

А. А. Федотов

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ВКБ ДЛЯ АДИАБАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

1. ВВЕДЕНИЕ

Асимптотический подход, которому посвящен этот обзор, возник как инструмент, используемый при изучении спектра одномерного почти-периодического оператора Шредингера с двумя периодами, один из которых много больше второго. Он развивался в процессе работы над почти-периодической задачей и превратился в самостоятельный метод. Решение заниматься адиабатической задачей возникло под влиянием докладов и работ В. С. Буслаева (см., например, [2–9]), посвященных асимптотикам решений уравнения

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + (V(x) + W(\varepsilon x))\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где E – спектральный параметр, V – периодическая функция, $V(x+1) = V(x)$, а ε – малый параметр.

Можно сказать, что уравнение (1.1) возникает при адиабатическом возмущении периодического уравнения Шредингера. Анализ адиабатически возмущенных операторов – классическая задача математической физики. Уравнения вида (1.1) возникают в разных разделах физики. Например, в задачах квантовой физики твердого тела такое уравнение возникает как модель для блоховского электрона в кристалле, помещенном во внешнее электрическое поле [2]; в задачах астрофизики такие уравнения моделируют периодические движения, возмущенные присутствием массивных объектов [1]. При этом, внешнее возмущение описывается слагаемым W , меняющимся очень регулярно и медленно по сравнению с невозмущенной периодической системой.

Ключевые слова: периодический оператор Шредингера, адиабатическое возмущение, комплексный метод ВКБ.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00209_а и 07-01-92169-НЦНИ_а.

Опишем одно из идеологических наблюдений [2]. Для этого рассмотрим уравнение (1.1) с $V = 0$. После замены переменной $x \rightarrow \xi = \varepsilon x$ оно преобразуется к виду

$$-\varepsilon^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + W(\xi) \psi = E\psi, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Это – стандартный вид уравнения с квазиклассическим асимптотическим параметром ε . Асимптотики его решений вдоль оси x контролируются классическим методом ВКБ. Можно сказать, что этот метод позволяет описать поведение решений уравнения, возникающего при добавлении адиабатического возмущения $W(\varepsilon x)$ к оператору $-\frac{d^2}{dx^2}$.

Метод В. С. Буслаева является глубоким обобщением классического “вещественного” метода ВКБ (см., напр., главу 2 из [13]): он позволяет получать асимптотики вдоль оси x решений уравнения, возникающего при добавлении адиабатического возмущения $W(\varepsilon x)$ к периодическому оператору Шредингера

$$H_p \psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Обладая мощностью классического “вещественного” метода ВКБ, метод В. С. Буслаева имеет и аналогичные ограничения. За границами возможностей этих методов оказывается описание эффектов, порожденных туннелированием, связанным с комплексными точками поворота. Такие эффекты возникают, например, при исследовании надбарьерного туннелирования (невозможно вычислить экспоненциально малый коэффициент отражения) и при исследовании периодических внешних электрических полей W (для периодического оператора Шредингера классический метод не позволяет вычислить асимптотики длин спектральных лагун с большими номерами; эти длины экспоненциально малы при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Для уравнения (1.2) такие задачи решаются с помощью комплексного метода ВКБ, см., напр., [13]. Его идея состоит в изучении решений (1.2) на комплексной плоскости переменной ξ . Конечно, при этом предполагается, что W – аналитическая функция. За счет выхода в комплексную плоскость и удается исследовать экспоненциально малые величины, неконтролируемые классическим “вещественным” методом ВКБ. Часто с помощью комплексного метода ВКБ проще

получать и результаты “вещественного” метода. Так, можно избежать анализа относительно сложного поведения решений около вещественных точек поворота (если он не требуется постановкой задачи), обходя их в комплексной плоскости.

Мы опишем аналог комплексного метода ВКБ для исследования эффектов адиабатических возмущений периодического оператора Шредингера. Мы будем предполагать, что потенциал V является вещественнозначной 1-периодической функцией из класса $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, а W – функция аналитическая в некоторой полосе вида $S = \{\zeta \in \mathbb{C} : Y_1 < \text{Im} \zeta < Y_2\}$.

Наш метод предложен в работе [14]. Он развивался по мере исследования адиабатических почти-периодических операторов в работах [15, 16, 18, 20]. Наконец, в работе [17] был описан способ преодоления “геометрических” сложностей, возникающих при практическом использовании “адиабатического” комплексного метода ВКБ.

Хотя наш метод был развит для исследования почти-периодического оператора Шредингера, он готов для использования и начал успешно использоваться в работах [21, 23, 24, 26] для решения других типов задач.

Сначала мы напомним основные факты из теории периодического оператора Шредингера, затем сформулируем главную аналитическую теорему и опишем общую идеологию метода, а потом перейдем к описанию и анализу главных инструментов, используемых при практическом его применении.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

Здесь мы описываем основные результаты из теории периодического оператора Шредингера, используемые в комплексном методе ВКБ. Мы рассматриваем оператор Шредингера (1.3), действующий в $L^2(\mathbb{R})$.

В разделе 2.1 мы напоминаем классические результаты, а в разделе 2.2 мы обсудим мероморфный дифференциал, описываемый в рамках теории периодического оператора, но возникающий в адиабатическом подходе.

2.1. Известные факты

Доказательства результатов, описанных в этом параграфе, можно найти в [12, 22, 27] и [30].

2.1.1. Спектр и блоховские решения

1. Спектр оператора (1.3) состоит из интервалов

$$[E_1, E_2], [E_3, E_4], \dots [E_{2n+1}, E_{2n+2}], \dots$$

вещественной оси, таких что

$$E_1 < E_2 \leq E_3 < E_4 \dots E_{2n} \leq E_{2n+1} < E_{2n+2} \leq \dots \quad (2.1)$$

$$E_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.2)$$

Точки E_n , $n \in \mathbb{N}$, оказываются собственными значениями периодического оператора в $L^2(0, 2)$ с периодическими граничными условиями.

Интервалы $[E_{2n-1}, E_{2n}]$, $n \geq 1$, называются *спектральными зонами*, а интервалы (E_{2n}, E_{2n+1}) , $n \geq 1$, называются *спектральными лагунами*. Если $E_{2n} < E_{2n+1}$, то говорят, что n -ая лагуна *открыта*.

2. Пусть ψ – решение периодического уравнения Шредингера,

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.3)$$

удовлетворяющее соотношению

$$\psi(x+1) = \mu\psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

для некоторого $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, независящего от x . Такое решение называется *блоховским*, а число μ называется его *множителем Флоке*. Обсудим свойства блоховских решений как функций спектрального параметра.

Рассмотрим два экземпляра \mathcal{S}_\pm комплексной плоскости \mathbb{C} , разрезанной вдоль спектральных зон. Склеим их вместе вдоль спектральных зон так, чтобы у концов открытых лагун склейка происходила как при изготовлении Римановой поверхности квадратного корня. Будем обозначать полученную Риманову поверхность через \mathcal{S} .

Удобно называть концы E_n открытых лагун точками ветвления.

Можно сконструировать блоховское решение $\psi(x, E)$, нормированное условием $\psi(0, E) = 1$. Оно мероморфно на Римановой поверхности \mathcal{S} . Полюса этого решения расположены над открытыми спектральными лагунами или их концами. Более точно, на \mathcal{S} над замыканием каждой лагуны лежит ровно один полюс. Он может находиться

либо на \mathcal{S}_+ , либо на \mathcal{S}_- . Все полюса – простые. Их положение не зависит от x .

3. Пусть $E \in \mathcal{S}$ не является точкой ветвления. Обозначим через \widehat{E} вторую точку на \mathcal{S} , имеющую ту же проекцию на \mathbb{C} , что и E . Если E – точка ветвления, то будем считать, что $\widehat{E} = E$.

Положим

$$\widehat{\psi}(x, E) = \psi(x, \widehat{E}). \quad (2.5)$$

Функция $\widehat{\psi}$ – еще одно блоховское решение. При $E \notin \{E_l\}$ решения $\widehat{\psi}$ и ψ линейно независимы.

На спектральных лакунах оба блоховских решения принимают вещественные значения, на спектральных зонах они отличаются комплексным сопряжением.

2.1.2. Блоховский квазиимпульс

1. Множитель $\mu(E)$, соответствующий $\psi(x, E)$, аналитичен на \mathcal{S} . Его можно представить в виде

$$\mu(E) = \exp(ik(E)). \quad (2.6)$$

Функция k называется *блоховским квазиимпульсом*. Это – многозначная аналитическая функция E . Точки ветвления $k(E)$ совпадают с точками ветвления $\psi(x, E)$, но его Риманова поверхность сложнее.

Можно показать, что существует ветвь k аналитическая и однозначная на комплексной плоскости, разрезанной вдоль спектральных лакун.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, не содержащая точек ветвления квазиимпульса. Фиксируем на D однозначную аналитическую ветвь k . Обозначим ее через k_0 . Все остальные ветви k , однозначные и аналитические на D , связаны с k_0 формулами

$$k_{\pm, l}(E) = \pm k_0(E) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Знаки \pm и число l “нумеруют” эти ветви.

2. Чтобы описать основные свойства k , рассмотрим комплексную плоскость, разрезанную вдоль вещественной оси от E_1 до $+\infty$. Обозначим полученную область через \mathbb{C}_p . На ней можно фиксировать непрерывную вплоть до границы ветвь квазиимпульса, выделенную условием

$$-ik(E) > 0, \quad E < E_1. \quad (2.8)$$

Мы будем называть эту ветвь *главной* и обозначать через k_p .

Образ \mathbb{C}_p при отображении k_p расположен в верхней полуплоскости, образы верхней и нижней полуплоскостей \mathbb{C}_+ и \mathbb{C}_- симметричны относительно мнимой оси.

Функция k_p конформно отображает \mathbb{C}_+ на первый квадрант комплексной плоскости с вертикальными разрезами, начинающимися из точек πl , $l \in \mathbb{N}$.

Ветвь k_p вещественна и монотонна вдоль спектральных зон; для каждого $n \in \mathbb{N}$ интервал $[E_{2n-1}, E_{2n}]$ – n -ая спектральная зона – биективно отображается на интервал $[\pi(n-1), \pi n]$.

Образы открытых лагун – границы вертикальных разрезов. Вдоль открытых лагун вещественная часть $k_p(E)$ постоянна, а мнимая часть положительна и имеет один невырожденный максимум. Внутри n -ой лагуны $\operatorname{Re} k_p(E) = \pi n$.

На рис. 1, мы показываем несколько кривых на \mathbb{C}_p и их образы при отображении $E \mapsto k_p(E)$.

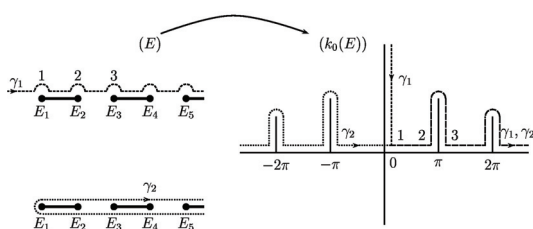


Рис. 1. Главная ветвь.

Все точки ветвления k_p являются точками ветвления как у квадратного корня: в достаточно малой окрестности точки ветвления (конца открытой лагуны) E_n ветвь k_p – (нечетная) аналитическая функция переменной $\sqrt{E - E_n}$ и

$$k_p(E) - k_p(E_n) = c_n \sqrt{E - E_n} + o(E - E_n), \quad c_n \neq 0. \quad (2.9)$$

2.1.3. Периодические компоненты блоховского решения

При данном значении E блоховское решение $\psi(x, E)$ может быть представлено в виде

$$\psi(x, E) = e^{ik(E)} x_p(x, E), \quad (2.10)$$

где $k(E)$ – квазиимпульс $\psi(x, E)$ в точке E , а функция $p(x, E)$ является 1-периодической по x . Функция p называется *периодической компонентой* ψ по отношению к $k(E)$. Поскольку $k(E)$ определен по модулю 2π , функция $p(x, E)$ определена с точностью до множителя $e^{2\pi imx}$, $m \in \mathbb{Z}$. Возможное преобразование p и k соответствует правилу:

$$k \rightarrow k + 2\pi m \iff p \rightarrow e^{-2\pi imx} p. \quad (2.11)$$

Положим

$$\widehat{k}(E) = -k(E), \quad \widehat{p}(x, E) = e^{-i\widehat{k}(E)x} \widehat{\psi}(x, E). \quad (2.12)$$

Функция \widehat{p} – периодическая компонента решения $\widehat{\psi}$, а \widehat{k} – его квазиимпульс.

2.2. Мероморфный дифференциал Ω

Здесь мы определим и изучим 1-форму, мероморфную на Римановой поверхности, связанной с оператором (1.3). Приведенные ниже результаты взяты из [15, 19] и [20].

2.2.1. Множества P и Q

Введем два множества точек на \mathcal{S} . Пусть P – множество полюсов $\psi(x, E)$, а Q – множество точек, где $k'(E) = 0$ (эти точки не зависят от выбора аналитической ветви k).

Напомним, что точки P находятся над открытыми лакунами или над их концами (по одной на лауну).

Из свойств главной ветви блоховского квазиимпульса следует, что $Q = \widehat{Q}$ и точки Q проектируются внутрь открытых лакун (по одной проекции на лауну).

2.2.2. Локальная конструкция функции ω и дифференциала Ω

Пусть $D \subset \mathcal{S} \setminus \{E_l\}$ – односвязная область. Фиксируем на D , аналитическую ветвь k квазиимпульса решения ψ . Фиксированные выбором этой ветви функции p и \widehat{p} мероморфны на D . Положим

$$\omega(E) = -\frac{\int_0^1 \widehat{p}(x, E) \frac{\partial p}{\partial E}(x, E) dx}{\int_0^1 \widehat{p}(x, E) p(x, E) dx} \quad \text{и} \quad \Omega(E) = \omega(E) dE. \quad (2.13)$$

Функция аналогичная ω возникла в конструкциях асимптотического метода В. С. Буслаева при построении решений (1.1). В комплексном адиабатическом методе ВКБ ее естественно рассматривать на римановой поверхности. Использование Ω вместо ω упрощает многие вычисления.

2.2.3. Свойства ω и Ω на римановой поверхности

С помощью (2.11) легко проверить, что ω и Ω не зависят от выбора ветви k и определены формулами (2.13) однозначно на $\mathcal{S} \setminus \{E_l\}$. Более того, имеет место

Лемма 2.1. Ω – мероморфный дифференциал на римановой поверхности \mathcal{S} . Все его полюса простые, они содержатся в $P \cup Q$. При этом

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_p \Omega = 1, \quad \forall p \in P \setminus Q, \quad \operatorname{res}_q \Omega = -1/2, \quad \forall q \in Q \setminus P, \\ \operatorname{res}_r \Omega = 1/2, \quad \forall r \in Q \cap P. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В приложениях часто используется следующее наблюдение.

Лемма 2.2. Вдоль открытых лагун ω принимает вещественные значения. Вдоль спектральных зон значения $\omega(E)$ и $\omega(\widehat{E})$ комплексно сопряжены.

2.2.4. Дифференциал Ω и блоховские решения

Сформулируем центральное свойство Ω . Рассмотрим односвязную область $D \subset \mathcal{S}$. Выберем $E_0 \in D \setminus (P \cup Q)$. В достаточно малой окрестности E_0 определим функцию

$$\Psi(x, E) = \sqrt{k'_E(E)} e^{\int_{E_0}^E \Omega} \psi(x, E). \quad (2.15)$$

Это – решение (2.3). Из леммы 2.1 немедленно вытекает, что Ψ аналитически продолжается на всю область D .

Замечание 2.1. Множитель, подобный $\sqrt{k'_E(E)} e^{\int_{E_0}^E \Omega}$, возник в методе Буслаева при построении анзаца решений (1.1) на вещественной оси. В нашей работе он появляется автоматически при построении аналитических по ζ решений (3.3).

3. ГЛАВНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

В разделе 3.1 мы напоминаем основные результаты классического комплексного метода ВКБ. В разделе 3.2 мы описываем идею расщепления быстрой и медленной переменных в (1.1), которая ведет к конструкциям “adiaбатического” комплексного метода ВКБ. В разделе 3.3 мы даем определения и описываем свойства основных аналитических и геометрических объектов метода. В разделе 3.4 мы даем формулировку основной аналитической теоремы метода, а в разделе 3.5 описываем схему ее использования для построения асимптотик решений в полосе аналитичности $\mathcal{D}(W)$ функции W .

Ниже, мы работаем на комплексной плоскости только в $\mathcal{D}(W)$.

3.1. Классический комплексный метод ВКБ

Начнем с некоторых предварительных замечаний, касающихся стандартной версии комплексного метода ВКБ для обыкновенных уравнений вида (1.2).

В комплексном методе ВКБ строятся решения, имеющие следующее *стандартное асимптотическое поведение*

$$\psi_{\pm}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\kappa(\xi)}} e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int^{\xi} \kappa(z) dz + o(1)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

на некоторых областях комплексной плоскости. В (3.1) κ – комплексный импульс – главный аналитический объект метода. Это – многозначная аналитическая функция переменной ξ , определяемая соотношением

$$\kappa^2 + W(\xi) = E, \quad (3.2)$$

т.е. символом уравнения (1.2).

Решения, имеющие стандартные асимптотики строятся на *канонических областях* на комплексной плоскости. Геометрические условия, выделяющие канонические области, определяются доказательством существования таких решений. Каноническими областями оказываются односвязные области, в которых нет точек ветвления комплексного импульса и такие, что через каждую их точку можно провести гладкую кривую, вдоль которой монотонно возрастает функция $\xi \mapsto \operatorname{Im} \int_{\xi_0}^{\xi} \kappa(\tilde{z}) d\tilde{z}$, где ξ_0 – точка канонической области (см., например, [13, 29]).

Описав канонические области, вычисляют матрицы перехода, связывающие базисы из решений со стандартным асимптотическим поведением на соседних канонических областях. Это позволяет получить глобальное асимптотическое описание решения со стандартным асимптотическим локальным поведением на заданной канонической области.

3.2. Расщепление быстрой и медленной переменных

3.2.1. Быстрая и медленная переменные

Обратимся к уравнению (1.1) с $V \neq 0$. Главная сложность для таких уравнений состоит в том, чтобы “расщепить” быструю переменную x и медленную переменную $\xi = \varepsilon x$. Идея метода Буслаева, см. [2], состоит в том, чтобы при построении решения рассматривать его как функцию двух независимых переменных (x, ξ) . Тогда, если ψ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$-\partial_x^2 \psi - 2\varepsilon \partial_{x\xi}^2 \psi - \varepsilon^2 \partial_{\xi\xi}^2 \psi + V(x, \xi)\psi = E\psi,$$

то функция $x \mapsto \psi(x, \varepsilon x)$ удовлетворяет (1.2).

При построении комплексного метода ВКБ мы используем новую идею: мы вводим в уравнение (1.2) вспомогательный параметр ζ так, что оно приобретает вид

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + (V(x) + W(\varepsilon x + \zeta)) \psi(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Параметр ζ берет на себя роль медленной переменной. Мы считаем, что W – аналитическая функция, и рассматриваем решения (3.3) аналитические по параметру ζ . Именно параметр ζ и становится комплексным.

Функция V входит в наш анализ только через объекты из спектральной теории периодического оператора (1.3), и регулярность этой функции оказывается не столь важной.

3.2.2. Условие согласованности

А priori, не имеется уравнения, которое контролировало бы зависимость решений (3.3) от ζ . Однако, оказывается, что имеется естественное дополнительное условие на решения, которое позволяет эффективно контролировать их зависимость от ζ и ведет к конструкциям, параллельным конструкциям традиционного комплексного метода ВКБ.

Будем говорить, что ψ – решение (3.3) – удовлетворяет условию *согласованности*, если

$$\psi_{\pm}(x+1, \zeta) = \psi_{\pm}(x, \zeta + \varepsilon). \quad (3.4)$$

Чтобы прояснить это условие, перейдем к переменным $z = \zeta/\varepsilon$, $t = x+z$ и положим $\tilde{\psi}(t, z) = \psi(x, \zeta)$. В терминах этих новых переменных уравнение (3.3) принимает вид

$$-\frac{d^2}{dt^2} \tilde{\psi} + (V(t-z) + W(\varepsilon t)) \tilde{\psi} = E \tilde{\psi}, \quad (3.5)$$

а (3.4) означает периодичность с периодом 1 (период V) решения по z :

$$\tilde{\psi}(t, z+1) = \tilde{\psi}(t, z).$$

Мы видим, что условию согласованности удовлетворяет решение задачи Коши для уравнения (3.5) с начальными условиями, независимыми от z .

3.3. Основные объекты комплексного метода ВКБ

Здесь мы определяем основные объекты “adiaбатического” комплексного метода ВКБ: комплексный импульс, канонические области и канонические Блоховские решения.

3.3.1. Комплексный импульс

Для уравнения (3.3) роль комплексного импульса играет

$$\kappa(\zeta) = k(E - W(\zeta)), \quad (3.6)$$

где $k(E)$ – блоховский квазиимпульс (1.3). Заметим, что (3.6) эквивалентно соотношению (сравните с (3.2))

$$\mathbb{E}(\kappa) + W(\zeta) = E, \quad (3.7)$$

где $\mathbb{E}(k)$ – дисперсионная функция периодического оператора Шредингера (1.3) – функция, обратная к $k(E)$. Тот факт, что κ играет центральную роль для задач с адиабатическим возмущением, известен давно, см., напр., [2].

Комплексный импульс можно интерпретировать как блоховский квазиимпульс для периодического уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, \zeta) + V(x)\psi(x, \zeta) = \mathcal{E}\psi(x, \zeta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

рассматриваемый как функция комплексного параметра ζ ,

$$\mathcal{E} = E - W(\zeta). \quad (3.9)$$

Из формулы (3.6) видно, что комплексный импульс – многозначная аналитическая функция, а его точки ветвления определяются по точками ветвления квазиимпульса соотношениями

$$E_l = E - W(\zeta), \quad l \in \mathbb{N}, \quad (3.10)$$

где E_l – концы открытых спектральных зон оператора H_p . Заметим, что при $E \in \mathbb{R}$ все точки ветвления комплексного импульса лежат на $W^{-1}(\mathbb{R})$, т.е. на прообразе вещественной оси относительно W .

Будем называть множество *регулярным*, если оно лежит в области аналитичности W , односвязно и не содержит точек ветвления κ .

Пусть D – регулярная область. Фиксируем на D аналитическую ветвь κ . Обозначим ее через κ_0 . В соответствии с (2.7) все остальные ветви κ , аналитические на D , описываются формулами:

$$\kappa_m^\pm = \pm \kappa_0 + 2\pi m, \quad (3.11)$$

в которых \pm и m нумеруют эти ветви.

Обсудим свойства комплексного импульса вблизи точки ветвления, скажем, ζ_0 . Из определения комплексного импульса и свойств блоховского импульса у концов спектральных зон следует, что при условии $W'(\zeta_0) \neq 0$ точка ζ_0 оказывается точкой ветвления как у квадратного корня: вблизи нее κ аналитичен по $\sqrt{\zeta - \zeta_0}$ и

$$\kappa(\zeta) - \kappa(\zeta_0) \sim \kappa_1 \sqrt{\zeta - \zeta_0}, \quad \kappa_1 \neq 0. \quad (3.12)$$

При использовании адиабатического комплексного метода ВКБ используется

Лемма 3.1. Пусть V – односвязная область, содержащая ζ_0 и не содержащая других точек ветвления. Пусть c – гладкая кривая, начинающаяся в ζ_0 и такая, что область $V \setminus c$ регулярна. В $V \setminus c$ фиксируем аналитическую ветвь квазиимпульса. Значения $\kappa_1(\zeta)$ и $\kappa_2(\zeta)$ этой ветви в $V \setminus c$ на разных берегах разреза связаны формулой:

$$\kappa_1(\zeta) + \kappa_2(\zeta) = 2\kappa(\zeta_0), \quad \zeta \in c. \quad (3.13)$$

3.3.2. Канонические блоховские решения

Для описания асимптотических формул адиабатического комплексного метода ВКБ, нам потребуются блоховские решения уравнения (3.8), аналитические по параметру ζ (введенному в уравнение согласно формуле (3.9)) на заданной регулярной области. Мы сконструируем их с помощью мероморфного дифференциала Ω , см. раздел 2.2.

Пусть ζ_0 – регулярная точка, а $E_0 = \mathcal{E}(\zeta_0)$. Предположим, что $E_0 \notin P \cup Q$. Пусть U_0 – достаточно малая окрестность E_0 , а V_0 – такая окрестность ζ_0 , что $\mathcal{E}(V_0) \subset U_0$. В U_0 мы фиксируем ветвь функции $\sqrt{k'(E)}$ и рассмотрим две ветви $\psi_{\pm}(x, E)$ блоховского решения $\psi(x, E)$ и соответствующие ветви Ω_{\pm} дифференциала Ω . Для $\zeta \in V_0$ положим

$$\Psi_{\pm}(x, \zeta) = q(\mathcal{E}) e^{\int_{\mathcal{E}_0}^{\mathcal{E}} \Omega_{\pm}} \psi_{\pm}(x, \mathcal{E}), \quad q(\mathcal{E}) = \sqrt{k'(\mathcal{E})}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(\zeta). \quad (3.14)$$

Функции Ψ_{\pm} называются *каноническими блоховскими решениями, нормированными в точке ζ_0* .

Из свойств дифференциала Ω , см. раздел 2.2.4, вытекает, что решения Ψ_{\pm} аналитически продолжаются из V_0 любую регулярную область D , содержащую ζ_0 .

В [15] мы доказали

Лемма 3.2. Вронсиан канонических блоховских решений, нормированных в точке ζ_0 дается формулой:

$$w(\Psi_+, \Psi_-) = q^2(E_0)w(\psi_+(x, E_0), \psi_-(x, E_0)), \quad E_0 = \mathcal{E}(\zeta_0). \quad (3.15)$$

Эта формула показывает, что вронсиан не зависит от ζ , но зависит от точки, в которой нормированы решения. Поскольку $\mathcal{E}_0 \notin Q \cup \{E_l\}$, этот вронсиан не равен нулю.

Отметим наконец, что аналогичная (но, асимптотическая) формула возникает в методе В. С. Буслаева.

Иногда, для сокращения длинных формул мы будем использовать не вполне корректные обозначения:

$$\omega_{\pm}(\zeta) := -W'(\zeta) \cdot \omega_{\pm}(E - W(\zeta)), \quad \psi_{\pm}(x, \zeta) := \psi_{\pm}(x, E - W(\zeta)). \quad (3.16)$$

В этом случае аргумент функций ω_{\pm} и ψ_{\pm} явно будет указывать, о каком объекте идет речь. Отметим, что 1-форма $\omega_{\pm}(\zeta)d\zeta$ (новое обозначение) получается из $\omega_{\pm}(\mathcal{E})d\mathcal{E}$ (старое обозначение) при замене переменной $\zeta \mapsto \mathcal{E}(\zeta) = E - W(\zeta)$.

3.3.3. Канонические области

Каноническая область – главный геометрический объект комплексного метода ВКБ. Ее определение возникает при построении решений, имеющих стандартное асимптотическое поведение по параметру $\zeta \in \mathbb{C}$. Как и в классическом комплексном методе ВКБ, канонические области описываются в терминах *канонических кривых*, и мы начнем с их определения.

Ниже мы называем *гладкими* кривые из класса C^1 . Если не оговорено особо, мы рассматриваем лишь замкнутые кривые (ограниченные, содержащие свои концы).

Мы называем кусочно гладкую кривую *вертикальной*, если естественным параметром на ней является $\text{Im } \zeta$.

Пусть γ – регулярная вертикальная кривая. Фиксируем на ней непрерывную ветвь κ комплексного импульса. Мы называем γ *канонической линией (кривой)*, если вдоль нее

$$\frac{d}{ds} \left(\text{Im} \int^{\zeta} \kappa d\zeta \right) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{ds} \left(\text{Im} \int^{\zeta} (\kappa - \pi) d\zeta \right) < 0,$$

где ds – элемент длины кривой γ . Перейдем к определению канонических областей. Пусть K – регулярная область. Фиксируем на ней непрерывную ветвь κ комплексного импульса. Область K называется *канонической*, если на ее границе найдутся две точки ζ_1 и ζ_2 , $\text{Im } \zeta_1 < \text{Im } \zeta_2$, таких, что K является объединением кривых (без их концов), соединяющих две точки ζ_1 и ζ_2 и являющихся каноническими по отношению к κ .

Замечание 3.1. Близкие определения канонических кривых и канонических областей возникают при исследовании разностных уравнений [11].

Параграф 4 посвящен построению канонических кривых и канонических областей.

3.4. Формулировка основной теоремы

Говоря, что решение f имеет *стандартное асимптотическое поведение* мы прежде всего имеем в виду, что

$$f = e^{\sigma \frac{i}{\varepsilon} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta} (\Psi_{\sigma}(x, \zeta) + o(1)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

где σ – либо знак “+”, либо “–”. Решения, построенные с помощью адиабатического комплексного метода ВКБ имеют ряд других важных свойств, которые также включаются в понятие стандартного поведения. Сформулируем точное определение.

Фиксируем $E = E_0$. Пусть D – регулярная область. Обозначим через $S(D)$ минимальную полосу вида $\{Y_1 < \text{Im } \zeta < Y_2\}$, содержащую область D .

Фиксируем $\zeta_0 \in D$ так, чтобы $\mathcal{E}(\zeta_0) \notin P \cup Q$. Пусть κ – ветвь комплексного импульса аналитическая в D , а Ψ_{\pm} – канонические блоховские решения на D , нормированные в ζ_0 и обозначенные индексами \pm так, чтобы κ был квазиимпульсом решения Ψ_{+} .

Определение 3.1. Мы говорим, что в области D решение f имеет стандартное поведение (или стандартную асимптотику) $f \sim \exp(\sigma \frac{i}{\varepsilon} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta) \cdot \Psi_{\sigma}(x, \zeta)$, если

- существуют комплексная окрестность V_0 точки E_0 такая, что f определена и удовлетворяет (3.3) и (3.4) для всех $(x, \zeta, E) \in \mathbb{R} \times S(D) \times V_0$;
- при фиксированном x функция f аналитична по $\zeta \in S(D)$ и по $E \in V_0$;
- для любого компактного подмножества K области D существует комплексная окрестность $V \subset V_0$ точки E_0 такая, что

для $(x, \zeta, E) \in [-X, X] \times K \times V$, где $X > 0$ – фиксированное число, решение f допускает равномерное асимптотическое представление (3.17);

- эта асимптотика может быть один раз продифференцирована по x , не потеряв при этом всех своих равномерных свойств.

Об описанном в этом определении решении будем говорить, что оно нормировано в ζ_0 . Когда нам потребуется явно указать точку нормировки, мы будем писать $f_{\pm}(x, \zeta, \zeta_0)$.

Теперь мы готовы сформулировать основную аналитическую теорему адиабатического комплексного метода ВКБ.

Теорема 3.1 ([14, 15]). *Предположим, что $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – вещественнозначная, периодическая с периодом 1 функция, локально интегрируемая с квадратом, а W аналитична в полосе вида $\mathcal{D}(W) = \{|\operatorname{Im}(\xi)| < Y\}$, $Y > 0$. Фиксируем $E = E_0$.*

Пусть $K \subset \mathcal{D}(W)$ – область, каноническая по отношению по отношению к фиксированной на ней ветви κ комплексного импульса. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют два решения (f_{\pm}) семейства уравнений (3.3), имеющие стандартное поведение в K :

$$f_{\pm} \sim e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta} \Psi_{\pm}.$$

Замечание 3.2. Сравним асимптотики (3.1), получаемые в стандартном методе ВКБ, и асимптотики, получаемые в нашем методе. Обе асимптотики содержат один и тот же экспоненциальный множитель $e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int \kappa dt}$, в котором комплексный импульс κ определяется *изоэнергетическим уравнением* вида $H(\kappa, t) = E$. В обоих случаях Гамильтониан H является суммой (эффективного) символа невозмущенного оператора и возмущения (ср. (3.2) и (3.7)).

Можно построить много решений уравнения (3.3), аналитических по ζ , но именно решения, удовлетворяющие условию согласованности (3.4), обладают стандартным асимптотическим поведением.

В своем методе для описания поведения решений вдоль вещественной оси В. Буслаев использовал следующий анзац

$$\psi \sim e^{\pm \frac{i}{\varepsilon} \int^{\varepsilon \cdot x} \kappa(\xi) d\xi} (\Psi_{\pm}(x, \varepsilon \cdot x) + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В теореме 3.1 параметр ζ заменяет медленную переменную $\varepsilon \cdot x$.

Легко вычислить вронскиан решений $f_{\pm}(x, \zeta)$:

$$w(f_+, f_-) = w(\Psi_+, \Psi_-) + o(1). \quad (3.18)$$

Эта асимптотика равномерна по ζ , находящемся в фиксированном компактном подмножестве K , и E , находящемся в достаточно малой фиксированной окрестности E_0 . Отсюда и из (3.15) следует, что для описанных значений ζ и E при достаточно малом ε решения f_{\pm} оказываются линейно независимы.

3.3. Из условия согласованности следует, что вронскиан решений f_{\pm} — ε -периодичен. Поэтому, асимптотика (3.18) равномерна в минимальной горизонтальной полосе, содержащей упомянутый компакт (при естественных предположениях о его форме).

3.5. Использование адиабатического комплексного метода ВКБ

3.5.1. Поведение решений вдоль оси x

Наша первоначальная задача — исследовать решения (3.3) на оси x . Решения, описанные в теореме 3.1 аналитичны по ζ в полосе $S(K)$ (минимальной горизонтальной полосе, содержащей каноническую область K). Если эта полоса содержит \mathbb{R} , условие (3.4) дает связь поведения решений вдоль оси x с их поведением вдоль вещественной оси ζ . Таким образом, достаточно научиться контролировать асимптотики решений в полосе $S(K)$ на комплексной плоскости ζ .

3.5.2. Контроль экспоненциально малых эффектов

Объясним, как адиабатический комплексный метод ВКБ позволяет контролировать экспоненциально малые эффекты.

Как правило, основные спектральные объекты выражаются через матрицы перехода, связывающие пары базисов из решений со стандартным асимптотическим поведением. Вместе с базисными решениями, такие матрицы являются аналитическими по ζ , а благодаря условию согласованности, они оказываются периодическими по ζ с периодом ε .

Если асимптотики матрицы перехода T известны вблизи границы комплексной полосы, содержащей \mathbb{R} , то мы легко можем вычислить асимптотики ее коэффициентов Фурье, соответствующих членам ряда Фурье, имеющим старший порядок у границы полосы.

Пусть d — расстояние от вещественной оси до границ полосы. Тогда, такое вычисление позволяет контролировать на вещественной

оси коэффициенты матрицы T с точностью до членов ряда Фурье, имеющих порядок $O(e^{-d/\varepsilon})$ относительно членов ряда Фурье, формирующих старшие члены асимптотики.

3.5.3. Стратегия вычисления асимптотик решений в полосе $S(K)$

Для контроля ψ в полосе $S(K)$ за пределами области K можно действовать по рецепту классического комплексного метода ВКБ: рассматривается новая каноническая область, пересекающаяся с исходной, решения, построенные для исходной области K выражаются через решения, соответствующие новой области, что позволяет вычислить асимптотики старого базиса на новой области, и т. д.

Эта стратегия успешно работает, вычисления в целом похожи на вычисления традиционного метода ВКБ, но оказываются существенно сложнее технически, см. [15].

Технические трудности при работе по схеме, подсказанной классическим комплексным методом ВКБ, отчасти связаны с богатством аналитических свойств дисперсионной функции невозмущенного периодического оператора – функции \mathbb{E} , которая определяет комплексный импульс, см. (3.7), а через него – и геометрию канонических областей. Кроме того, в адиабатическом случае определение канонических областей содержит больше условий. В результате, оказывается непросто находить “максимальные” канонические области, а “максимальные” канонические области оказываются “малыми” в “горизонтальном” направлении (вещественной оси). В итоге, при вычислениях матриц перехода, связывающих решения, имеющие стандартное асимптотическое поведение на двух разных канонических областях, приходится рассматривать “длинные” цепочки вспомогательных пересекающихся канонических областей и выполнять много громоздких вычислений.

Оказывается, что решение, имеющее стандартное асимптотическое поведение (3.1) на канонической области K_0 , сохраняет его на областях гораздо больших, чем “максимальная” каноническая область, содержащая K_0 . Мы называем такие области *областями продолжения*.

Вместо того, чтобы пытаться найти “максимальную” каноническую область, мы начинаем с построения “тонкой” канонической области. Для этого мы используем следующее простое наблюдение (см. лемму 4.6): любая каноническая линия содержится в *локальной*

канонической области, "вытянутой" вдоль нее. Для того, чтобы сконструировать каноническую линию, мы используем отрезки "элементарных" кривых, см. раздел 4.2 и Предложение 4.1.

При таком подходе главной частью работы становится исследование поведения решений, сконструированных с помощью теоремы 3.1, за пределами локальной канонической области. Оказывается, что имеются три общих *принципа продолжения*, позволяющих вычислить области продолжения для этих решений. Эти принципы описаны в параграфе 5.

В итоге, чтобы построить решение с простыми асимптотиками на "большой" (не обязательно канонической) области, мы начинаем с локальной канонической области и затем, шаг за шагом, применяя на каждом шаге один из трех принципов продолжения, мы расширяем область продолжения, "продолжая" стандартные асимптотики f в большую область.

Замечание 3.4. Асимптотическое поведение согласованного решения в областях, примыкающих к области продолжения, обсуждалось в работе [17] (см. разделы, посвященные принципу двух волн (Two wave principle)). Оказывается, что и здесь это поведение тоже подчиняется некоторым общим принципам, но уже не является стандартным.

4. ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ЛИНИЙ И КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

В этом параграфе мы описываем метод построения канонических линий и канонических областей, используемый на практике, см., напр., [15, 16, 18, 20]. В разделе 4.1, мы описываем линии уровня мнимой части интегралов типа действия. В разделе 4.2 предложен способ построения канонических кривых. В разделе 4.3 мы описываем способ построения канонических областей. В разделе 4.4 мы приводим пример использования наших конструкций.

Описанные ниже определения и результаты в основном взяты из работ [14, 15] и [17], и мы будем давать ссылки на работы лишь в случаях, когда читателю могут потребоваться подробные доказательства.

4.1. Линии Стокса и линии стоксова типа

Как в классическом комплексном методе ВКБ (см. [13]), при использовании "адиабатического" комплексного метода ВКБ приходится изучать линии уровня мнимой части интегралов типа действия.

В “адиабатическом” случае это – интегралы $\int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta$ и $\int_{\zeta_0}^{\zeta} (\kappa - \pi) d\zeta$. Обсуждению таких линий и посвящен этот раздел. Во многом анализ параллелен анализу из классического метода ВКБ.

В дальнейшем мы будем стандартным образом отождествлять комплексные числа с векторами на вещественной плоскости.

4.1.1. Линии стокова типа

Пусть D – регулярная область. Фиксируем на D аналитическую ветвь κ комплексного импульса. Фиксируем точку $\zeta_0 \in D$.

Линии уровня гармонических функций $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta$ и $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\kappa - \pi) d\zeta$ называются *линиями стокова типа*.

Очевидно, линии стокова типа не зависят от выбора ζ_0 .

Для анализа геометрии линий стокова типа используют следующую лемму:

Лемма 4.1. *Линии семейства $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta = \operatorname{Const}$ касательны к векторному полю $\overline{\kappa(\zeta)}$, а линии семейства $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\kappa - \pi) d\zeta = \operatorname{Const}$ касательны к векторному полю $\overline{\kappa(\zeta) - \pi}$.*

Одним из важных следствий из этой леммы является

Следствие 4.1. *Линии стокова типа каждого из двух семейств выстилают любую регулярную область.*

Мы часто используем следующее мгновенное следствие из леммы 4.1.

Следствие 4.2. *Если в некоторой регулярной области U $\operatorname{Im} \kappa \neq 0$, то все линии стокова типа в U вертикальны.*

Следующие утверждения описывают возможные пересечения канонических линий и линий стокова типа.

Лемма 4.2. *Пусть γ – каноническая кривая. Тогда, любая линия стокова типа, пересекающая γ , пересекает ее трансверсально.*

Лемма 4.3 (Лемма о пересечениях, [17]). *В регулярной области*

- *каноническая кривая и линия стокова типа могут пересекаться не более одного раза,*
- *две вертикальные линии стокова типа из разных семейств могут пересекаться не более одного раза,*

- две линии Стокса типа из одного семейства либо не пересекаются, либо совпадают.

4.1.2. Линии Стокса

Пусть ζ_0 — точка ветвления комплексного импульса. *Линией Стокса*, начинающейся в ζ_0 , называют кривую γ , определяемую уравнением

$$\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\kappa(\xi) - \kappa(\zeta_0)) d\xi = 0,$$

где κ — ветвь комплексного импульса, непрерывная на γ .

Из (3.11) следует, что линии Стокса, начинающиеся в ζ_0 не зависят от выбора ветви κ в определении линии Стокса.

Будем считать, что $W'(\zeta_0) \neq 0$. Тогда из представления (3.12) следует, что имеются три линии Стокса, начинающиеся в ζ_0 , а углы между ними в точке ветвления равны $2\pi/3$.

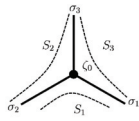


Рис. 2. Линии Стокса в окрестности точки ветвления.

Всегда можно выбрать ветвь квазиимпульса (см. (3.11)), непрерывную на заданной линии Стокса γ и такую, что либо $\kappa(\zeta_0) = 0$, либо $\kappa(\zeta_0) = \pi$. Мы будем называть эту ветвь *естественной*. При выборе естественной ветви линии Стокса оказываются линиями Стокса типа.

Рассмотрим некоторую окрестность V точки ζ_0 . Если V достаточно мала, то линии Стокса, начинающиеся в ζ_0 , делят ее на три области, называемые *секторами*, см. рис. 2.

Если $\kappa(\zeta_0) = 0$ (соотв. $\kappa(\zeta_0) = \pi$), то каждый из секторов выстилается линиями семейства $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta = \operatorname{Const}$ (соотв., $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\kappa - \pi) d\zeta = \operatorname{Const}$). В частности, часть границы каждого из секторов, которая образована двумя линиями Стокса, может быть сколь угодно точно аппроксимирована линиями Стокса типа $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta = \operatorname{Const}$ (соотв., $\operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\kappa - \pi) d\zeta = \operatorname{Const}$), пересекающими этот сектор, см. рис. 2.

4.2. Построение канонических линий

Здесь мы опишем эффективный практический метод построения канонических линий. Идея метода состоит в том, чтобы сначала из кусочков “элементарных” кривых построить *преканоническую линию*, а затем, немного ее подправив, получить каноническую.

Пусть D – регулярная область. Фиксируем на ней аналитическую ветвь κ комплексного импульса.

Будем называть вертикальную кривую $\gamma \subset D$ *преканонической*, если она является конечным объединением отрезков линий Стокса типа и/или канонических линий (относительно ветви κ).

Замечание 4.1. На практике в качестве “элементарных” отрезков, из которых “собирается” преканоническая линия, выбирают отрезки линий Стокса типа, близких к линиям Стокса, и вертикальные отрезки гладких кривых, на которых $\text{Im } \kappa = 0$. Если на таком отрезке \mathcal{E} принимает значения внутри одной спектральной зоны, то существует ветвь комплексного импульса, относительно которой он является канонической кривой.

Имеет место

Предложение 4.1 ([15]). Пусть γ – преканоническая линия. Обозначим ее концы через ζ_a и ζ_b .

Пусть $V \subset D$ – некоторая окрестность кривой γ , а $V_a \subset D$ – окрестность точки ζ_a . Тогда существует каноническая линия $\tilde{\gamma} \subset V$, соединяющая точку ζ_b с некоторой точкой в V_a .

Предложение 1.1 утверждает, что сколь угодно близко к любой преканонической линии найдется каноническая.

На практике часто оказывается удобной

Лемма 4.4. Пусть γ – преканоническая линия. Предположим, что она содержит отрезок γ_0 канонической линии. Фиксируем $\delta > 0$. Каноническую линию, описанную в предыдущей лемме, можно построить так, что

- если оба конца γ_0 – внутренние точки γ , то каноническая линия будет содержать этот отрезок без δ -окрестностей его концов;
- если только один конец γ_0 – внутренняя точка γ , то каноническая линия будет содержать γ_0 без δ -окрестности этого конца.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 6.5 из [15].

Иногда после построения канонических линий их нужно слегка деформировать. Для этого используется

Лемма 4.5. Пусть γ – каноническая линия. Любая кривая, достаточно близкая в топологии C^1 к γ , тоже является канонической.

4.3. Построение канонических областей

Опишем способы построения канонических областей. Мы опять предполагаем, что D – регулярная область, а κ – ветвь импульса, аналитическая на D . Пусть $\gamma \subset D$ – кривая, каноническая по отношению к κ . Обозначим через ζ_a и ζ_b концы γ так, что $\text{Im } \zeta_a < \text{Im } \zeta_b$.

Рассмотрим каноническую область $K \subset D$, соответствующую тройке ζ_a, ζ_b, κ . Если $\gamma \in K$, то говорят, что K *одевает* γ .

Из леммы 4.5 мгновенно вытекает

Лемма 4.6. Всегда можно построить каноническую область, одевающую заданную каноническую кривую.

Канонические области, построенные с помощью этой леммы, мы будем называть *локальными*.

На практике, для построения канонических областей используется

Предложение 4.2 ([15]). Пусть γ – каноническая кривая по отношению к κ . Пусть $K \subset D$ – односвязная область, содержащая γ (без ее концов). Для того, чтобы область K была канонической областью, одевающей γ , достаточно, чтобы она была объединением преканонических кривых, получаемых из γ заменой ее внутреннего отрезка на кривую, преканоническую относительно κ .

4.4. Пример: основные конструкции метода для $W(\zeta) = \alpha \cos \zeta$

Здесь мы опишем основные конструкции “adiaбатического” комплексного метода ВКБ для $W(\zeta) = \alpha \cos \zeta$.

В этом разделе мы будем предполагать, что все лакуны оператора (1.3) открыты, а спектральный параметр E удовлетворяет условию

$$E - \alpha < E_1, \quad E_1 < E + \alpha < E_2. \quad (4.1)$$

Результаты первых двух разделов использовались в [15].

4.4.1. Комплексный импульс

1. Точки ветвления комплексного импульса описываются соотношениями (3.10) с $W = \alpha \cos \zeta$. Множество точек ветвления 2π -периодично и симметрично по отношению как к вещественной, так и мнимой осям. Для вещественных E точки ветвления расположены на

линиях множества $W^{-1}(\mathbb{R})$. Для $W(\zeta) = \alpha \cos \zeta$ мы имеем $W^{-1}(\mathbb{R}) = \text{arccos}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (i\mathbb{R} + n\pi) \right)$.

Рассмотрим полуполосу

$$\Pi = \{ \zeta \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re } \zeta \leq \pi, \text{Im } \zeta \geq 0 \}. \quad (4.2)$$

Отображение $\mathcal{E} : \zeta \rightarrow E - W(\zeta)$ конформно отображает ее внутренность на верхнюю полуплоскость C_+ , а граница полуполосы Π отображается биективно на вещественную ось. Поэтому, в Π точки ветвления расположены лишь на ее границе. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ на $\partial\Pi$ имеется ровно одно решение уравнения (3.10). Обозначим его через ζ_j . При условии (4.1) $0 < \zeta_1 < \pi$, а точки ζ_2, ζ_3, \dots расположены на линии $\text{Re } \zeta = \pi$ таким образом, что

$$0 < \text{Im } \zeta_2 < \text{Im } \zeta_3 < \text{Im } \zeta_4 < \text{Im } \zeta_5 < \text{Im } \zeta_6 < \zeta_7 \dots$$

Заметим, что все неравенства – строгие (из-за того, что мы предположили, что все лакуны (1.3) открыты). На рис. 3 мы изобразили некоторые точки ветвления.

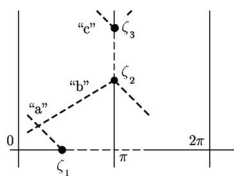


Рис. 3. Точки ветвления и линии Стокса.

2. На Π можно определить ветвь комплексного импульса формулой

$$\kappa_p(\zeta) = k_p(E - \alpha \cos \zeta), \quad (4.3)$$

где k_p – главная ветвь квазиимпульса для периодического оператора (1.3), см. раздел 2.1.2. Будем называть κ_p *главной ветвью*.

Свойства k_p “переводятся” в свойства κ_p с помощью формулы (4.3). В частности, κ_p конформно отображает Π в $C_+ \cup \mathbb{R}$. Фиксируем $l \in \mathbb{N}$. Отрезок $z_l := [\zeta_{2l-1}, \zeta_{2l}] \subset \partial\Pi$ биективно отображается на интервал $[\pi(l-1), \pi l]$; на отрезке $g_l := [\zeta_{2l}, \zeta_{2l+1}] \subset \partial\Pi$ вещественная часть κ_p равна πl , а его мнимая часть положительна. На отрезке $g_0 \subset \partial\Pi$, идущем вдоль мнимой оси от $+i\infty$ до нуля и по вещественной оси от нуля до ζ_1 ($\zeta_1 \notin g_0$), вещественная часть κ_p равна нулю, а мнимая – положительна.

4.4.2. Линии Стокса

Обсудим линии Стокса в рассматриваемом случае. Благодаря свойствам симметрии отображения $\mathcal{E} : \zeta \mapsto E - \alpha \cos \zeta$ множество линий Стокса 2π -периодично и симметрично по отношению и к вещественной, и к мнимой осям. Поэтому достаточно обсудить линии Стокса в полуполосе Π и на ее границе.

На рис. 3 мы изобразили некоторые линии Стокса в Π пунктирными линиями.

Заметим, что из определения линий Стокса и свойств κ_p на границе Π следует, что линиями Стокса являются отрезки $[\zeta_1, \pi] \subset \mathbb{R}$ и $[\zeta_2, \zeta_3] \subset \pi + i\mathbb{R}$.

Свойства линий Стокса “а”, “б” и “с” описывает

Лемма 4.7 ([15]).

- Линия Стокса “а” находится внутри Π (выше ζ_1) и является вертикальной.
- Линия Стокса “с” вертикальна, расположена между “а” и линией $\operatorname{Re} \zeta = \pi$ (выше ζ_3) и не пересекает их.
- Линия Стокса “б” остается вертикальной пока не покинет Π ; до этого она пересекает “а” в точке с положительной мнимой частью.

Эта лемма легко доказывается с помощью основных свойств линий стоковского типа и канонических линий, описанных в разделе 4.1.1.

4.4.3. Каноническая кривая

Здесь мы опишем пример конструкции канонической кривой, используемой для построения решений (в разделе 5.5).

Введем в рассмотрение кривую α , являющуюся объединением линии Стокса “а”, симметричной “а” относительно \mathbb{R} , отрезка $[\zeta_1, \pi] \subset \mathbb{R}$, отрезка $[\pi, \zeta_3] \subset \pi + i\mathbb{R}$ и линии Стокса “с”, см. рис. 4, часть А.

Предложение 4.3. Фиксируем $\delta > 0$ и $Y > \zeta_3$. В δ -окрестности кривой α имеется каноническая кривая γ , идущая вокруг точек ветвления комплексного импульса как показано на рис. 4, часть С. Концы γ удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Im} \zeta_a < -Y$ и $\operatorname{Im} \zeta_b > Y$. Кривая γ идет в Π от верхнего конца к точке линии $\pi + i\mathbb{R}$, потом вдоль этой линии в нижнюю полуплоскость. Кривая γ является канонической относительно ветви κ комплексного импульса, получаемой аналитическим продолжением ветви κ_p вдоль γ от ее верхнего конца вниз.

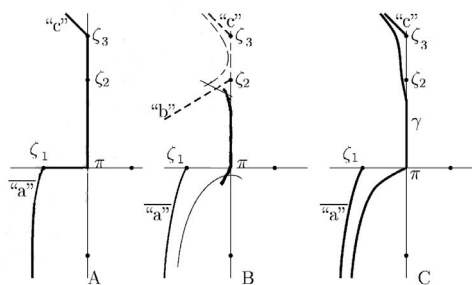


Рис. 4. Построение канонической линии.

Аналогичное утверждение доказано в [17]. Мы отметим лишь, что γ построена с помощью леммы 4.4 “из” преканонической линии β , изображенной на рис. 4, часть В. На этом рисунке мы изображили непрерывными линиями линии Стокса типа $\int \kappa d\zeta = \text{Const}$, пунктиром – линии $\int (\kappa - \pi) d\zeta = \text{Const}$, жирной линией – каноническую кривую.

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ КОМПЛЕКСНОГО МЕТОДА ВКБ

В этом параграфе мы сформулируем три утверждения – Лемму о прямоугольнике (лемма 5.1), Принцип примыкающей области (предложение 5.1) и Лемму о линии Стокса (лемма 5.4), позволяющие обосновать стандартное поведение решений за пределами (локальных) канонических областей.

В разделе 5.4 мы коротко обсуждаем, как эти утверждения дополняют друг друга при исследовании асимптотик решений. Раздел 5.5 посвящен примеру вычисления области продолжения с их помощью.

В дальнейшем, множество называется *постоянным*, если оно не зависит от ε .

5.1. Лемма о прямоугольнике: асимптотики растущих решений

Лемма о прямоугольнике отражает стандартную эвристику классического метода ВКБ: формула для старшего члена асимптотики решений остается применимой до тех пор, пока он определен и указывает на рост решения.

В адиабатическом методе ВКБ оказывается естественно выделенным “горизонтальное” направление вещественной оси ζ , см. усло-

вие (3.4), и, в существенном, Лемма о прямоугольнике утверждает, что решение f сохраняет стандартное асимптотическое поведение (3.17) вдоль горизонтальной линии, пока старший член асимптотики растет вдоль нее.

Для малых ε порядок решения f определяется множителем $e^{\frac{i}{\varepsilon} \int \kappa d\zeta}$. Если в некоторой области D $\text{Im } \kappa > 0$, то f растет налево; если $\text{Im } \kappa < 0$, то f растет направо. Лемма о прямоугольнике формулируется в терминах знака мнимой части κ .

Перейдем к точным формулировкам. Фиксируем $\eta_m < \eta_M$. Положим $S = \{\zeta \in \mathbb{C} : \eta_m \leq \text{Im } \zeta \leq \eta_M\}$. Пусть γ_1 и γ_2 — две непересекающиеся вертикальные линии. Предположим, что обе они пересекают линии $\text{Im } \zeta = \eta_m$ и $\text{Im } \zeta = \eta_M$, и что γ_1 расположена слева от γ_2 . Пусть R — компакт, ограниченный линиями γ_1 , γ_2 и границами S . Положим $D = R \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$. Имеет место

Лемма 5.1 (Лемма о прямоугольнике, [18]). *Фиксируем $E = E_0$. Предположим, что “прямоугольник” R является регулярным, а f — решение (3.3), удовлетворяющее (3.4). Тогда, при достаточно малых ε выполнено следующее:*

(1) *если в D $\text{Im } \kappa < 0$, а в окрестности γ_1 f имеет стандартное поведение $f \sim \exp(\frac{i}{\varepsilon} \int \kappa d\zeta) \cdot \Psi_+$, то оно сохраняет это поведение в постоянной области, содержащей R .*

(2) *если в D $\text{Im } \kappa > 0$, а в окрестности γ_2 f имеет стандартное поведение $f \sim \exp(\frac{i}{\varepsilon} \int \kappa d\zeta) \cdot \Psi_+$, то оно сохраняет это поведение в постоянной области, содержащей R .*

Близкий результат для разностных уравнений был доказан в [10].

Естественным препятствием для “продолжения” асимптотики при помощи Леммы о прямоугольнике является “вертикальная” линия, вдоль которой $\text{Im } \kappa = 0$. Таким образом, обычно, области, где удается обосновать (3.17) за счет леммы 5.1, напоминают прямоугольники.

5.2. Принцип примыкающей области

Принцип примыкающей области используется для обоснования стандартного асимптотического поведения для убывающих решений.

5.2.1. Формулировка

Пусть γ — вертикальная кривая, $\tilde{\gamma}$ — эта кривая без своих концов, а S — минимальная полоса вида $\{C_1 < \text{Im } \zeta < C_2\}$, содержащая $\tilde{\gamma}$.

Пусть $U \subset S$ – регулярная область. Мы говорим, что U *примыкает* к γ , если $\tilde{\gamma}$ является частью ее границы.

Имеет место

Предложение 5.1 (Принцип примыкающей области, [18]). Пусть γ – каноническая линия, а решение f имеет стандартное поведение в области, примыкающей к γ . Тогда, f имеет стандартное поведение в любой канонической области, одевающей γ .

Для успешного применения принципа необходимо уметь эффективно описывать одевающие канонические области.

5.2.2. Одевающие канонические области

Достаточно трудно описать “максимальную” каноническую область, одевающую заданную каноническую линию, и при применении Принципа примыкающей области используют “простые” канонические области, описываемые “Леммой о трапеции” 5.3.

Формулировка этой леммы становится наиболее прозрачной с учетом лемм о пересечениях 4.2, 4.3 и следующего утверждения:

Лемма 5.2 ([17]). Пусть γ – каноническая кривая. Пусть U – область, примыкающая к γ . Предположим, что в U $\text{Im } k \neq 0$. Рассмотрим две линии Стокса типа (из разных семейств), содержащие внутреннюю точку ζ_0 кривой γ . В U обе они вертикальны, одна из них идет вверх от ζ_0 , а вторая – вниз от ζ_0 .

Теперь мы можем сформулировать лемму о “простых” канонических областях. Ее утверждения иллюстрируются рис. 5.

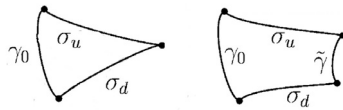


Рис. 5. Области в лемме о трапеции.

Лемма 5.3 (Лемма о трапеции, [17]). Пусть γ_0 – внутренний отрезок некоторой канонической линии γ . Пусть U – область, примыкающая к γ . Предположим, что в U $\text{Im } k \neq 0$. Обозначим через $\sigma_u \subset U$ (соотв., $\sigma_d \subset U$), линию Стокса начинающуюся в верхнем (соотв., нижнем) конце γ_0 и идущую вниз (соотв., вверх). Тогда, справедливы следующие утверждения:

- Предположим, что σ_u пересекает σ_d в U . Рассмотрим область $T \subset U$, ограниченную γ_0 и отрезками кривых σ_u и σ_d (от начала до точки пересечения). Тогда, T является частью канонической области, одевающей γ_0 .
- Пусть $\tilde{\gamma} \subset U$ – каноническая кривая, непересекающаяся с γ_0 и пересекающаяся с σ_u и σ_d . Если линии σ_u , σ_d , γ_0 и $\tilde{\gamma}$ вместе ограничивают некоторую односвязную область $T \subset U$, то область T является частью канонической области, одевающей γ_0 .

5.3. Лемма о линии Стокса

Лемма о линии Стокса сродни результатам классических версий комплексного метода ВКБ о поведении решения в окрестности линии Стокса, где его убывание сменяется ростом, см. [13].

Пусть ζ_0 – точка ветвления комплексного импульса. Предположим, что $W'(\zeta_0) \neq 0$. Обозначим линии Стокса, начинающиеся в ζ_0 через σ_1 , σ_2 и σ_3 так, чтобы σ_1 была вертикальной в ζ_0 (см. рис. 2).

Пусть $\tilde{\sigma}_1$ – ограниченный отрезок σ_1 , начинающийся в ζ_0 , вертикальный и содержащий только одну точку ветвления – ζ_0 .

Пусть V – достаточно малая окрестность $\tilde{\sigma}_1$, а $V \setminus \sigma_1$ – регулярное множество. Линии Стокса σ_1 , σ_2 и σ_3 разбивают V на три сектора. Мы обозначим их через S_1 , S_2 и S_3 так, чтобы S_1 был расположен между σ_1 и σ_2 , а сектор S_2 – между σ_2 и σ_3 (см. рис. 2).

По существу, Лемма о линии Стокса говорит, что, если f имеет стандартное асимптотическое поведение внутри $S_1 \cup S_2$ и убывает, когда $\zeta \in S_1 \cup S_2$ приближается к σ вдоль линий $\text{Re } \zeta = \text{Const}$, то f имеет стандартное асимптотическое поведение во всей окрестности V с разрезом вдоль σ_1 .

Лемма 5.4 (Лемма о линии Стокса, [17]). Пусть V достаточно мала. Пусть f – решение (3.3), имеющее стандартное асимптотическое поведение $f \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int \kappa d\zeta} \Psi_+$ внутри сектора $S_1 \cup (\sigma_2 \cap V) \cup S_2$. Пусть S_1 расположен слева (соотв., справа) от σ_1 , а в S_1 около σ_1 выполнено неравенство $\text{Im } \kappa(\zeta) > 0$ (соотв., $\text{Im } \kappa(\zeta) < 0$). Тогда f имеет стандартное асимптотическое поведение внутри $V \setminus \sigma_1$.

Согласно лемме о линии Стокса, чтобы получить старший член асимптотики f в секторе S_3 , необходимо его аналитически продолжить из $S_1 \cup S_2$ в S_3 внутри $V \setminus \sigma_1$, т.е. “двигаясь” вокруг точки ветвления ζ_0 , не пересекая σ_1 .

5.4. Еще раз о стратегии адиабатического комплексного метода ВКБ

Описанная в этом разделе схема была применена (иногда, лишь частично) в работах [16, 18, 20, 25, 24, 21, 26].

5.4.1. Локальная конструкция решения

Как уже отмечалось в разделе 3.5.3, мы начинаем построение решения со стандартным асимптотическим поведением с построения канонической линии.

Для этого сначала строится преканоническая линия, состоящая из отрезков “простых” кривых (свойства которых легко контролируются), см. раздел 4.2. После этого с помощью предложения 4.1 (или его вариантов, см. лемму 4.4) из преканонической линии строится каноническая линия.

После построения канонической линии, рассматривают локальную каноническую область, одевающую ее (существование такой области установлено в лемме 4.6).

На локальной канонической области с помощью теоремы 3.1 строят решение f со стандартным асимптотическим поведением на ней. Это решение оказывается аналитическим на минимальной горизонтальной полосе, содержащей локальную каноническую область.

5.4.2. Исследование решения за пределами локальной канонической области

Асимптотики решения f за пределами локальной канонической области изучаются за счет последовательного применения трех принципов продолжения. Обсудим подробнее, как это происходит.

Пусть γ – каноническая линия, использованная для локального построения решения f (т.е., для построения соответствующей локальной канонической области). Напомним, что γ – вертикальная кривая. Если вдоль ее отрезка $\text{Im } \kappa > 0$ (соотв., $\text{Im } \kappa < 0$), то, согласно лемме о прямоугольнике, f сохраняет стандартное асимптотическое поведение в области, примыкающей к этому отрезку слева (соотв., справа).

Принцип примыкающей области используется чтобы “перейти” через вертикальные кривые, служащие препятствиями для Леммы о прямоугольнике. Последние могут быть либо отрезками канонической кривой, использованной для того, чтобы начать конструкцию f (если мы хотим изучить поведение решения в направлении убывания старшего члена), или вертикальными линиями, вдоль которых

$\text{Im } \kappa = 0$. В обоих случаях, эти линии-препятствия оказываются каноническими кривыми относительно подходящей ветви квазиимпульса (см. Замечание 4.1).

С помощью принципа примыкающей области обосновывают стандартное асимптотическое поведение в области T , ограниченной кривой γ_0 и линиями Стокса типа, начинающимися из ее концов. Часто такие линии пересекаются, и область T имеет вид криволинейного треугольника. В противном случае, рассматривают области T вида криволинейной трапеции с “основанием” γ_0 ; четвертая сторона такой трапеции является еще одной канонической кривой.

Области вида трапеции используются для того, чтобы избежать построения “максимальной” канонической области *одевающей* γ_0 , так как последнее может быть достаточно сложным. В качестве четвертой границы областей типа трапеции обычно используются кривые, через которые можно перейти либо используя другие основные принципы продолжения, либо применяя Принцип примыкающей области еще раз.

Лемма о линии Стокса дополняет Принцип примыкающей области. Напомним, что этот принцип позволяет “перейти” через вертикальные кривые, вдоль которых $\text{Im } \kappa = 0$. Такие кривые обычно заканчиваются точками ветвления комплексного импульса. Линии Стокса, начинающиеся в этих точках, как правило, образуют верхнюю и нижнюю границы областей типа трапеции (в которых стандартное асимптотическое поведение обосновывается с помощью Принципа примыкающей области). Лемма о линии Стокса, см. лемму 5.4, позволяет обосновать стандартное поведение за этими линиями за счет их обхода вокруг точек ветвления.

5.4.3. Выбор исходной канонической кривой

Для того, чтобы область продолжения (максимальная область, где решение имеет стандартное асимптотическое поведение) была максимально большой, мы должны подходящим образом выбирать каноническую кривую, используемую для построения локальной канонической области. Идея состоит в том, что эта линия должна быть близка к кривой, вдоль которой конструируемое решение является мини-

мальным: внутри области продолжения множитель $\left| \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \kappa d\zeta \right) \right|$ должен возрастать, когда ζ удаляется от этой кривой вдоль линий

$\text{Im } \zeta = \text{Const}$. Для того, чтобы добиться этого, преканоническая линия (с которой начинается конструкция f) строится из отрезков кривых, вдоль которых $\text{Im } \kappa = 0$ и из отрезков линий Стокса.

5.5. Пример построения области продолжения

Рассмотрим каноническую кривую γ , описанную в Предложении 4.3. Построим решение f , имеющее стандартное асимптотическое

поведение $f \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\pi}^{\zeta} \kappa_p d\zeta} \cdot \Psi_+$ на локальной канонической области K , одевающей γ (здесь κ – ветвь квазиимпульса, определенная в Предложении 4.3). Опишем поведение f в $S(K)$ за пределами K . Пусть $D = \{|\text{Im } \zeta| \leq Y, 0 < \text{Re } \zeta < 2\pi\}$ (Y – число из Предложения 4.3).

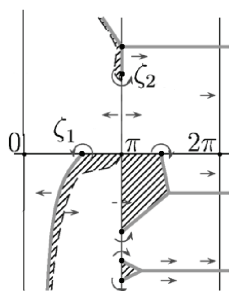


Рис. 6. Область продолжения.

Предложение 5.2. Если δ (из Предложения 4.3) достаточно мало, то решение f сохраняет стандартное асимптотическое поведение в области D' , полученной из D после проведения разрезов вдоль линий Стокса и линий $\text{Re } \zeta = \text{Const}$, показанных на рис. 6.

Аналогичное утверждение доказано в [17]. Мы отметим лишь, что доказательство сводится к последовательному применению Леммы о прямоугольнике, Принципа примыкающей области и Леммы о линии Стокса. Рисунок 6 показывает, где мы используем каждое из этих утверждений: прямые стрелки указывают на использование Леммы о прямоугольнике, закругленные стрелки – на использование Леммы о линии Стокса, а пунктирные стрелки и штриховка – на использование Принципа примыкающей области.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ПЕРЕХОДА

Для исследования асимптотик решений за пределами областей продолжения приходится вычислять матрицы перехода, связывающие базисы, построенные из решений, имеющих стандартное асимптотическое поведение на разных областях. При этом дело сводится к вычислению вронскианов этих решений. Такие вычисления зачастую довольно громоздки, но однотипны и могут быть проведены в общем виде. Мы опишем эффективные общие формулы, полученные в [20].

Пусть спектральный параметр E фиксирован, скажем, $E = E_0$. Пусть h и g – два решения (3.3), удовлетворяющих (3.4) и имеющих стандартное асимптотическое поведение на регулярных областях D_h и D_g :

$$h \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\zeta_h}^{\zeta} \kappa_h d\zeta} \Psi_h(x, \zeta), \quad g \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{\zeta_g}^{\zeta} \kappa_g d\zeta} \Psi_g(x, \zeta). \quad (6.1)$$

Здесь κ_h (соотв., κ_g) – ветвь комплексного импульса, аналитическая в D_h (соотв., D_g), Ψ_h (соотв., Ψ_g) – каноническое блоховское решение на D_h (соотв., D_g) с квазиимпульсом κ_h (соотв., κ_g), а ζ_h (соотв., ζ_g) – точка нормировки для h (соотв., g).

Поскольку h и g удовлетворяют (3.4), их вронскиан ε -периодичен по ζ . Сначала, мы опишем асимптотические формулы для вронскиана и его коэффициентов Фурье, а затем – способ вычисления констант в этих формулах.

6.1. Асимптотика вронскиана

Пусть d – односвязная область, содержащаяся в $D_h \cap D_g$ вместе со своим замыканием.

Арки. Пусть γ – кривая, соединяющая ζ_g с ζ_h и идущая сначала в D_g из ζ_g к некоторой точке в d , а затем идущая в D_h из этой точки в ζ_h . Будем называть γ *аркой, соответствующей тройке (g, h, d)* и обозначать ее через $\gamma(g, h, d)$.

Две арки, соответствующие одной тройке называются *эквивалентными*.

Аналитически продолжим κ_h и κ_g вдоль $\gamma(g, h, d)$. Согласно (3.11), существуют $m \in \mathbb{Z}$ и $\sigma \in \{-1, +1\}$ такие, что в некоторой окрестности γ

$$\kappa_g(\zeta) = \sigma \kappa_h(\zeta) + 2\pi m. \quad (6.2)$$

Будем называть $\sigma = \sigma(g, h, d)$ *знаком* арки γ , а $m = m(g, h, d)$ ее *индексом*. Очевидно, знак и индекс одинаковы для всех эквивалентных арок.

Место встречи. Область d называется *местом встречи* h и g , если в ней $\text{Im } \kappa_h$ и $\text{Im } \kappa_g$ не обращаются в нуль и имеют противоположенные знаки. Очевидна

Лемма 6.1. Пусть $\text{Im } \kappa_h$ и $\text{Im } \kappa_g$ не обращаются в нуль в d . Область d является местом встречи тогда и только тогда, когда $\sigma(g, h, d) = -1$.

Коэффициенты Фурье. Пусть $S(d)$ – минимальная горизонтальная полоса, содержащая область d . Имеет место

Предложение 6.1. Пусть $d = d(h, g)$ – место встречи h и g , а $m = m(g, h, d)$. Существует окрестность V_0 точки E_0 такая, что при достаточно малом ε равномерно по $E \in V_0$ и $\zeta \in S(d)$

$$w(h, g) = \tilde{w}_m e^{\frac{2\pi im}{\varepsilon}(\zeta - \zeta_h)}(1 + o(1)), \quad (6.3)$$

где

$$\tilde{w}_m = (q_g/q_h) \Big|_{\zeta=\zeta_h} \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{\gamma(g, h, d)} \kappa_g d\zeta + \int_{\gamma(g, h, d)} \Omega_g \right) \times w(\Psi_+, \Psi_-) \Big|_{\zeta=\zeta_h}. \quad (6.4)$$

В этих формулах

- арка $\gamma = \gamma(g, h, d)$ выбрана так, что $\mathcal{E}(\gamma) \cap (P \cup Q) = \emptyset$;
- q_g , κ_g и Ω_g – аналитические продолжения этих функций и 1-формы вдоль $\gamma(g, h, d)$;
- $\Psi_+ = \Psi_h$, а Ψ_- – каноническое блоховское решение, “дополнительное” к Ψ_+ .

Очевидно, множитель \tilde{w}_m является старшим членом асимптотики m -го коэффициента Фурье вронскиана $w(h, g)$.

6.2. Замкнутые кривые и индекс m

На практике, нетрудно вычислить один-два индекса m . Когда вычислений много, удобно индексы сравнивать. Для этого мы определим индекс замкнутой кривой.

Замкнутые кривые. Пусть c – ориентированная замкнутая регулярная кривая. Пусть $\zeta_0 \in c$. В регулярной окрестности U_0 точки ζ_0 фиксируем аналитическую ветвь κ комплексного импульса. Назовем тройку (c, ζ_0, κ) *петлей*.

Продолжим κ аналитически вдоль c в соответствии с ее ориентацией. Это определит новую ветвь комплексного момента, аналитическую в U_0 . Обозначим ее через $\kappa|_c$. Существуют $\sigma \in \{-1, +1\}$ и $m \in \mathbb{Z}$ такие, что при $\zeta \in U_0$

$$\kappa|_c(\zeta) = \sigma \kappa(\zeta) + 2\pi m. \quad (6.5)$$

Числа $\sigma = \sigma(c, \zeta_0, \kappa)$ и $m = m(c, \zeta_0, \kappa)$ назовем *знаком* и *индексом* петли (c, ζ_0, κ) .

Пусть (c_1, ζ_1, κ_1) и (c_2, ζ_2, κ_2) – две петли. Предположим, что можно непрерывно продеформировать c_1 в c_2 , не пересекая точек ветвления. Пусть при этом ζ_1 переходит в ζ_2 . Деформация определяет аналитическое продолжение κ_1 в окрестность ζ_2 . Если оно совпадает с κ_2 , мы говорим, что петли *эквивалентны*. Числа m и σ для эквивалентных кривых совпадают.

Обозначим через G прообраз лагун при отображении \mathcal{E} .

Лемма 6.2. Пусть (c, ζ_0, κ) – петля, а $\zeta_0 \notin G$. Предположим, что c трансверсально пересекает G N раз ($N < \infty$), а в точках пересечения $W' \neq 0$. Пусть g_1, g_2, \dots, g_N – значения $\operatorname{Re} \kappa$, принимаемые последовательно в точках пересечения при обходе c из ζ_0 в направлении ее ориентации. Тогда,

$$\begin{aligned} \sigma(c, \zeta_0, \kappa) &= (-1)^N, \\ m(c, \zeta_0, \kappa) &= \frac{1}{\pi} (g_N - g_{N-1} + g_{N-2} - \dots + (-1)^{N-1} g_1). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Сравнение индексов двух арок. Пусть d и \tilde{d} – два различных места встречи решений h и g , а γ и $\tilde{\gamma}$ – две соответствующих арки. Очевидно,

$$\tilde{\gamma} = c + \gamma, \quad (6.7)$$

где c – замкнутая кривая. Из определений немедленно вытекает равенство:

$$m(g, h, \tilde{d}) = m(c, \zeta_g, \kappa_g) + m(g, h, d). \quad (6.8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Avron and B. Simon. *Almost periodic Hill's equation and the rings of Saturn*. — Phys. Rev. Lett. **46**(17) (1981), 1166–1168.
2. В. С. Буслаев, *Адиабатическое возмущение периодического потенциала*. — Теор. мат. физ. **58** (2) (1984), 233–243.
3. В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева, *Адиабатическое возмущение периодического потенциала. II*. — Теор. мат. физ. **73**(3) (1987), 430–442.
4. В. С. Буслаев, *Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами*. — Успехи мат. наук **42**(6) (1987), 77–98.
5. В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева, *Блоховский электрон во внешнем поле*. — Алгебра и анализ **1**(1) (1989), 1–29.
6. V. S. Buslaev, *Spectral properties of the operators $H\psi = -\psi_{xx} + p(x)\psi + v(\epsilon x)\psi$, p is periodic*. — Oper. Theory Adv. Appl. **46** (1990), 85–107.
7. V. Buslaev, *On spectral properties of adiabatically perturbed Schrödinger operators with periodic potentials*. — In: Equations aux Derivées Partielles, (1990–1991), XXIII, Ecole Polytech., Palaiseau (1991), pp. 1–15.
8. V. Buslaev, A. Grigis, *Imaginary parts of Stark-Wannier resonances*. — J. Math. Phys. **39**(5) (1998), 2520–2550.
9. В. С. Буслаев, М. В. Буслаева, А. Грижис, *Асимптотики коэффициента отражения*. — Алгебра и анализ **16**(3) (2004), 1–23.
10. V. Buslaev, A. Fedotov. *The complex WKB method for Harper's equation*. — Preprint, Mittag-Leffler Institute, Stocholm, 1993.
11. В. С. Буслаев, А. А. Федотов, *Комплексный метод ВКБ для уравнения Харпера*. — Алгебра и анализ **6**(3) (1994), 59–89.
12. M. Eastham, *The spectral theory of periodic differential operators*. — Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
13. M. Fedoryuk, *Asymptotic analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1-ed., 1993.
14. A. Fedotov, F. Klopp. *A complex WKB method for adiabatic problems*. — Asymptotic analysis **27** (2001), 219–264.
15. A. Fedotov, F. Klopp, *Anderson transitions for a family of almost periodic Schrödinger equations in the adiabatic case*. — Commun. Math. Phys. **227** (2002), 1–92.
16. A. Fedotov, F. Klopp, *On the singular spectrum of quasi-periodic Schrödinger operator in adiabatic limit*. — Annales Henri Poincaré **5** (2004), 929–978.
17. A. Fedotov, F. Klopp, *Geometric tools of the adiabatic complex WKB method*. — Asymptotic Analysis **39**(3-4) (2004), 309–357.
18. A. Fedotov, F. Klopp, *On the absolutely continuous spectrum of one dimensional quasi-periodic Schrödinger operator in adiabatic limit*. — Transactions Amer. Math. Soc. **357** (2005), 4481–4516.
19. A. Fedotov, F. Klopp, *Strong resonant tunneling, level repulsion and spectral type for one-dimensional adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators*. — Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4e série **38**(6) (2005), 889–950.
20. A. Fedotov, F. Klopp, *Weakly resonant tunneling interactions for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators*. — Mémoires de la S.M.F. **104** (2006), 1–108.
21. F. Klopp, M. Marx, *The width of resonances for slowly varying perturbations of one-dimensional periodic Schrödinger operators*. — In: Séminaire Équations aux

- dérivées partielles (2005–2006). École Polytechnique (2006), 16 pages.
22. В. Марченко, И. Островский, *Характеристика спектра уравнения Хилла*. — Мат. сборник **97**(4) (1975), 493–554.
 23. M. Marx, *Étude de perturbations adiabatiques de l'équation de Schrödinger périodique*. — PhD Thesis, Université Paris 13, Villetaneuse, 2004.
 24. M. Marx, *On the eigenvalues for slowly varying perturbations of a periodic Schrödinger operator*. — J. Asymptotic Analysis **48**(4) (2006), 295–357.
 25. M. Marx, H. Najjar, *On the singular spectrum for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators*. — Adv. Math. Phys. (accepted 28 February 2010), 30 p.
 26. A. Metelkina, *Lyapunov exponent and integrated density of states for the slowly oscillating perturbations of the periodic Schrödinger operators*. — In: International Conference in Spectral Theory. Program and abstracts of the conference, Euler International Mathematical Institute, St.Petersburg (2010), pp. 55–56.
 27. H. McKean, P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation*. — Inventiones Mathematicae **30** (1975), 217–274.
 28. H. P. McKean, E. Trubowitz, *Hill's surfaces and their theta functions*. — Bull. Amer. Math. Soc. **84**(6) (1978), 1042–1085.
 29. Y. Sibuya, *Global theory of second order linear ordinary differential equations with a polynomial coefficient*. — North-Holland, Amsterdam, 1975.
 30. E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part II*. — Clarendon Press, Oxford, 1958.

Fedotov A. A. Complex WKB method for adiabatic perturbations of a periodic Schrödinger operator.

The review is devoted to an analog of the complex WKB method developed to study solutions of an one dimensional periodic Schrödinger equation with an adiabatic perturbation. We illustrate how to use the method by examples.

С.-Петербургский государственный
университет, Физический факультет,
Ульяновская ул, д. 3, Петродворец, 198504
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fedotov.s@mail.ru

Поступило 12 октября 2010 г.