il.nazarov@gmail.com

Поступило 25 октября 2010 г.