Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 380, 2010 г.

М. И. Белишев

О РЕКОНСТРУКЦИИ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ ПО ГРАНИЧНЫМ ДАННЫМ: ТЕОРИЯ И ПЛАН ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

0. О работе

В работе расматривается обратная задача, состоящая в восстановлении риманова многообразия по его граничным данным. Эта задача решена методом граничного управления (см [3, 6]), причем к настоящему моменту имеется несколько вариантов ее решения. Здесь предлагается еще одна версия процедуры, восстанавливающей многообразие по скалярным спектральным и динамическим данным. Особенности, мотивирующие ее появление состоят в следующем:

- эта версия является простейшей по привлекаемым средствам: мы не используем геометрическую оптику, полярное представление операторов и др., обходясь одним лишь свойством управляемости соответствующей динамической системы
- без каких-либо изменений она приложима к существенно более сложной (векторной) задаче электродинамики для системы Максвелла (см [7])
- простота предлагаемой процедуры дает дополнительные шансы на ее численную реализацию.

В конце статьи обсуждается план численного эксперимента. Привлечь внимание к открывающимся здесь возможностям – одна из главных целей работы.

1. Геометрия

1.1. Многообразие. Пусть Ω есть гладкое компактное риманово многообразие с краем $\Gamma := \partial\Omega$; $\dim \Omega = n \geq 2$; d и g суть расстояние и метрический тензор в Ω.

Ключевые слова: восстановление многообразий и метрик, спектральные данные, оператор реакции, BC-метод.

Для подмножества $A \subset \Omega$, через

$$\Omega^r[A] := \{x \in \Omega \mid d(x, A) < r\}, \quad r > 0;$$

обозначим его метрическую окрестность радиуса r. В случае $A = \Gamma$, примем

$$\Omega^r := \Omega^r[\Gamma] = \{x \in \Omega \mid d(x, \Gamma) < r\}.$$

Отметим очевидное равенство: для подмножеств $A, B \subset \Omega$ выполнено

$$d(A, B) = \inf\{r > 0 \mid \Omega^r[A] \cap \Omega^r[B] \neq \varnothing\}. \tag{1.1}$$

Функция $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, определенная равенством

$$\tau(x) := d(x, \Gamma), \quad x \in \Omega \tag{1.2}$$

называется *эйконалом*. В динамике (см. ниже), величина

$$T_* := \max_{\Omega} \tau(\,\cdot\,) = \inf\{r > 0 \mid \Omega^r = \Omega\} \tag{1.3}$$

имеет смысл времени, за которое волны, идущие от границы Γ с единичной скоростью, заполняют все Ω.

Поверхности уровня эйконала

$$\Gamma^s := \{x \in \Omega \mid \tau(x) = s\}, \quad s \geq 0$$

суть эквидистанты границы Γ.

1.2. Множество раздела. Приведем определение множества раздела многообразия относительно его границы (см., например, [8]). Пусть $l_\gamma[0, s]$ есть отрезок длины s геодезической l_γ, исходящей из $\gamma \in \Gamma$ нормально к Γ; пусть $x(\gamma, s)$ – второй конец отрезка. Величина $\tau_*(\gamma)$ называется *критической длиной*, если $\tau(x(\gamma, s)) = s$ при $0 \leq s \leq \tau_*(\gamma)$ (т.е. $l_\gamma[0, s]$ минимизирует расстояние от $x(\gamma, s)$ до Γ) и $\tau(x(\gamma, s)) < s$ при $s > \tau_*(\gamma)$ (т.е. $l_\gamma[0, s]$ не минимизирует этого расстояния; см. иллюстрацию на рис. 1, где $s < \tau_*(\gamma) < s'$). Отметим, что функция $\tau_*(\,\cdot\,)$ непрерывна на Γ [8].

Точка $x(\gamma, \tau_*(\gamma))$ есть *точка раздела* на геодезической l_γ. Множество точек раздела

$$c := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} x(\gamma, \tau_*(\gamma))$$

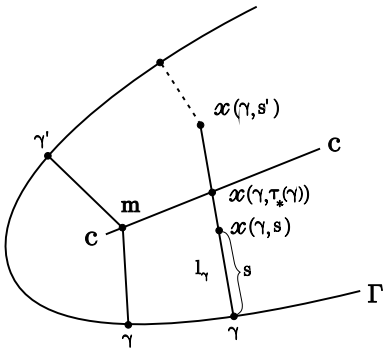

Рис. 1.

называется множеством раздела (*cut locus*) многообразия Ω относительно его края Γ.

Имеется другой способ ввести cut locus. Скажем, что точка $m \in \Omega$ является *кратной*, если она соединяется с Γ более чем одной кратчайшей геодезической (см. рис. 1, на котором $x(\gamma, s) = x(\gamma', s) = m$ и $s = \tau(m) = \tau_*(\gamma) = \tau_*(\gamma')$). Обозначим через c_0 множество кратных точек и примем

$$c := \overline{c}_0.$$

Это определение эквивалентно первому: см [9].

Cut locus – "маленькое" множество: из непрерывности функции τ_* легко следует $\operatorname{vol} c = 0$.

Добавим, что множество $\Gamma^s \backslash c$ есть гладкая (возможно, несвязная) гиперповерхность в Ω. Если $s < d(c, \Gamma)$, то Γ^s является гладкой и диффеоморфной границе Γ.

ПГК. Как следует из определений, для любой $x \in \Omega \backslash c$ имеется единственная точка $\gamma(x) \in \Gamma$ ближайшая к x. В этом случае пара $(\gamma(x), \tau(x))$ называется *полугеодезическими координатами* (пгк) точки x. Если $\gamma^1, \ldots, \gamma^{n-1}$ суть локальные координаты в окрестности $\sigma \subset \Gamma$ точки $\gamma(x)$, то функции $\gamma^1(\gamma(\cdot)), \ldots \gamma^{n-1}(\gamma(\cdot)), \tau(\cdot)$ составляют координатную систему в "трубке" $\{x \in \Omega \,|\, \gamma(x) \in \sigma,\ 0 \le \tau(x) < \tau_*(\gamma(x))\}$.

Множество

$$\begin{aligned}\Theta &:= \{(\gamma(x), \tau(x)) \mid x \in \Omega \backslash c\} \\ &= \{(\gamma, s) \mid \gamma \in \Gamma,\ 0 \le s < \tau_*(\gamma)\} \subset \Gamma \times [0, T_*]\end{aligned}$$

называется *выкройкой* многообразия Ω, а

$$\theta := \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (\gamma, \tau_*(\gamma)) \subset \Gamma \times [0, T_*]$$

– ее *берегом*. Берег есть график функции τ_*: см рис 2[1].

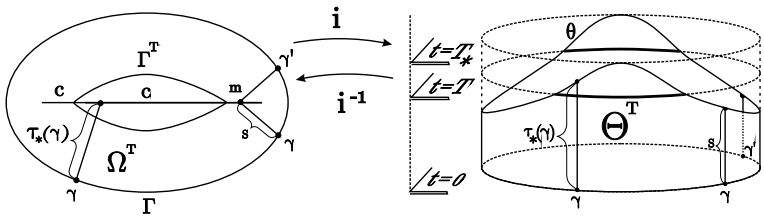

Рис. 2. Выкройка.

Отображение $i : \Omega\backslash c \to \Theta$,

$$i(x) := (\gamma(x), \tau(x))$$

есть диффеоморфизм[2]. Обратное к нему i^{-1} отображает Θ на $\Omega\backslash c$ по правилу

$$i^{-1}((\gamma, \tau)) = x(\gamma, \tau)$$

и может быть расширено на $\Theta \cup \theta$ по тому же правилу. В последующем мы имеем дело с расширенным i^{-1}; оно отображает $\Theta \cup \theta$ в Ω непрерывно, сюрръективно, но не инъективно. Как легко видеть, для двух точек $(\gamma, s), (\gamma', s') \in \Theta \cup \theta$ равенство

$$i^{-1}((\gamma, s)) = i^{-1}((\gamma', s')) \quad (= m \in c) \tag{1.4}$$

справедливо в том и только в том случае, если они лежат на берегу θ, удовлетворяют условию $s = s' = \tau(m)$, и их общий образ m есть кратная точка (см. рис. 2).

[1] Иллюстрации рис 2, 3 взяты из работы [6]

[2] здесь Θ рассматривается как часть гладкого многообразия $\Gamma \times [0, T_*]$.

1.4. Шапочки.

Выберем $\gamma \in \Gamma$, $s > 0$ и (малое) $\varepsilon > 0$; пусть $\sigma_\varepsilon(\gamma) := \{\gamma' \in \Gamma |\ d(\gamma', \gamma) < \varepsilon\}$ есть часть границы. Назовем подобласть

$$\begin{aligned} \omega^\varepsilon_{\gamma,s} &:= \left\{\Omega^s \backslash \Omega^{s-\varepsilon}\right\} \bigcap \Omega^s\left[\sigma_\varepsilon(\gamma)\right] = \\ &= \{x \in \Omega \mid d\left(x, \sigma_\varepsilon(\gamma)\right) < s,\ \ s - \varepsilon \le \tau(x) < s\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

шапочкой и отметим свойство монотонности: $\omega^\varepsilon_{\gamma,s} \subset \omega^{\varepsilon'}_{\gamma,s}$ при $\varepsilon < \varepsilon'$. Введем множество

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega^\varepsilon_{\gamma,s} := \bigcap_{0<\varepsilon<s} \overline{\omega}^\varepsilon_{\gamma,s}$$

и напомним, что $x(\gamma, s)$ определено в разделе 1.2. Следующий результат описывает поведение шапочек при $\varepsilon \to 0$ (см. [6, Lemma 1]).

Предложение 1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega^\varepsilon_{\gamma,s} = \begin{cases} x(\gamma, s) & \text{if} \quad s \le \tau_*(\gamma) \\ \varnothing & \text{if} \quad s > \tau_*(\gamma)\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

Таким образом, для заданных $\gamma \in \Gamma$ и $s > 0$ имеет место альтернатива;

- либо шапочка $\omega^\varepsilon_{\gamma,s}$ стягивается к точке $x(\gamma, s)$, что выполняется в случае $(\gamma, s) \in \Theta \cup \theta$
- либо $\omega^\varepsilon_{\gamma,s}$ обрывается (исчезает при достаточно малых ε), что выполняется в случае $(\gamma, s) \notin \Theta \cup \theta$

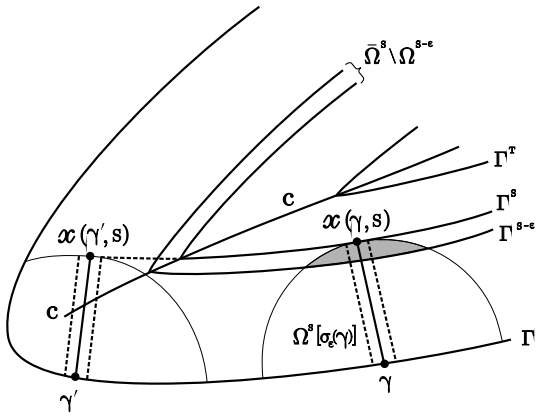

Рис. 3. Шапочка.

(см рис 3, на котором $\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ затенена и выполнено $\tau_*(\gamma) > s > \tau_*(\gamma')$). Такое поведение шапочек приводит к следующим очевидным фактам, которые будут использованы при решении обратной задачи.

Corollary 1. *Точка $(\gamma, s) \in \Gamma \times [0, \infty)$ принадлежит выкройке $\Theta \cup \theta$ если и только если при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение*

$$\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s} \neq \varnothing\,; \tag{1.7}$$

в этом случае выполняется неравенство $s \leq \tau_*(\gamma)$. Если же $\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s} = \emptyset$ начиная с некоторого (малого) $\varepsilon > 0$, то имеем $(\gamma, s) \notin \Theta \cup \theta$ и, соответственно, выполнено $s > \tau_*(\gamma)$.

Corollary 2. *Для любой пары точек $(\gamma, s), (\gamma', s') \in \Theta \cup \theta$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} d\left(x(\gamma, s), x(\gamma', s')\right) &= \lim_{\varepsilon \to 0} d(\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s}, \omega^{\varepsilon}_{\gamma',s'}) = \langle see\,(1.1)\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \left\{ r > 0 \mid \Omega^r[\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s}] \cap \Omega^r[\omega^{\varepsilon}_{\gamma',s'}] \neq \varnothing \right\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.5. Многообразие $\widetilde{\Theta}$. На выкройке $\Theta \cup \theta$ определим фунцию пары точек

$$\widetilde{d}\left((\gamma, s), (\gamma', s')\right) := d\left(x(\gamma, s), x(\gamma', s')\right), \tag{1.9}$$

после чего отождествим точки по правилу

$$(\gamma, s) \equiv (\gamma', s') \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{d}\left((\gamma, s), (\gamma', s')\right) = 0\,.$$

Как нетрудно видеть, такое отождествление приведет к склейке выкройки по ее берегу, причем склеиваться будут те (и только те) точки θ, которые составляют прообраз кратной точки при отображении i^{-1}: см. (1.4). Полученное множество обозначим $\widetilde{\Theta}$; на нем определена функция $\widetilde{d}$. Последняя, в силу ее определения (1.9), является метрикой, превращающей $\widetilde{\Theta}$ в метрическое пространство, *изометричное* многообразию Ω (как метрическому пространству). Удобно рассматривать $\widetilde{\Theta}$ как изометрическую копию исходного многообразия; именно эта копия будет построена по данным обратной задачи.

2. Динамика

2.1. Система α^T. Рассмотрим начально – краевую задачу вида

$$u_{tt} - \Delta_g u = 0 \quad \text{in} \quad \{\Omega \backslash \Gamma\} \times (0,T) \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.2}$$

$$u = f \quad \text{on} \quad \Gamma \times [0,T]\,, \tag{2.3}$$

в которой Δ_g – (скалярный) оператор Бельтрами–Лапласа, $t = T$ – конечный финальный момент времени, f – граничное управление, $u = u^f(x,t)$ – решение. Последнее описывает волну, инициированную граничными источниками и распространяющуюся от Γ вглубь Ω.

Задача (2.1)–(2.3) определяет динамическую систему, ассоциированную с многообразием Ω; ниже мы обозначаем ее α^T и снабжаем стандартными атрибутами теории систем – пространствами и операторами.

Внешнее пространство.

Пространство управлений $\mathcal{F}^T := L_2(\Gamma \times [0,T])$ со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathcal{F}^T} = \int\limits_{\Gamma \times [0,T]} f(\gamma,t)\, g(\gamma,t)\, d\Gamma dt$$

называется *внешним*. Оно содержит расширяющееся семейство подпространств

$$\mathcal{F}^{T,\xi} := \left\{ f \in \mathcal{F}^T \mid f|_{0 \le t < T-\xi} = 0 \right\}, \quad 0 \le \xi \le T\,,$$

образованных запаздывающими управлениями; параметр ξ имеет смысл времени действия управлений, $T - \xi$ есть величина задержки.

Также введем класс гладких управлений

$$\mathcal{M}^T := \{ f \in C^\infty(\Gamma \times [0,T]) \mid \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0,T] \}$$

и его подкласс

$$\mathcal{M}_0^T := \left\{ f \in \mathcal{M}^T \mid f|_{t=T} = 0 \right\}.$$

Отметим, что в силу определений каждое $f \in \mathcal{M}^T$ аннулируется вблизи $t = 0$. При $f \in \mathcal{M}^T$ задача (2.1)–(2.3) имеет единственное классическое (C^∞ - гладкое) решение u^f. Первоначально определенное на

$\mathcal{M}^T$, отображение $f \mapsto u^f$ действует непрерывно из $\mathcal{F}^T$ в пространство $C([0,T], L_2(\Omega))$ (I. Lasiecka, J-L. Lions, R. Triggiani, 1986). Поэтому его можно расширить на $\mathcal{F}^T$ по непрерывности. В дальнейшем это расширение предполагается выполненным, а его образы рассматриваются как *обобщенные решения* задачи (2.1)–(2.3).

Внутреннее пространство. В теории управления решение u^f рассматривается как *траектория* системы α^T, в то время как $u^f(\,\cdot\,,t)$ есть *состояние* в момент t. Пространство $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(y,v)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\Omega} y(x)\,v(x)\,d\Omega$$

называется *внешним*; волны (состояния) $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть его элементы.

Внутреннее пространство содержит расширяющееся семейство подпространств

$$\mathcal{H}^\xi := \operatorname{clos}\{y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} y \subset \Omega^\xi\}\,, \quad 0 \le \xi \le T_*\,.$$

В силу известного свойства конечности области влияния в (гиперболической) задаче (2.1)–(2.3) имеем $\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,t) \subset \overline{\Omega}^t$ или, равносильно,

$$u^f(\,\cdot\,,t) \in \mathcal{H}^t\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{2.4}$$

Это соотношение соответствует физическому факту: волны в Ω распространяются с единичной скоростью.

Оператор управления. Соответствие “вход $\to$ состояние” в системе α^T реализуется *оператором управления* $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}$,

$$W^T f := u^f(\,\cdot\,,T),$$

который является ограниченным.

Оператор реакции. Соответствие “вход $\to$ выход” описывается *оператором реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \mathcal{M}^T$,

$$R^T f := \left.\frac{\partial u^f}{\partial \nu}\right|_{\Gamma\times[0,T]},$$

где ν есть внешняя нормаль к границе. Этот оператор неограничен и может быть расширен на класс Соболева $\{f \in H^1(\Gamma \times [0,T]) \mid f|_{t=0} = 0\}$.

Отметим известное свойство оператора реакции: его зависимость от метрики *локальна* в следующем смысле. При фиксированном $T > 0$ оператор R^T вполне определяется не всем многообразием, а лишь его частью $\Omega^{\frac{T}{2}}$, заметаемой волнами к моменту $t = \frac{T}{2}$. При этом R^T не содержит никакой информации об $\Omega \setminus \Omega^{\frac{T}{2}}$. Физический смысл сказанного вполне прозрачен. Внешний наблюдатель, производящий измерения на границе, регистрирует волны u^f, которые движутся вглубь Ω от Γ, отражаются от неоднородностей и возвращаются обратно к Γ, неся информацию о неоднородностях. Поскольку скорость волн равна 1, во временном интервале $[0, T]$ наблюдатель зарегистрирует лишь волны, отраженные от глубин не более $\frac{T}{2}$, в то время как волны от неоднородностей в $\Omega \setminus \Omega^{\frac{T}{2}}$ вернуться к границе в указанный интервал не успеют и зарегистрированы не будут. Из сказанного, в соответствии с (1.3), следует, что для получения информации о *всем многообразии* наблюдатель должен использовать интервал $[0, T]$ с $T \geq 2T_*$.

Связывающий оператор. Центральным объектом BC-метода является т.н. *связывающий оператор* $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $C^T := (W^T)^* W^T$. Из определения имеем:

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}} = \big(u^f(\,\cdot\,, T), u^g(\,\cdot\,, T)\big)_{\mathcal{H}}\,, \tag{2.5}$$

т.е. C^T связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Важный факт, определяющий его роль в обратных задачах, состоит в том, что связывающий оператор явно и просто выражается через оператор реакции.

Предложение 2. *Справедливо представление*

$$C^T = \frac{1}{2}\,(S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T\,,$$

в котором отображение $S^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{2T}$ *продолжает управления с* $\Gamma \times [0, T]$ *на* $\Gamma \times [0, 2T]$ *как нечетные функции от* t *относительно* $t = T$; $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$, $(J^{2T} f)(\,\cdot\,, t) := \int\limits_0^t f(\,\cdot\,, s)\, ds$ *– интегрирование;* R^{2T} *– оператор реакции системы* α^{2T}, *отвечающей задаче* (2.3) *с финальным мометном* $t = 2T$.

(Вывод см. в [3, 4]).

2.2. Управляемость.

Пусть $\sigma \subset \Gamma$ есть открытое подмножество границы; множество

$$\mathcal{U}^{\xi}_{\mathrm{reach}}[\sigma] := \left\{ W^T f \mid f \in \mathcal{F}^{T,\xi};\ \operatorname{supp} f(\,\cdot\,,t) \subset \sigma,\ 0 \le t \le T \right\}$$

называется *достижимым* (с σ, за время ξ). Таким образом, достижимое множество составляют волны $u^f(\,\cdot\,,T)$, инициированные управлениями, действующими с части границы σ, причем время действия равно ξ. Его замыкание (в $\mathcal{H}$)

$$\mathcal{U}^{\xi}[\sigma] \ := \ \operatorname{clos} \mathcal{U}^{\xi}_{\mathrm{reach}}[\sigma]$$

мы называем *достижимым подпространством.* Для краткости обозначаем $\mathcal{U}^{\xi}[\Gamma] =: \mathcal{U}^{\xi}$.

Для произвольного измеримого подмножества $A \subset \Omega^T$ определим подпространство

$$\mathcal{H}\langle A \rangle \ := \ \operatorname{clos} \{ y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{supp} y \subset A \} .$$

По конечности скорости распространения, каждая входящая в $\mathcal{U}^{\xi}_{\mathrm{reach}}[\sigma]$ волна локализована в метрической окрестности $\Omega^{\xi}[\sigma]$. Следовательно, имеем вложение

$$\mathcal{U}^{\xi}_{\mathrm{reach}}[\sigma] \subset \mathcal{H}\langle \Omega^{\xi}[\sigma] \rangle . \tag{2.6}$$

Строение достижимых множеств и подпространств, а также характер вложения (2.6) составляют предмет теории граничного управления. Для наших целей следующий результат этой теории играет ключевую роль.

Предложение 3. *Для любых $\sigma \subset \Gamma$ и $\xi > 0$ справедливо соотношение*

$$\mathcal{U}^{\xi}[\sigma] \ = \ \mathcal{H}\langle \Omega^{\xi}[\sigma] \rangle . \tag{2.7}$$

Доказательство см в [6]; вывод (2.7) основан на фундаментальной теореме Хольмгрена–Йона–Татару о единственности продолжения решеий волнового уравнения через нехарактеристическую поверхность.

Приведенный результат показывает, что достижимые множества достаточно богаты: они плотны в подпространстве функций, локализованных в подобласти, заметаемой волнами. В теории управления

свойство (2.7) интерпретируется как *локальная граничная управляемость* системы α^T. С ростом ξ заметенная подобласть расширяется; поэтому

$$\mathcal{U}^\xi[\sigma] \;=\; \mathcal{H}\,, \quad \xi \geq \operatorname{diam}\Omega$$

для любого σ, а при $\sigma = \Gamma$, в силу определения величины (1.3), имеем

$$\mathcal{U}^T \;=\; \mathcal{H}\,, \quad T \geq T_*. \tag{2.8}$$

2.3. Волновые базисы.

Важное следствие управляемости, используемое в обратных задачах – существование базисов, состоящих из волн.

Введем подпространство

$$\mathcal{F}^{T,\,\xi}[\sigma] := \operatorname{clos}\left\{f \in \mathcal{F}^{T,\,\xi} \mid \operatorname{supp} f(\,\cdot\,,t) \subset \sigma,\ 0 \leq t \leq T\right\}$$

(замыкание в $\mathcal{F}^T$) управлений, действующих с σ и выберем систему $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ полную в нем. Соответствующая система волн $\{u^{f_j}(\,\cdot\,,T)\}_{j=1}^\infty$, очевидно, полна в подпространстве $\mathcal{U}^\xi[\sigma]$, а в силу (2.7), полна в $\mathcal{H}\langle\Omega^\xi[\sigma]\rangle$. Если при этом выбрать управления так, чтобы выполнялись соотношения C^T-ортогональности

$$(C^T f_i, f_j)_{\mathcal{F}^T} \;=\; \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots\,,$$

то в силу (2.5) волны $u^{f_j}(\,\cdot\,,T)$ составят ортонормированный базис в $\mathcal{H}\langle\Omega^\xi[\sigma]\rangle$. Такой базис мы называем *волновым*; порождающие его управления обозначаем через $f_j^{\sigma,\xi}$, а сами волны – через $u_j^{\sigma,\xi} := W^T f_j^{\sigma,\xi}$. Как и всюду выше, в случае полной границы индекс, указывающий подмножество, опускается: $f_j^{\Gamma,\xi} =: f_j^\xi$, $u_j^{\Gamma,\xi} =: u_j^\xi$. Таким образом, имеем

$$\begin{gathered}(C^T f_i^{\sigma,\xi}, f_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{F}^T} \;=\; (u_i^{\sigma,\xi}, u_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{H}} \;=\; \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots;\\ \bigvee\{u_j^{\sigma,\xi}\}_{j=1}^\infty = \mathcal{H}\langle\Omega^\xi[\sigma]\rangle\,,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\bigvee$ – замыкание линейной оболочки (в $\mathcal{H}$).

В силу равенства (2.7), ортогональный проектор в $\mathcal{H}$

$$P^{\sigma,\xi} \;:=\; \sum_{j=1}^\infty (\,\cdot\,, u_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{H}}\, u_j^{\sigma,\xi}\,,$$

построенный по волновому базису, совпадает с проектором на $\mathcal{H}\langle\Omega^\xi[\sigma]\rangle$. Действие последнего сводится к срезке функций на подобласть $\Omega^\xi[\sigma]$, заметенную волнами, идущими от σ. Таким образам, для $y \in \mathcal{H}$ имеем:

$$P^{\sigma,\xi} y \;:=\; \sum_{j=1}^{\infty} (y, u_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{H}}\, u_j^{\sigma,\xi} \;=\; \begin{cases} y & \text{in} \quad \Omega^\xi[\sigma] \\ 0 & \text{in} \quad \Omega \setminus \Omega^\xi[\sigma]\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Отметим, что проекторы-срезки (2.10), отвечающие всевозможным $\sigma \subset \Gamma$ и $\xi \in [0,T]$, коммутируют между собой.

2.4. Индикаторы.

Через $1_A(\,\cdot\,)$ мы обозначаем *индикатор* (характеристическую функцию) множества $A \subset \Omega$:

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

пусть также $1 := 1_\Omega(\,\cdot\,)$ есть функция, всюду равная 1, а $1^\varepsilon_{\gamma,s} := 1_{\omega^\varepsilon_{\gamma,s}}(\,\cdot\,)$ – индикатор шапочки. В соответствии с определением последней (см. (1.5)), имеем представление

$$1^\varepsilon_{\gamma,s} \;=\; \left[P^s - P^{s-\varepsilon}\right] P^\varepsilon_{\gamma,s}\, 1\,, \tag{2.11}$$

в котором принято обозначение $P^\varepsilon_{\gamma,s} := P^{\sigma_\varepsilon(\gamma),\,s}$. Входящие в него проекторы P^s, $P^{s-\varepsilon}$ и $P^\varepsilon_{\gamma,s}$ суть срезки на подобласти Ω^s, $\Omega^{s-\varepsilon}$ и $\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ соответственно. Каждый из проекторов определяется волновым базисом, построенным по адекватной системе управлений: см (2.9). Это представление будет использовано при решении обратных задач.

Также мы используем нормированные индикаторы

$$\delta^\varepsilon_{\gamma,s} \;:=\; \frac{1}{\|1^\varepsilon_{\gamma,s}\|^2_{\mathcal{H}}}\, 1^\varepsilon_{\gamma,s} = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{vol}\omega^\varepsilon_{\gamma,s}} & \text{in} \quad \omega^\varepsilon_{\gamma,s} \\ 0 & \text{in}\ \Omega \setminus \omega^\varepsilon_{\gamma,s} \end{cases}$$

Из определений легко усматривается сходимость (в смысле распределений)

$$\delta^\varepsilon_{\gamma,s} \;\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\; \delta_{x(\gamma,s)}\,, \tag{2.12}$$

где $\delta_{x(\gamma,s)}$ есть мера Дирака, сосредоточенная в $x(\gamma,s)$.

Обратимся к Следствию 1 из раздела 1.4: для дальнейшего удобно привести его в такой очевидно равносильной форме.

Следствие 3. *Точка $(\gamma, s) \in \Gamma \times [0, \infty)$ принадлежит выкройке $\Theta \cup \theta$ если и только если при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение*

$$\|1^{\varepsilon}_{\gamma,s}\|_{\mathcal{H}} \neq 0\,; \tag{2.13}$$

в этом случае выполняется неравенство $s \leq \tau_*(\gamma)$. Если же $\|1^{\varepsilon}_{\gamma,s}\|_{\mathcal{H}} = 0$ начиная с некоторого (малого) $\varepsilon > 0$, то имеем $(\gamma, s) \notin \Theta \cup \theta$ и, соответственно, выполнено $s > \tau_*(\gamma)$.

2.5. Задача Коши.

Рассмотрим задачу

$$w_{tt} - \Delta_g w = 0 \quad \text{in} \quad \{\Omega \setminus \Gamma\} \times (0, \infty) \tag{2.14}$$

$$w|_{t=0} = y\,, \;\; w_t|_{t=0} = 0 \;\; \text{in} \quad \Omega \tag{2.15}$$

$$w = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times [0, T]\,, \tag{2.16}$$

в которой $y \in \mathcal{H}$. Ее решение $w = w^y(x, t)$ описывает волну, инициированную начальным возмущением скорости y и распространяющуюся в многообразии Ω, край которого жестко закреплен.

Фиксируем $(\gamma, s) \in \Theta \cup \theta$ и положим в (2.15) $y = \delta^{\varepsilon}_{\gamma,s}$; пусть $w^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ есть соответствующее решение. Последнее, в силу (2.12), при малых ε близко к решению, описывающему волну, порожденную точечным источником в $x(\gamma, s)$.

Пусть теперь (γ, s), $(\gamma', s') \in \Theta \cup \theta$ суть две точки выкройки, $w^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ и $w^{\varepsilon}_{\gamma',s'}$ – отвечающие им волны от "почти точечных" источников $\delta^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ и $\delta^{\varepsilon}_{\gamma',s'}$, локализованных в шапочках $\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ и $\omega^{\varepsilon}_{\gamma',s'}$ соответственно. Соотношение

$$\begin{aligned} & d\left(\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s}\,,\, \omega^{\varepsilon}_{\gamma',s'}\right) \\ & = 2 \inf \left\{ t > 0 \,\middle|\, \left(w^{\varepsilon}_{\gamma,s}(\,\cdot\,, t), w^{\varepsilon}_{\gamma',s'}(\,\cdot\,, t)\right)_{\mathcal{H}} \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

имеет прозрачный физический смысл: поскольку скорость распространения равна 1, волны от шапочек начинают взаимодействовать, пройдя половину расстояния между ними[3]: см. рис. 4.

[3]Отметим, что неравенство $d(\ldots) \leq 2\inf\{\ldots\}$ вполне очевидно, а равенство доказывается с использованием управляемости (2.7): см. [2].

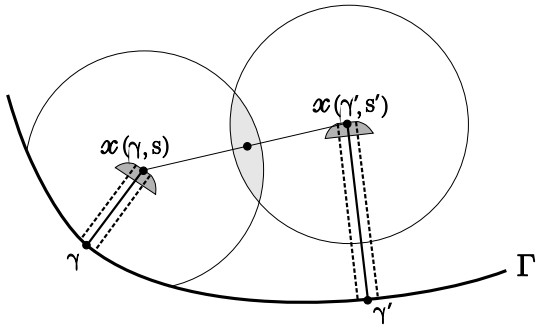

Рис. 4. Нахождение $\widetilde{d}$.

Из последнего сооотношения, с учетом (1.8) и определения метрики на выкройке (1.9), получаем представление, играющее ключевую роль в обратной задаче:

$$\begin{aligned} &\widetilde{d}\,((\gamma,s),(\gamma',s')) \\ &= 2\,\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\left\{t>0\,\middle|\,\left(w^{\varepsilon}_{\gamma,s}(\,\cdot\,,t),w^{\varepsilon}_{\gamma',s'}(\,\cdot\,,t)\right)_{\mathcal{H}}\neq 0\right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

3. Обратные задачи

3.1. Постановки.

Введем оператор $L:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, $\operatorname{Dom} L = H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$, действующий по правилу

$$Ly := -\Delta_g y\,.$$

Это самосопряженный положительно определенный оператор с чисто дискретным спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$: $0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots\to\infty$; соответствующие собственные функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$: $L\varphi_k=\lambda_k\varphi_k$, нормированные условиями $(\phi_k,\phi_l)=\delta_{kl}$, составляют базис пространства $\mathcal{H}$. Множество пар

$$\Sigma_\Omega := \left\{\lambda_k;\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

называется *спектральными данными* (Дирихле) многообразия Ω.

Спектральная обратная задача состоит в восстановлении многообразия Ω по его спектральным данным Σ_Ω.

Динамическая обратная задача состоит в восстановлении многообразия Ω по оператору реакции R^T, заданному при фиксированном $T \geq 2T_*$.

Отметим, что постановка динамической задачи адекватна свойству локальности оператора реакции, которое обсуждалось в разделе 2.1.

По поводу обеих задач следует уточнить, какой смысл вкладывается в требование "восстановить многообразие". Дело в том, что в указанных постановках их решение заведомо не единственно. В самом деле, пусть Ω и Ω' суть два изометричных многообразия с общим краем Γ, а $\beta : \Omega \to \Omega'$, $\beta|_\Gamma = \mathrm{id}$ – диффеоморфизм, реализующий изометрию. Легко видеть, что спектральные данные Σ_Ω и $\Sigma_{\Omega'}$ таких многообразий, отвечающие собственным базисам $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_k \circ \beta^{-1}\}$, идентичны, а операторы реакции совпадают: $R^T_\Omega = R^T_{\Omega'}$. В этой ситуации, для внешнего наблюдателя, извлекающего информацию о многообразии из измерений на Γ[4], Ω и Ω' в принципе не различимы. В силу сказанного, единственно адекватным является требование: *построить многобразие, обладающее предписанными данными.* Именно это и будет сделано в оставшейся части работы: по данным обратной задачи мы конструируем многообразие $\widetilde{\Theta}$, являющееся изометрической копией исходного Ω, т.е. *определяем Ω с точностью до изометрии.*

Отметим наперед, что решаться будет спектральная задача, а динамическая сводится к ней пересчетом данных.

3.2. Спектральное представление.

С соственным базисом Лапласиана L связано преобразование Фурье $U : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}} := l_2$,

$$Uy = \widetilde{y} := \{c_k\}_{k=1}^\infty, \quad c_k = (y, \varphi_k)_{\mathcal{H}};$$

элемент $\widetilde{y}$ мы называем (спектральным) образом функции y. Оператор U унитарен: он отображает $\mathcal{H}$ на $\widetilde{\mathcal{H}}$ и для любых $y, v \in \mathcal{H}$ выполнено

$$(y, v)_{\mathcal{H}} = (\widetilde{y}, \widetilde{v})_{\widetilde{\mathcal{H}}}. \tag{3.1}$$

Ниже перечисляются объекты в $\mathcal{H}$, образы которых определяются спектральными данными Σ_Ω. В ситуации обратной задачи эти образы

[4]Спектральные и динамические данные как раз и формализуют такие измерения.

могут быть найдены внешним наблюдателем и использованы для восстановления многообразия.

Волны u^f. Решая задачу (2.1)–(2.3) методом Фурье, ищем ее решение в виде ряда

$$u^f(\,\cdot\,,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^f(t)\ \varphi_k\,.$$

Стандартные вычисления дают:

$$c_k^f(t) = \int\limits_{\Gamma\times[0,t]} \left[\frac{\sin[\sqrt{\lambda_k}(t-s)]}{\sqrt{\lambda_k}}\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}(\gamma)\right] f(\gamma,s)\ d\Gamma ds\ .$$

Таким образом, имеем

$$u^f(\,\cdot\,,T) = W^T f = \sum_{k=1}^{\infty}(f,s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\ \varphi_k,$$

где

$$s_k^T = s_k^T(\gamma,t) := \frac{\sin[\sqrt{\lambda_k}(T-t)]}{\sqrt{\lambda_k}}\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}(\gamma).$$

Соответственно, спектральный образ волны есть

$$\widetilde{u}^f(T) = Uu^f(\,\cdot\,,T)\ =\ \{(f,s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\}_{k=1}^{\infty}. \tag{3.2}$$

Как видим, по заданному управлению $f\in\mathcal{F}^T$ внешний наблюдатель может найти спектральный образ волны u^f. При этом сама волна находится внутри Ω и для наблюдателя невидима.

Связывающий оператор. Для управлений $f,g\in\mathcal{F}^T$ имеем:

$$\begin{aligned}
&(C^T f,g)_{\mathcal{F}^T}\ =\ \langle\ \text{see}\ \ (2.5)\,\rangle = (u^f(\,\cdot\,,T),u^g(\,\cdot\,,T))_{\mathcal{H}}\\
&=\langle\ \text{see}\ \ (3.1)\,\rangle = (\widetilde{u}^f(T),\widetilde{u}^g(T))_{\mathcal{H}} = \langle see\,(3.2)\,\rangle\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}(f,s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\ (g,s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\ ,
\end{aligned}$$

откуда получаем представление

$$C^T = \sum_{k=1}^{\infty}(\,\cdot\,,s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\ s_k^T \tag{3.3}$$

в виде ряда, сходящегося в смысле сильной операторной сходимости (в $\mathcal{F}^T$). Таким образом, при любом $T > 0$ связывающий оператор C^T определяется данными Σ_Ω.

Проекторы. Обратимся к построениям в 2.3, связанным с волновым базисом. Выберем открытое подмножество $\sigma \subseteq \Gamma$ и зададим $\xi \in (0, T]$. В подпространстве $\mathcal{F}^{T,\,\xi}[\sigma]$ выберем полную C^T- ортогональную систему управлений $\{f_j^{\sigma,\xi}\}_{j=1}^\infty$ (см (2.9)). Отметим, что такой выбор возможен в ситуации обратной задачи, поскольку оператор C^T внешнему наблюдателю известен: см. (3.3). Используя (3.2), найдем образы волн, составляющих волновой базис:

$$\widetilde{u}_j^{\sigma,\xi} := Uu_j^{\sigma,\xi} = UW^T f_j^{\sigma,\xi} \in \widetilde{\mathcal{H}}$$

и построим образ волнового проектора

$$\widetilde{P}^{\sigma,\xi} := UP^{\sigma,\xi}U^* = \langle \text{ see (2.10)} \rangle = \sum_{j=1}^\infty (\,\cdot\,, \widetilde{u}_j^{\sigma,\xi})_{\widetilde{\mathcal{H}}}\, \widetilde{u}_j^{\sigma,\xi}. \tag{3.4}$$

Повторяя построение для $\sigma = \Gamma$ и $\sigma = \sigma_\varepsilon(\gamma)$, внешний наблюдатель может найти в $\widetilde{\mathcal{H}}$ спектральные образы проекторов

$$\widetilde{P}^s = UP^sU^*, \quad \widetilde{P}^{s-\varepsilon} = UP^{s-\varepsilon}U^*, \quad \widetilde{P}^\varepsilon_{\gamma,s} = UP^\varepsilon_{\gamma,s}U^* \tag{3.5}$$

(здесь $s \in (0, T]$), входящих в правую часть представления (2.11). По ним можно построить в $\widetilde{\mathcal{H}}$ проектор

$$U\left\{\left[P^s - P^{s-\varepsilon}\right] P^\varepsilon_{\gamma,s}\right\} U^* = \langle \text{ see (3.5)} \rangle = \left[\widetilde{P}^s - \widetilde{P}^{s-\varepsilon}\right] \widetilde{P}^\varepsilon_{\gamma,s}\,, \tag{3.6}$$

который является спектральным образом проектора, срезающего функции в Ω на шапочку $\omega^\varepsilon_{\gamma,s}$.

Индикаторы. Для функции $1(\,\cdot\,) \equiv 1$ интегрированием по частям легко находим ее спектральный образ:

$$\widetilde{1} = U1 = \{(1, \varphi_k)_{\mathcal{H}}\}_{k=1}^\infty = \left\{-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_\Gamma \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}\, d\Gamma\right\}_{k=1}^\infty, \tag{3.7}$$

который также определяется данными Σ_Ω. Вслед за ним, согласно (2.11) и (3.6), определяется образ индикатора шапочки $\omega^\varepsilon_{\gamma,s}$:

$$\widetilde{1}^\varepsilon_{\gamma,s} \;=\; \left[\widetilde{P}^s - \widetilde{P}^{s-\varepsilon}\right] \widetilde{P}^\varepsilon_{\gamma,s}\, \widetilde{1} \;\in \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{3.8}$$

причем по изометрии $\mathcal{H} \leftrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ имеем равенство

$$\|\widetilde{1}^\varepsilon_{\gamma,s}\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} \;=\; \|1^\varepsilon_{\gamma,s}\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.9}$$

Соответственно, для нормированного индикатора имеем:

$$\widetilde{\delta}^\varepsilon_{\gamma,s} = U\delta^\varepsilon_{\gamma,s} = \frac{1}{\|\widetilde{1}^\varepsilon_{\gamma,s}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}}}\, \widetilde{1}^\varepsilon_{\gamma,s} \quad \in \widetilde{\mathcal{H}}. \tag{3.10}$$

Соотношение (3.9) позволяет придать Следствию 3 следующую форму:

Следствие 4. *Точка $(\gamma, s) \in \Gamma \times [0,\infty)$ принадлежит выкройке $\Theta \cup \theta$ если и только если при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение*

$$\|\widetilde{1}^\varepsilon_{\gamma,s}\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} \;\neq\; 0; \tag{3.11}$$

в этом случае выполняется неравенство $s \le \tau_*(\gamma)$. Если же $\|\widetilde{1}^\varepsilon_{\gamma,s}\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} = 0$ начиная с некоторого (малого) $\varepsilon > 0$, то имеем $(\gamma, s) \notin \Theta \cup \theta$ и, соответственно, выполнено $s > \tau_*(\gamma)$.

Задача Коши. Решая задачу (2.14)–(2.16) методом Фурье, получаем известное представление

$$w^y(\,\cdot\,, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (y, \varphi_k)_{\mathcal{H}} \cos[\sqrt{\lambda_k}\, t]\; \varphi_k\,.$$

Если спектральный образ $\widetilde{y} = \{b_k\}_{r=1}^\infty \in \widetilde{\mathcal{H}}$ элемента $y \in \mathcal{H}$ задан, то имеем

$$w^y(\,\cdot\,, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos[\sqrt{\lambda_k}\, t]\; \varphi_k\,. \tag{3.12}$$

Для пары $\widetilde{y} = Uy = \{b_k\}_{r=1}^{\infty}, \widetilde{y}' = Uy' = \{b'_k\}_{r=1}^{\infty}$ по изометричности U получаем:

$$\Big(w^y(\,\cdot\,,t), w^{y'}(\,\cdot\,,t)\Big)_{\mathcal{H}} = \Big(\widetilde{w}^y(\,\cdot\,,t), \widetilde{w}^{y'}(\,\cdot\,,t)\Big)_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \langle \text{ see (3.12)}\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, b'_k\, \cos^2[\sqrt{\lambda_k}\, t]\,.$$

Используя последнее соотношение для нормированных индикаторов шапочек и их спектральных образов $\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma,s} = U\delta^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ и $\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma',s'} = U\delta^{\varepsilon}_{\gamma',s'}$, запишем представление (2.17) метрики на выкройке в виде

$$\widetilde{d}\,((\gamma,s),(\gamma',s'))$$
$$= 2\,\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\left\{t>0\,\Big|\,\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma,s}\Big]_k\,\Big[\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma',s'}\Big]_k\,\cos^2[\sqrt{\lambda_k}\,t]\neq 0\right\}, \tag{3.13}$$

где $\Big[\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma,s}\Big]_k$ и $\Big[\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma',s'}\Big]_k$ суть компоненты образов индикаторов. Это представление адекватно обратной задаче в том смысле, что его правая часть определяется спектральными данными.

3.3. Решение обратных задач.

Для решения задач достаточно подытожить предыдущие рассмотрения в форме следующей процедуры.

Спектральная задача. Располагая данными Σ_Ω, внешний наблюдатель может выполнить следующие операции[5].

Шаг 1 (*восстановление выкройки.*)

- Выберем $T>0$. В пространстве управлений $\mathcal{F}^T$ найдем связывающий оператор C^T по (3.3).
- Выберем $s\in(0,T]$; фиксируем $\varepsilon>0$. Выберем точку $\gamma\in\Gamma$. В подпространстве управлений $\mathcal{F}^{T,s}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$, действующих с окрестности $\sigma_\varepsilon(\gamma)\subset\Gamma$, выберем систему $\{f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}\}_{j=1}^{\infty}$ со свойствами

$$\bigvee\{f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{F}^{T,s}[\sigma_\varepsilon(\gamma)];\;\; \Big(C^T f_i^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}, f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}\Big)_{\mathcal{F}^T}$$
$$= \delta_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots$$

[5]Значками $\triangleleft, \triangleright$ выделены комментарии к процедуре.

(т.е. полную в $\mathcal{F}^{T,s}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ и C^T-ортогональную).

$\triangleleft$ Напомним, что волны $u^{f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}}(\,\cdot\,,T)$, порождаемые такими управлениями, локализованы в подобласти $\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ и образуют базис подпространства $\mathcal{H}\langle\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]\rangle \subset \mathcal{H}$: см (2.9.). $\triangleright$

- Используя (3.2), найдем спектральные образы волн, составляющих волновой базис

$$\widetilde{u}^{f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}}(T) \;=\; \{(f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}, s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\}_{k=1}^{\infty} \in \widetilde{\mathcal{H}}\,.$$

$\triangleleft$ Отметим важное обстоятельство: в то время, как сами волны невидимы для внешнего наблюдателя, их спектральные образы находятся по данным обратной задачи вполне эффективно. $\triangleright$

По образам, согласно (3.4), построим проектор

$$\widetilde{P}^{\varepsilon}_{\gamma,s} \;:=\; \widetilde{P}^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\,\cdot\,,\;\widetilde{u}_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}\Big)_{\widetilde{\mathcal{H}}}\;\widetilde{u}_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma),s}\,.$$

$\triangleleft$ Он является спектральным образом проектора в $\mathcal{H}$, срезающего функции в Ω на подобласть $\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$, заметаемую волнами. $\triangleright$

- Проводя вполне аналогичные построения для всей границы (т.е. заменяя $\sigma_\varepsilon(\gamma)$ на Γ), найдем проекторы $\widetilde{P}^s$ и $\widetilde{P}^{s-\varepsilon}$, входящие в правую часть (3.6). Составим проектор $\Big[\widetilde{P}^s - \widetilde{P}^{s-\varepsilon}\Big]\,\widetilde{P}^{\varepsilon}_{\gamma,s}$.

$\triangleleft$ Проекторы $\widetilde{P}^s$, $\widetilde{P}^{s-\varepsilon}$ и $\Big[\widetilde{P}^s - \widetilde{P}^{s-\varepsilon}\Big]\,\widetilde{P}^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ суть спектральные образы проекторов в $\mathcal{H}$, срезающих функции в на подобласти Ω^s, $\Omega^{s-\varepsilon}$ и шапочку $\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ соответственно. $\triangleright$

- Определим спектральный образ $\widetilde{1} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ функции $1 \in \mathcal{H}$ по (3.7). Вслед за ним, согласно (3.8), определим образ индикатора шапочки $\widetilde{1}^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ и найдем его норму $\|\widetilde{1}^{\varepsilon}_{\gamma,s}\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}$.
- Устремляя ε к 0 и контролируя выполнение условия (3.11), определим, принадлежит ли точка $(\gamma,s) \in \Gamma \times [0,T]$ выкройке.
- Варьируя $\gamma \in \Gamma$ и $s \in (0,T]$, восстановим часть выкройки $\{\Theta \cup \theta\} \cap \{\Gamma \times [0,T]\}$. Увеличивая при необходимости T, восстановим всю выкройку $\Theta \cup \theta$.

$\triangleleft$ Если, как это часто бывает в приложениях, известна априорная оценка $T_* \le c$, то можно с самого начала взять $T = c$ и восстановить всю выкройку сразу. $\triangleright$

Шаг 2 (*восстановление метрики.*)

- Имея в распоряжении выкройку, выберем пару ее точек (γ, s), $(\gamma', s') \in \Theta \cup \theta$; фиксируем (малое) $\varepsilon > 0$. Повторяя построения Шага 1, найдем в $\widetilde{\mathcal{H}}$ спектральные образы $\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ и $\widetilde{\delta}^{\varepsilon}_{\gamma',s'}$ нормированных индикаторов шапочек $\omega^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ и $\omega^{\varepsilon}_{\gamma',s'}$: см. (3.10).
- Найдем $\widetilde{d}\,((\gamma, s), (\gamma', s'))$ по (3.13).
- Отождествим (склеим) точки берега θ по правилу

$$(\gamma, s) \equiv (\gamma', s') \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{d}\,((\gamma, s), (\gamma', s')) = 0$$

(см раздел 1.5).

$\triangleleft$ Склеенная выкройка $\widetilde{\Theta}$, снабженная расстоянием $\widetilde{d}$, по построению является метрическим пространством, изометричным Ω с расстоянием d $\triangleright$.

Тем самым, задача о восстановлении исходного многообразия (с точностью до изометрии) решена.

Динамическая обратная задача сводится к решенной выше спектральной с помощью пересчета данных: оператор реакции R^T, заданный при фиксированном $T \geq 2T_*$, однозначно определяет спектральные данные Σ_Ω. Процедура пересчета предложена в [4] и наиболее подробно описана в работе [5]; краткое изложение см в [6]. В ее основе лежит следующий важный факт: связывающий оператор, используемый при построении C^T-ортогональных систем управлений (а, следовательно, спектральных образов проекторов, индикаторов и проч.) явно выражается через оператор реакции (см. Предложение 2).

3.4. О численном эксперименте.

Обсудим возможность численной реализации процедуры, предложенной выше.

В качестве теста (с $\dim \Omega = 2$) можно взять круг $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = R\}$ с обычной (евклидовой) метрикой. В этом случае приготовить надежные спектральные данные не составляет труда: разделением переменных дело сведется к вычислению значений Бесселевых функций, их производных и корней. Все операции процедуры программируются, если используемые ряды типа (3.4) и (3.13) заменять соответствующими частичными суммами, а при вычислении предела (3.13) ограничиться малыми $\varepsilon > 0$. Проводя процедуру, можно попытаться найти расстояние между малыми по размеру шапочками (см. рис. 4).

В случае успеха, можно рассмотреть более сложную задачу с внутренним препятствием (компонентой границы), когда шапочки не находятся в зоне прямой видимости друг друга: см. рис. 5. Эта ситуация имитирует нетривиальную топологию в Ω. Спектральные данные для концентрического кольца использовались в работе [1].

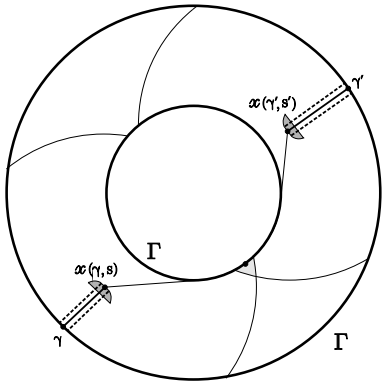

Рис. 5. Задача с препятствием.

Анализируя процедуру, нетрудно понять, что ее главным и наиболее трудновыполнимым фрагментом является построение последовательности индикаторов $\delta^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ (и их спектральных образов). Трудность состоит в том, что при построении необходимо использовать достаточно *богатые* системы управлений $\{f_j^{\sigma,s}\}$, локализованных на *малых* участках границы $\sigma \subset \Gamma$. С физической точки зрения, в соответствии с (2.12), вопрос сводится к подбору системы граничных управлений, обеспечивающих хорошую локализацию ("фокусировку") волн вблизи заданной точки $x(\gamma, s)$ многообразия. Чем лучше локализация, тем больше шансов на реализацию у формулы (2.17) и ее спектральной версии (3.13).

В связи с последним, задачу локализации целесообразно выделить и изучать отдельно, как (прямую) задачу граничного управления для системы (2.1)–(2.3). Можно попытаться выполнить численно построение индикаторов $\delta^{\varepsilon}_{\gamma,s}$ по волновым базисам, контролируя качество локализации в системе (2.1)–(2.3), т.е. решая последнюю каким-либо достаточно надежным методом: сеточной схемой, по Фурье и др.

Литература

1. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Управляемость в заполненной области для многомерного волнового уравнения с сингулярным управлением.* — Зап. науч. семин. ПОМИ, **210** (1993), 3–14.
2. М. И. Белишев, *К обоснованию правила Гюйгенса.* — Зап. науч. семин. ПОМИ, **218** (1994), 17–24.
3. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* Inverse Problems, **13(5)**, R1–R45 (1997).
4. M. I. Belishev, *On relations between spectral and dynamical inverse data.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems, 9, no. 6 (2001), 547–565.
5. М. И. Белишев, *О связи данных динамических и спектральных обратных задач.* — Зап. науч. семин. ПОМИ, **297** (2003), 30–48.
6. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method*, Inverse Problems, **23**, no. 5 (2007), R1–R67.
7. M. I. Belishev and M. N. Demchenko, *Time-optimal reconstruction of Riemannian manifold via boundary electromagnetic measurements*, Inverse Problems, **26** (2010), в печати.
8. D. Gromol, W. Klingenberg, and W. Meyer, *Riemannische Geometrie im Grossen*, Berlin, Springer (1968).
9. W. Klingenberg. *Riemannian geometry.* Series YB de Gruyer: Studies in Mathematics, vol. 1, 1982.

Belishev M. I. On reconstruction of Riemannian manifold via boundary data: theory and plan of numerical testing.

The paper deals with an inverse problem of reconstruction of a Riemannian manifold via its boundary data. This problem has been solved by the boundary control method, whereas at the moment there are a few variants of solving it. In the paper, one more version of the procedure, which recovers the manifold via the scalar spectral or dynamical data, is proposed. This version is a simplest one in regard to the devices in use: we do not enlist geometrical optics, polar representation of operators, etc, but get by with a controllability property of the relevant dynamical system. With no substantial changes, this version is applicable to more the complicated (vector) problem of electrodynamics for the Maxwell system. Simplicity of the proposed procedure provides additional chances for its numerical realizability. At the end of the paper, a plan of numerical experiment is discussed. To draw attention to such new options is one of the main aims of the paper.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: e-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 6 сентября 2010 г.