

Ф. Д. Едемский, А. В. Попов,
С. А. Запуниди, Б. Р. Павловский

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПОДПОВЕРХНОСТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

В приближении “взрывающихся” источников дается точное решение идеализированной обратной задачи подповерхностного зондирования – определение пространственной плотности сторонних токов по измеренному на поверхности электрическому полю.

1. ВВЕДЕНИЕ

Из трех задач георадарного зондирования – обнаружение, локализация и идентификация подповерхностных объектов [1] – последняя требует применения наиболее тонких математических методов и детальных численных расчетов. В качестве примера можно привести задачу поиска и идентификации подземного газопровода сканированием приемно-передающей антенны георадара вдоль земной поверхности $(x, 0)$. Если положение и глубина залегания трубы достаточно хорошо определяются по первичным данным георадарного зондирования, то определение диаметра трубы затруднительно, поскольку ее размер слабо влияет на форму гиперболического годографа $r(x)$ характерного для локализованного рассеивателя – см. рис. 1.

Для более точной локализации отражающих объектов и границ обычно используется тот или иной метод миграции георадарных данных. Простейшие из них – “суперпозиция эллипсов” и “суммирование гипербол”, представляющие собой геометрический процесс реконструкции реальных отражающих границ по линиям синфазности или поверхностям одинаковых временных задержек, широко используются в сейсмической разведке, начиная с середины прошлого столетия [2]. Позднее были разработаны более совершенные методы миграции на основе волнового уравнения и модели “взрывающегося рефлексора” [3–5]. Суть последнего приближения состоит в замене реальных

Ключевые слова: подповерхностное зондирование, миграция, георадар, обратная задача излучения.

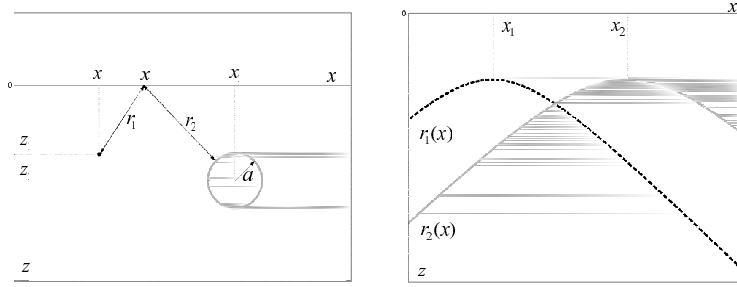


Рис. 1. (а) Схематическое изображение линейного объекта и цилиндра радиуса α ;

(б) Гиперболический годограф линейного

объекта $r_1(x) = \sqrt{z_1^2 + (x - x_1)^2}$ и практически

неотличимый годограф цилиндрического

объекта $r_2(x) = \sqrt{z_2^2 + (x - x_2)^2} - \alpha$.

подповерхностных отражающих границ виртуальными источниками поля, что позволяет в замкнутой форме выписать точное решение прямой задачи излучения. Метод волновой миграции, в свою очередь, сводится к решению волнового уравнения в обратном направлении по времени. Измеренное на поверхности электрическое поле служит одним из граничных условий, а виртуальные источники идентифицируются по максимумам восстановленного поля в подповерхностной среде [6]. На основе этой модели были разработаны алгоритмы так называемой $f - k$ миграции с использованием преобразования Фурье [7, 8], приблизительно в то же время развивались методы на основе численного интегрирования [9] и конечно-разностных схем с приложением к актуальным задачам сейсмологии [10].

Эти методы можно применить и в подповерхностном радиозондировании, несмотря на то, что этой области присуща некоторая специфика – такие особенности, как малая длина волны, малая глубина проникновения, проводимость среды. При всей простоте и логичности приближения “взрывающихся рефлекторов” можно указать ряд его слабых сторон. Во-первых, максимумы восстановленного поля дают лишь приблизительную оценку положения источников и никакой реальной информации об их пространственной плотности. Во-вторых, решение однородного волнового уравнения справедливо лишь до бли-

жайшей излучающей границы, что делает невозможным точное определение положения и плотности объемных или множественных источников.

В данной работе мы рассматриваем некоторое обобщение метода “взрывающегося рефлектора”, которое может быть названо приближением “взрывающихся” объемных источников. Предполагается, что в подповерхностной среде синхронно возникают сторонние импульсные токи с заданным пространственным распределением. Созданное ими излучение регистрируется на поверхности земли. В замкнутом виде строится решение обратной задачи – определение пространственной плотности сторонних токов по измеренному на поверхности электрическому полю.

Эта модельная задача может быть использована для совершенствования алгоритмов волновой миграции. Кроме того, она имеет самостоятельный методический интерес, позволяя в численном моделировании выявить принципиальные факторы, ограничивающие разрешающую способность подповерхностного зондирования.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ИЗЛУЧЕНИЯ

Имея в виду стандартную схему линейного георадарного профилирования, рассмотрим двумерную задачу распространения электромагнитных волн, поляризованных перпендикулярно плоскости (x, z) , в однородной непроводящей подповерхностной среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью ε и плотностью сторонних токов $J(x, z, t)$. В отсутствие зависимости от координаты y соответствующая компонента электрического поля $E_y = E(x, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению [11]

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t}, \quad (1)$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ – скорость распространения электромагнитных волн. Его решение, удовлетворяющее начальным условиям $E|_{t=-\infty} = \frac{\partial E}{\partial t}|_{t=-\infty} = 0$, хорошо известно [12]:

$$E(x, z, t) = -\frac{2v}{c^2} \iiint_{K(x, z, t)} \frac{\partial J(\xi, \zeta, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau \partial \xi \partial \zeta}{\sqrt{v^2(t - \tau)^2 - (\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2}}. \quad (2)$$

Здесь $K(x, z, t)$ – область $\{\tau < t, (\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 < v^2(t - \tau)^2\}$. Будем считать, что сторонние токи характеризуются импульсной функцией $f(t)$ и пространственной плотностью $w(x, z) : J(x, z, t) = f(t)w(x, z)$. Тогда электрическое поле, измеряемое на поверхности $z = 0$, может быть записано в виде тройного интеграла:

$$g(x, t) = -\frac{c^2}{2v}E(x, 0, t) = \int_0^\infty \dot{f}(t - \tau) d\tau \iint_{l^2 + x^2 < v^2 \tau^2} w(x + l, z) \frac{dl dz}{\sqrt{v^2 \tau^2 - l^2 - z^2}}. \quad (3)$$

Если импульсная функция $f(t)$ задана, функция $g(x, t)$ – набор волновых форм сигнала, принятых в различных точках поверхности, однозначно связана с пространственным распределением плотности источников $w(x, z)$.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Решение задачи излучения позволяет сформулировать обратную задачу – по известной импульсной функции $f(t)$ и измеренному полю $g(x, t)$ определить пространственную плотность “взрывающихся” источников $w(x, z)$. Проблема сводится к решению интегрального уравнения (3), которое, как будет показано, может быть найдено в явном виде при заданной импульсной функции токов $f(t)$.

Представляя производную $\dot{f}(t)$ как суперпозицию дельта-функций, можно рассматривать измеренное волновое поле (3) как свертку импульса возбуждения с откликом среды на элементарный скачок тока $h(x, t)$:

$$g(x, t) = \mathbf{C}[h(x, t)] \equiv \int_0^\infty \dot{f}(t - \tau) h(x, \tau) d\tau. \quad (4)$$

Обратная операция (деконволюция): $h(x, t) = \mathbf{C}^{-1}[g(x, t)]$ – позволяет упростить интегральное уравнение (3). Простейшим образом она выполняется для импульсов представимых в виде конечного числа экспонент или тригонометрических функций. В этом случае оператор деконволюции сводится к дифференцированию и интегрированию. Так, например, для элементарного затухающего импульса тока

$f(t) = H(t) \exp(-bt)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, имеем

$$f(t) + b \int_{-\infty}^t f(t) dt = H(t), \quad \dot{f}(t) + bf(t) = \delta(t). \quad (5)$$

Это очень удобная модель, поскольку в этом случае $h(x, t)$ можно представить в явном виде функционалом от $g(x, t)$. Вычисляя линейную комбинацию $h(x, t) = g(x, t) + b \int_{-\infty}^t g(x, t) dt$, мы избавляемся от одного интеграла в правой части равенства (3):

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \int_0^\infty [\dot{f}(t - \tau) + bf(t - \tau)] d\tau \\ &\times \iint_{l^2 + z^2 > v^2 \tau^2} w(x + l, z) \frac{dl dz}{\sqrt{v^2 \tau^2 - l^2 - z^2}} \\ &= \iint_{l^2 + z^2 > v^2 t^2} w(x + l, z) \frac{dl dz}{\sqrt{v^2 t^2 - l^2 - z^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $h(x, t)$ – известная функция, найденная деконволюцией экспериментальных данных $g(x, t)$, а $w(x, z)$ подлежит определению. Этому уравнению можно придать геометрический смысл, обозначив через $m(x, r)$ среднее значение искомой плотности токов $w(x, z)$ по полуокружности радиуса r с центром в точке $(x, 0)$:

$$m(x, r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w(x + r \sin \theta, r \cos \theta) d\theta. \quad (7)$$

Переходя в правой части (6) к полярным координатам $l = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, получим интегральное уравнение

$$h(x, t) = \pi \int_0^{vt} m(x, r) \frac{r dr}{\sqrt{v^2 t^2 - r^2}}. \quad (8)$$

Заменой $r = \sqrt{\lambda}$, $s \equiv vt = \sqrt{\mu}$ оно сводится к точно решаемому уравнению Абеля [13]. Возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$m(x, r) = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r h\left(x, \frac{s}{v}\right) \frac{s ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}. \quad (9)$$

Таким образом, вычисляя по измеренным значениям поля $g(x, t)$ функцию $h(x, t)$, мы можем определить среднее значение искомой плотности источников $w(x, z)$ на окружности $(x + r \sin \theta, r \cos \theta)$ как функцию координаты ее центра x , и радиуса r . Восстановление самой функции $w(x, z)$ является некоторым вариантом классической задачи томографии и решается с помощью уравнения Дарбу [12] для усредненных значений волнового поля.

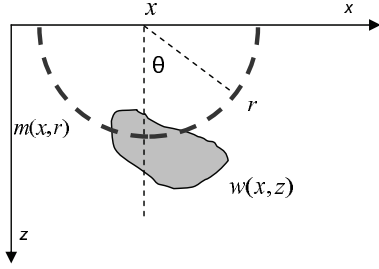


Рис. 2. $m(x, r)$ -- среднее значение искомой плотности токов $w(x, z)$ по полуокружности радиуса r с центром в точке $(x, 0)$.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТОМОГРАФИИ

Для решения этой задачи, введем обобщение функции $m(x, r)$, сместив центр круга, по которому ведется усреднение, с прямой $z = 0$ в произвольную точку плоскости (x, z) . Рассмотрим функцию трех переменных

$$M(x, z, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x + r \sin \theta, z + r \cos \theta) d\theta \quad (10)$$

– среднее значение искомой плотности токов $w(x, z)$ по окружности радиуса r с центром в точке (x, z) . Прямым дифференцированием легко проверить, что $M(x, z, r)$ удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$M_{rr} + \frac{1}{r} M_r = M_{xx} + M_{zz} \quad (11)$$

— двумерному варианту уравнения Дарбу [12]. Изложенные ниже соображения позволяют сформулировать краевые условия для уравнения (11):

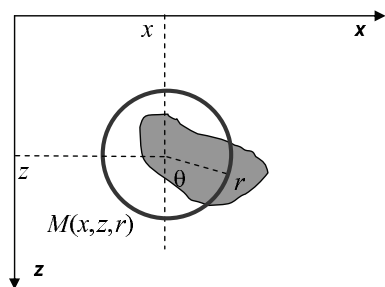


Рис. 3. $M(x, z, r)$ — среднее значение искомой плотности токов $w(x, z)$ по окружности радиуса r с центром в точке (x, z) .

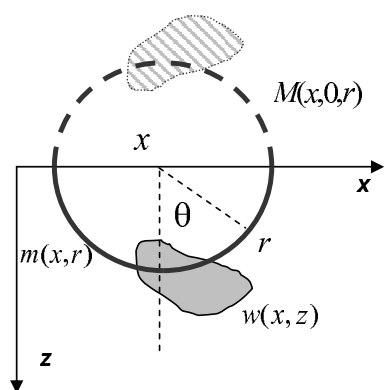


Рис. 4. Четное продолжение $w(x, z)$ в полуплоскость $z < 0$.

1. При стремлении радиуса окружности к нулю функция $M_r(x, z, r)$ переходит в $w(x, z)$.
2. Производная $M_r(x, z, r)$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$:

$$M_r(x, z, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_x(x, z) \sin \theta + w_z(x, z) \cos \theta d\theta = 0. \quad (12)$$

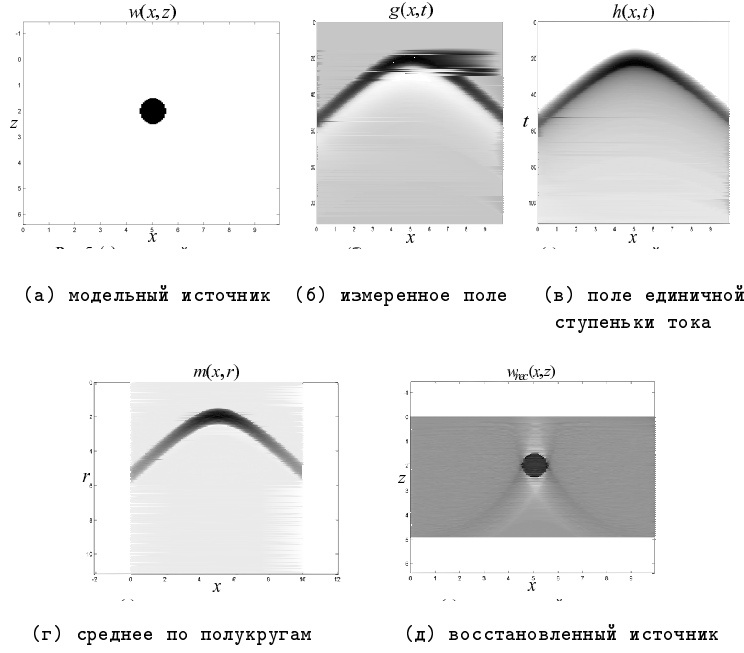


Рис. 5

3. Найденное выше выражение (9) для усредненной по полуокружностям искомой функции $w(x, z)$ может служить краевым условием для уравнения (11) при $z = 0$, если формально продолжить $w(x, z)$ в полуплоскость $z < 0$ четным образом. Таким образом, $m(x, r)$ и $w(x, z)$ оказываются связанными между собой через функцию $M(x, z, r)$, являясь ее краевыми значениями.

4. Четное продолжение $w(x, z)$ на отрицательные z дает еще одно краевое условие — $M_z(x, 0, r) = 0$.

5. Дополнительными условиями являются ограниченность и достаточно быстрое убывание функции $M(x, z, r)$ по всем своим аргументам.

Таким образом, мы приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned}
 M_{rr} + \frac{1}{r}M_r &= M_{xx} + M_{zz}, \\
 M(x, 0, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x + r \sin \theta, r \cos \theta) d\theta = m(x, r), \\
 M_z(x, 0, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_z(x + r \sin \theta, r \cos \theta) d\theta = 0, \\
 M_r(x, z, 0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Эти условия вместе с предположением об ограниченности и достаточно быстром убывании на бесконечности позволяют найти единственное решение уравнения (11) с помощью преобразования Фурье. Преобразуя уравнение Дарбу по Фурье, получаем:

$$\widetilde{M}_{rr} + \frac{1}{r}\widetilde{M}_r + (p^2 + q^2)\widetilde{M} = 0, \tag{14}$$

где $M(x, z, r)$ и $\widetilde{M}(x, z, r)$ связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{M}(p, q, r) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dx \int_0^{\infty} \cos(qz) M(x, z, r) dz, \\
 M(x, z, r) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} dp \int_0^{\infty} \cos(qz) \widetilde{M}(p, q, r) dq.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Регулярное решение уравнения Бесселя (14), удовлетворяющее краевым условиям (13), имеет вид

$$\widetilde{M}(p, q, r) = A(p, q) J_0\left(r\sqrt{p^2 + q^2}\right). \tag{16}$$

Коэффициент $A(p, q)$ можно определить, используя граничное условие, связывающее $M(x, z, r)$ с $m(x, r)$, и преобразование Фурье–Бесселя функции $m(x, r)$:

$$A(p, q) = \frac{\pi}{2} q \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi} d\xi \int_0^{\infty} J_0\left(\rho\sqrt{p^2 + q^2}\right) m(\xi, \rho) d\rho. \tag{17}$$

Как было указано выше, искомая плотность источников $w(x, z)$ находится как предел среднего значения $M(x, z, r)$ при $r \rightarrow 0$:

$$w(x, z) = M(x, z, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp \int_0^{\infty} \cos qz A(p, q) dq. \quad (18)$$

Подставляя в формулу (18) найденное выражение для функции $A(p, q)$ и меняя порядок интегрирования, получим искомое решение обратной задачи:

$$w(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{|l|}^{\infty} m_r(x+l, r) \ln \left| \frac{z + \sqrt{r^2 - l^2}}{z - \sqrt{r^2 - l^2}} \right| dr \quad (19)$$

или, после замены переменной $\zeta = \sqrt{r^2 - l^2}$ и интегрирования по частям,

$$w(x, z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} z \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{\infty} \left[m(x+l, \sqrt{\zeta^2 + l^2}) - m(x+l, \sqrt{z^2 + l^2}) \right] \frac{d\zeta}{z^2 - \zeta^2}. \quad (20)$$

Этот результат является обобщением классической теоремы Шлемильха [13], относящейся к одномерному случаю. Если локальная и, как следствие, усредненная плотность источников зависит только от z , в формуле (19) можно выполнить интегрирование по l , что приводит к выражению

$$w(z) = m(0) + z \int_0^{\pi/2} m'(z \cos \theta) d\theta, \quad (21)$$

являющемуся обращением преобразования

$$m(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} m(r \cos \theta) d\theta$$

и совпадающему с формулой Шлемильха [13].

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пример восстановления модельного источника по формулам (6)–(20) приведен на Рис. 5. В черно-белой цветовой гамме показано: заданное распределение плотности сторонних токов $w(x, z)$, постоянное внутри круга радиуса 0.5м с центром в точке $x = 5\text{м}$, $z = 2\text{м}$ (а); вычисленное по формуле (3) распределение волновых форм $g(x, t)$ принятого сигнала на линии $z = 0$ (б); результат деконволюции $h(x, t)$ (в); томографическое среднее $m(x, r)$ (г); восстановленная плотность источников $w_{\text{rec}}(x, z)$ (д).

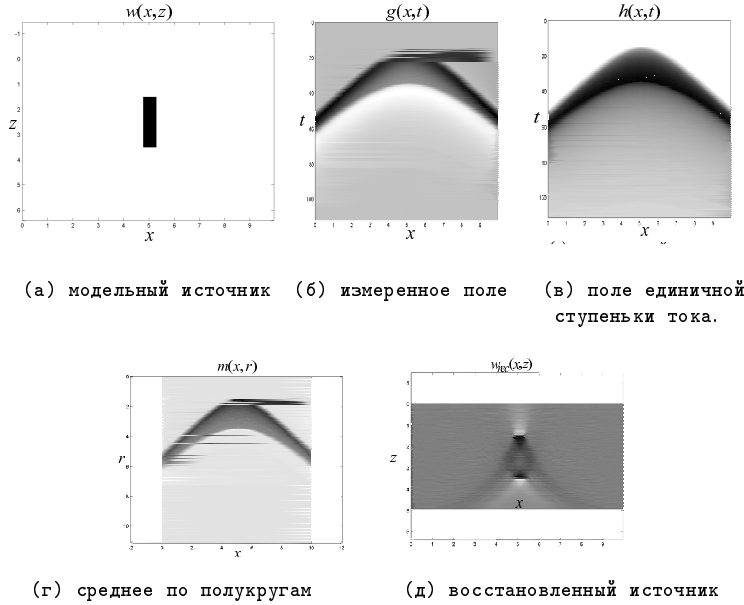


Рис. 6

Этот пример, моделирующий типичную ситуацию подповерхностного радиозондирования, позволяет оценить возможности волновой миграции. При вполне удовлетворительном для практики качестве восстановления объекта Рис. 5 наглядно показывает и артефакты, возникшие вследствие ограниченности апертуры зондирования и потери части информации. Чем уже диапазон зондирования, тем более

сильные искажения возникают при реконструкции. Особенно сильно проявляется потеря информации при восстановлении вертикально протяженных объектов. Это хорошо иллюстрируется на следующем примере – Рис. 6.

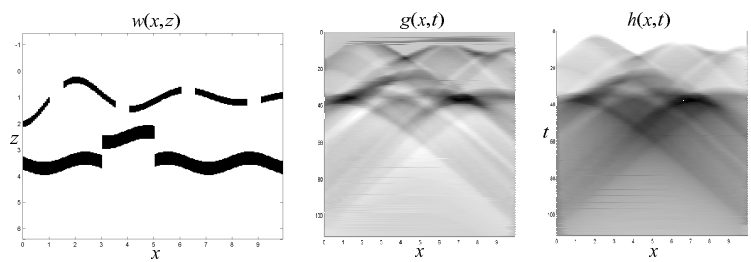
Как видно из этих примеров, степень влияния ограниченности апертуры зависит от формы объекта. Качество восстановления можно оценить заранее по графику $m(x, r)$. Для кругового источника “хвосты” гиперболического годографа – Рис. 5(г) обрываются на достаточно низких значениях амплитуды сигнала, в отличие от “радарограммы” вертикально протяженного объекта – Рис. 6(г). Кроме вертикально протяженных объектов, заметным искажениям подвергаются при реконструкции объекты, расположенные на краю “радарограммы”, что объясняется опять же ограниченностью апертуры. Это проиллюстрировано ниже примером реконструкции приближенного к реальному распределения подповерхностных источников – неоднородной слоистой структуры, напоминающей типичную для практики кусочно-слоистую структуру грунта.

Сравнение Рис. 7 (а) и (д) показывает некоторое искажение деталей на краях образа, но в целом качество восстановления можно назвать превосходным. В отличие от первичных данных – Рис. 7(б), восстановленный образ позволяет оператору воспринять все структурные особенности сложного объекта.

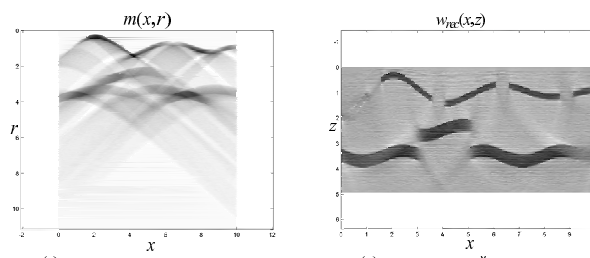
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основной результат работы. В идеализированной двумерной модели подповерхностного зондирования дано точное решение задачи восстановления пространственной плотности виртуальных “взрывающихся” источников по измеренным значениям нестационарного волнового поля на поверхности. Хотя в модели не учтены такие факторы как неоднородность и проводимость подповерхностной среды, отражение от границы раздела, эффекты трехмерного распространения, она является существенным уточнением стандартных алгоритмов миграции, позволяя количественно оценить размеры и интенсивность подповерхностных рассеивателей. Дальнейшее развитие модели предполагает использование борновского приближения и учет диаграммы направленности излучающей и приемной антенн, расположенных на границе двух сред.

С глубоким уважением и благодарностью за стимулирующие советы и благожелательное внимание к нашим работам авторы посвя-



(а) модельный источник (б) измеренное поле (в) поле единичной ступеньки тока.



(г) среднее по полуокругам (д) восстановленный источник

Рис. 7.

щают эту публикацию славному юбилею Василия Михайловича Бабича. Мы также благодарны В. В. Копейкину и П. А. Морозову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Гринев, *Вопросы подповерхностной радиолокации*. Радиотехника, М., 2005.
2. J. G. Hagedoorn, *A process of seismic reflection interpretation*. — *Geophys. Prospect* **2**, No. 1 (1954), 85–127.
3. Г. И. Петрашень, С. А. Нахамкин, *Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки*. Наука, Л., 1973.
4. J. F. Claerbout, *Toward a unified theory of reflector mapping*. — *Geophysics* **36**, No. 3 (1971), 467–481.
5. J. F. Claerbout, S. M. Doherty, *Downward continuation of moveout-corrected seismograms*. — *Geophysics* **37**, No. 5 (1972), 741–768.
6. J. F. Claerbout, *Imaging the Earth's Interior* Stanford University, Stanford, 1984.

7. J. Gazdag, *Wave-equation migration with the phase-shift method*. — Geophysics **43**, No. 12 (1978), 1342–1351.
8. R. H. Stolt, *Migration by Fourier transform*. — Geophysics **43**, No. 1 (1978), 23–48.
9. W. S. Schneider, *Integral formulation for migration in two or three dimensions*. — Geophysics **43**, No. 1 (1978), 49–76.
10. J. F. Claerbout, *Fundamentals of Geophysical Data Processing*. McGraw Hill, 1976.
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*. Наука, М., 1982.
12. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*. Мир, М., 1964.
13. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*. т. 1. Физматгиз, М., 1963.

Edemskii F. D, Popov A. V., Zapunidi S. A., Pavlovskii B. R. Exact solution of a model problem of subsurface sensing.

An inverse electromagnetic wave radiation problem simulating subsurface radio sensing is considered. We assume synchronous external currents emerging in the subsurface medium with unknown spatial density. As shown, its distribution can be found from the pulsed radiation waveforms measured along the border of the examined half-space. In a model formulation, the problem is reduced to the reconstruction of a 2D function from its integrals over a set of semicircles. An explicit solution of that tomographic problem is found by means of Darboux equation. Numerical examples are given.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения
радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН,
142190 Троицк Московской обл.,
ИЗМИРАН, Россия

Поступило 30 августа 2009 г.

E-mail: popov@izmiran.ru

Институт физической диагностики и
моделирования 113054 Москва,
ул. Бахрушина, 13/2, стр. 3,
ИФДМ, Москва, Россия

E-mail: pavlovskii@ifdm.ru