

А. А. Федотов

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем обсуждать эргодическое семейство операторов

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x-z) + W(\varepsilon x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непостоянная, локально интегрируемая с квадратом, 1-периодическая функция,

$$V(x+1) = V(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (1.2)$$

$0 < \varepsilon < 2\pi$ – частота – константа такая, что отношение $2\pi/\varepsilon$ иррационально; $0 \leq z < 2\pi$ – эргодический параметр; W – непостоянная функция, аналитическая в окрестности вещественной оси, принимающая вещественные значения на вещественной оси и периодическая с периодом 2π .

Указанный выбор периодов V и W окажется удобным в дальнейшем.

Так как отношение $2\pi/\varepsilon$ иррационально, то функция $x \rightarrow V(x-z) + W(\varepsilon x)$ – потенциал в операторе Шредингера – почти-периодическая, и оператор называют *почти-периодическим оператором*. Основные спектральные свойства операторов семейства (1.1) одинаковы для почти всех значений эргодического параметра. Краткий обзор свойств таких семейств операторов читатель найдет в разделе 2.

В этой работе мы будем изучать *адиабатический* случай, когда число ε достаточно мало, и один из периодов потенциала много больше другого.

Ключевые слова: почти-периодический оператор Шредингера, периодический оператор Шредингера, адиабатическое возмущение, абсолютно непрерывный спектр, сингулярный спектр, переходы Андерсона, отталкивание уровней.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00209_а и 07-01-92169-НЦНИ_а.

Спектральный анализ почти-периодических операторов Шредингера – одно из наиболее актуальных направлений современной математической физики. Оно мотивировано квантовой физикой твердого тела. Хорошие обзоры и подробные списки литературы можно найти в [34, 5, 27, 30, 35].

Отметим, что более или менее полный анализ спектра удавалось провести лишь для нескольких одномерных разностных операторов Шредингера с “простыми” потенциалами (выражающимися через \cos , tg или простые кусочно постоянные функции). Для дифференциальных уравнений полученные до недавнего времени результаты, в основном, касались операторов Шредингера с *аналитическими* потенциалами вида $\lambda p(\omega_1 x, \omega_2 x, \dots, \omega_n x)$, где p – периодическая (например, с периодом 1) функция своих аргументов, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – “сильно” несоизмеримые частоты (в (1.1) имеются две частоты), а $\lambda > 0$ – большая или малая константа *связи*. В случае большой константы связи и типичных значений эргодического параметра был найден сингулярный спектр, см., напр., [6], а в случае малой константы связи весь спектр оказывается абсолютно непрерывным с почти-периодическими блоховскими обобщенными собственными функциями [9]. Изучался также спектр при больших значениях E ; при этом его свойства аналогичны свойствам спектра в случае малой константы связи.

Несмотря на большое число работ, законченная теория не построена. Принципиальное значение имеет исследование содержательных моделей с потенциалами из достаточно широкого класса с тем, чтобы выявить общие свойства почти-периодических операторов.

Анализ *адиабатического* почти-периодического оператора (1.1) – новое оригинальное направление исследований, начатое в наших работах. Его можно рассматривать как шаг в сторону исследования почти-периодических операторов с потенциалами общего вида. В основном, мы концентрируемся на изучении природы спектра. Обзор отражает результаты, полученные в работах [13, 15, 18, 19, 21]. Дополнительные детали можно найти в [10, 14, 17, 20].

Хотя для исследования (1.1) использовался широкий арсенал идей теории почти-периодических операторов, центральными орудиями нашего анализа являются *матрица монодромии* и порожденное ей разностное уравнение с периодическими коэффициентами (*уравнение монодромии*). Эти объекты возникли как главные объекты оригинального перенормировочного подхода (метода монодромии-

зации) к исследованию спектральных свойств разностных почти-периодических уравнений, см., напр., [1–4]. Идеи метода монодромизации были перенесены на случай дифференциальных уравнений в наших работах, см., напр., [13].

При исследовании почти-периодического оператора нам пришлось последовательно изучать разные области спектральной оси, где работают разные механизмы формирования спектра. В каждом случае схема нашего анализа состояла в том, чтобы, изучив локальные асимптотики решений почти-периодического уравнения (с помощью асимптотического подхода, развитого нами в работах [12, 13, 15, 16, 18, 21]), выяснить асимптотическую функциональную структуру матрицы монодромии, а затем исследовать порожденное этой матрицей разностное почти-периодическое уравнение. В итоге, оказалось, что возникает несколько разных модельных уравнений, в каждое из которых по-своему входят асимптотические параметры (порожденные исходным асимптотическим параметром ε). Каждое из этих уравнений удавалось эффективно исследовать с помощью идей, наработанных в спектральной теории почти-периодических уравнений.

Полученные нами спектральные результаты описаны в §§4–8.

При описании спектральных результатов мы используем терминологию и известные результаты из теории периодического оператора Шредингера. Читатель найдет их в разделе 3.

2. ОЧЕНЬ КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Приводимые здесь сведения необходимы для понимания результатов и нацеленности нашего анализа. Сначала, следуя [34], мы напомним определения и основные свойства двух важнейших аналитических объектов из спектральной теории эргодических семейств операторов Шредингера – показателя Ляпунова и интегрированной плотности состояний. Затем, следуя [13], мы опишем некоторые базовые понятия и наблюдения, относящиеся к теории монодромизации.

2.1. Сведения из теории эргодических семейств операторов

Для определенности мы будем обсуждать только семейства уравнений вида

$$-\psi''(x) + P(\omega x + \theta)\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где P – вещественнозначная функция из L^2 на торе $\mathbb{T} = [0, 1]^2$, $\theta \in \mathbb{T}$ – “эргодический” параметр, нумерующий уравнения семейства, а $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ – фиксированный вектор “частот”. Мы будем считать, что ω_1 и ω_2 несоизмеримы; тогда, (2.1) – эргодическое (“ergodic” или “metrically transitive”) семейство уравнений. Отметим, что с точностью до линейной замены переменных (1.1) имеет вид (2.1).

Рассмотрим оператор $H(\theta)$, определенный левой частью (2.1). Для почти всех θ он – существенно самосопряженный оператор на $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Имеет место

Теорема 2.1. *Существуют множества Σ , Σ_{ac} и Σ_{sing} такие, что для почти всех $\theta \in \mathbb{R}$ спектр, абсолютно непрерывный спектр и сингулярный спектр оператора $H(\theta)$ совпадают с Σ , Σ_{ac} и Σ_{sing} соответственно.*

Мы будем называть Σ , Σ_{ac} и Σ_{sing} спектром, абсолютно непрерывным спектром и сингулярным спектром семейства (2.1) соответственно.

2.1.1. Плотность состояний

Фиксируем $L \in \mathbb{N}$. Рассмотрим оператор $H_L(\theta)$ – ограничение $H(\theta)$ на интервал $[-L, L]$ с условиями Дирихле на концах интервала. Для почти всех θ его спектр дискретен. Предел

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \left(\text{число собственных значений } H_L(\theta), \right. \\ \left. \text{непревосходящих } E \right) \quad (2.2)$$

существует для почти всех θ и не зависит от θ . Этот предел называется интегрированной плотностью состояний.

Замечание 2.1. Формула (2.2) определяет интегрированную плотность состояний для $P \in L_{\text{loc}}^4$. Для потенциала из L_{loc}^2 она определяется по другому, см. теорему Бендерского–Пастура из [34].

Интегрированная плотность состояний обладает следующими свойствами:

- N – монотонно неубывающая функция E ;
- N – непрерывна по E (теорема Пастура);
- для почти всех θ спектр оператора $H(\theta)$ совпадает с замыканием множества точек роста N (теорема Пастура).

2.1.2. Показатель Ляпунова

Перепишем (2.1) в виде

$$y'(x) = M(x, \theta)y(x), \quad M(x, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P - E & 0 \end{pmatrix},$$

$$y(x) \in \mathbb{C}^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Обозначим через $Y(x, \theta)$ фундаментальное матричное решение для уравнения (2.3). Для почти всех θ пределы

$$\Theta^\pm(E) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} \ln \|Y(x, \theta)\| \quad (2.4)$$

существуют, совпадают и не зависят от θ . Их общее значение называется показателем Ляпунова семейства операторов $H(\theta)$.

Показатель Ляпунова обладает следующими свойствами:

- показатель Ляпунова – неотрицательная функция E ;
- для почти всех θ абсолютно непрерывный спектр оператора $H(\theta)$ совпадает с существенным замыканием множества нулей показателя Ляпунова (теорема Исии–Пастура–Котани).

2.2. Сведения из теории монодромизации

Здесь мы ограничимся обсуждением семейства уравнений (1.1).

2.2.1. Матрица монодромии

Пусть $\psi_{1,2}(x, z)$ – решения индивидуального уравнения (1.1) с $0 \leq z < 1$. Пусть они определены для всех $0 \leq z < 1$. Мы говорим, что они образуют *согласованный базис* для семейства уравнений (1.1), если их вронскиан отличен от нуля и не зависит от z , а сами решения периодичны по z с периодом единица:

$$\psi_{1,2}(x, z + 1) = \psi_{1,2}(x, z), \quad \forall x, z. \quad (2.5)$$

Заметим, что согласованным оказывается, например, базис из решений, удовлетворяющих начальным условиям

$$\psi_1(0, \theta) = \psi_2'(0, \theta) = 0, \quad \psi_1'(0, \theta) = \psi_2(0, \theta) = 1.$$

Функции $x \mapsto \psi_{1,2}(x + 2\pi/\varepsilon, z + 2\pi/\varepsilon)$ являются решениями уравнения (1.1) вместе с $x \mapsto \psi_{1,2}(x, z)$. Поэтому, выполнено соотношение

$$\Psi(x + 2\pi/\varepsilon, z + 2\pi/\varepsilon) = M(z)\Psi(x, z), \quad \Psi(x, z) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, z) \\ \psi_2(x, z) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где $M(z)$ – 2×2 -матрица с коэффициентами, независимыми от x . Эту матрицу мы называем *матрицей монодромии*, соответствующей согласованному базису (ψ_1, ψ_2) . Отметим, что $\det M(z) \equiv 1$ и $M(z+1) = M(z) \forall z$.

Замечание 2.2. Если в (1.1) $V = 0$, а $\psi_{1,2}$ не зависят от z , то (1.1) – уравнение Шредингера с потенциалом периодическим с периодом $2\pi/\varepsilon$, а (2.6) – стандартное определение матрицы монодромии для периодического уравнения Шредингера.

2.2.2. Уравнение монодромии

Положим $h = \{2\pi/\varepsilon\}$. Пусть M – матрица монодромии, соответствующая согласованному базису $(\psi_{1,2})$. Уравнение

$$\chi(m+1) = M(z+mh)\chi(m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (2.7)$$

называется *уравнением монодромии*. Переход от исходного уравнения к соответствующему уравнению монодромии мы называем *монодромизацией*.

Главное свойство уравнения монодромии состоит в том, что поведение его решений при $m \rightarrow \pm\infty$ “повторяет” поведение решений уравнения (1.1) при $x \rightarrow \mp\infty$:

Теорема 2.2 ([13]). Пусть $\psi_{1,2}$ – согласованный базис решений (1.1), и пусть M – соответствующая матрица монодромии. Фиксируем $z \in \mathbb{R}$. Тогда, для любого решения χ уравнения (2.7) существует единственное решение f уравнения (1.1) такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} f(x+2\pi m/\varepsilon, z) \\ f'(x+2\pi m/\varepsilon, z) \end{pmatrix} = \Psi(x, z-mh) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \chi_{-m},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \frac{d\psi_1}{dx} & \frac{d\psi_2}{dx} \end{pmatrix}.$$

И наоборот, для любого решения f уравнения (1.1) существует единственное решение χ уравнения (2.7), удовлетворяющее этому соотношению.

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

Здесь мы описываем основные результаты из теории периодического оператора Шредингера, используемые в этом обзоре. Мы рассматриваем оператор Шредингера $H_p = -\frac{d^2}{dx^2} + V$, действующий

в $L^2(\mathbb{R})$. Доказательства результатов, описанных в этом параграфе, можно найти, например, в [8, 31, 33].

3.0.3. Спектр и блоховские решения

1. Спектр оператора H_p абсолютно непрерывен и состоит из отрезков

$$[E_1, E_2], [E_3, E_4], \dots [E_{2n+1}, E_{2n+2}], \dots$$

вещественной оси, таких что

$$E_1 < E_2 \leq E_3 < E_4 \dots E_{2n} \leq E_{2n+1} < E_{2n+2} \leq \dots \quad (3.1)$$

$$E_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3.2)$$

Точки E_n , $n \in \mathbb{N}$, оказываются собственными значениями периодического оператора, ограниченного на отрезок $[0, 2]$ с периодическими граничными условиями.

Отрезки $[E_{2n-1}, E_{2n}]$, $n \geq 1$, называются *спектральными зонами*, а интервалы (E_{2n}, E_{2n+1}) , $n \geq 1$, называются *спектральными лакунами*. Если $E_{2n} < E_{2n+1}$, то говорят, что n -ая лакуна *открыта*. В противном случае, говорят, что она *закрыта*. Спектральную зону, окруженную открытыми лакунами, называют *изолированной*.

2. Пусть ψ – нетривиальное решение уравнения Шредингера $-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$, удовлетворяющее соотношению $\psi(x+1) = \mu\psi(x)$ с некоторым $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, независимым от x . Такое решение называется *блоховским*.

3. Множитель $\mu(E)$, соответствующий $\psi(x, E)$, можно представить в виде $\mu(E) = \exp(ik(E))$. Функция k называется *блоховским квазиимпульсом*.

Это – многозначная аналитическая функция E . Точки ветвления k совпадают с концами открытых лагун.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, не содержащая точек ветвления квазиимпульса. Фиксируем на D однозначную аналитическую ветвь k . Обозначим ее через k_0 . Все остальные ветви k , однозначные и аналитические на D , выражаются через k_0 формулами $k_{\pm, l}(E) = \pm k_0(E) + 2\pi l$ с $l \in \mathbb{Z}$. Знаки \pm и число $l \in \mathbb{Z}$ “нумеруют” эти ветви.

4. Рассмотрим комплексную плоскость, разрезанную вдоль \mathbb{R} от E_1 до $+\infty$. Обозначим полученную область через \mathbb{C}_p . На ней можно

фиксировать непрерывную вплоть до границы ветвь квазиимпульса, выделенную условием

$$-ik(E) > 0, \quad E < E_1. \quad (3.3)$$

Мы будем называть эту ветвь *главной* и обозначать через k_p .

Образ \mathbb{C}_p при отображении k_p расположен в верхней полуплоскости, образы верхней и нижней полуплоскостей \mathbb{C}_+ и \mathbb{C}_- симметричны относительно мнимой оси. Функция k_p конформно отображает \mathbb{C}_+ на первый квадрант комплексной плоскости с конечными вертикальными разрезами, начинающимися из точек πl , $l \in \mathbb{N}$.

Ветвь k_p вещественна и монотонна вдоль спектральных зон; для каждого $n \in \mathbb{N}$ интервал $[E_{2n-1}, E_{2n}]$ – n -ая спектральная зона – биективно отображается на интервал $[\pi(n-1), \pi n]$.

Образы открытых лагун – границы вертикальных разрезов. Вдоль открытых лагун вещественная часть $k_p(E)$ постоянна, а мнимая часть положительна и имеет один невырожденный максимум. Внутри n -ой лагуны $\operatorname{Re} k_p(E) = \pi n$.

Все точки ветвления k_p являются точками ветвления как у квадратного корня: в достаточно малой окрестности точки ветвления E_n ветвь k_p – аналитическая функция переменной $\sqrt{E - E_n}$ и

$$k_p(E) - k_p(E_n) = c_n \sqrt{E - E_n} + O(E - E_n), \quad c_n \neq 0. \quad (3.4)$$

4. СОХРАНЕНИЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА В СРЕДНЕЙ ЧАСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗОН

В этом параграфе мы описываем спектр, формирующийся при воздействии адиабатического возмущения в средней части относительно длинной зоны периодического оператора Шредингера. Для большинства достаточно малых ε большая часть этого спектра оказывается абсолютно непрерывной, а обобщенные собственные функции являются блоховскими.

4.1. Спектральные результаты

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, а $[E_{2n_0-1}, E_{2n_0}]$ – одна из спектральных зон периодического оператора H_p . Пусть J – замкнутый отрезок вещественной оси такой, что

$$E - W(\mathbb{R}) \subset]E_{2n_0-1}, E_{2n_0}[\quad \forall E \in J. \quad (4.1)$$

Отрезок J найдется, если его длина $\max W(\mathbb{R}) - \min W(\mathbb{R})$ – “размах” адиабатического возмущения – меньше длины спектральной зоны $[E_{2n_0-1}, E_{2n_0}]$.

Замечание 4.1. Длины спектральных зон растут с ростом номера n_0 , см., напр., [8, 33].

Наш основной спектральный результат дается следующей теоремой:

Теорема 4.1. ([18]). *Фиксируем $0 < \sigma < 1$. Существуют число $S > 0$ и множество диофантовых чисел $\mathbb{D} \subset (0, 1)$ такие, что при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\frac{\text{mes}(\mathbb{D} \cap (0, \varepsilon))}{\varepsilon} = 1 + o(\varepsilon \lambda^\sigma), \quad \text{где } \lambda = \exp\left(-\frac{S}{\varepsilon}\right); \quad (4.2)$$

для любого достаточно малого $\varepsilon \in \mathbb{D}$ имеется борелевское множество $B \subset J$ малой лебеговской меры,

$$\frac{\text{mes}(B)}{\text{mes}(J)} = O(\lambda^{\sigma/2}),$$

такое, что $J \setminus B$ содержится в абсолютно непрерывном спектре семейства уравнений (1.1); для всех $E \in J \setminus B$ существуют два линейно независимых (блховских) решения $\psi_\pm(x, E)$ уравнения (1.1), допускающих представление

$$\psi_\pm(x) = e^{\pm i p(E)x} P_\pm(x - z, \varepsilon x, E), \quad (4.3)$$

где p – монотонно неубывающая липшицева функция E , функции P_\pm отличаются комплексным сопряжением, $P_- = \overline{P_+}$, функция $(x, \zeta, E) \mapsto P_+(x, \zeta, E)$ периодична с периодом 1 по $x \in \mathbb{R}$ и 2π -периодична по $\zeta \in \mathbb{R}$. Она принадлежит H_{loc}^2 по x , аналитична по ζ в некоторой постоянной (независящей от ε) окрестности вещественной оси и является липшицевой по E .

Заметим, что число λ из оценок теоремы экспоненциально мало при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В [7, 9] рассматривались одномерные операторы Шредингера с аналитическими почти-периодическими потенциалами. Было доказано, что для почти всех частот при больших значениях спектрального параметра, а для малого потенциала и везде, спектр является абсолютно непрерывным. Нам не требуются предположения о больших

энергиях и о величине потенциала. Кроме того, слагаемое V в потенциале должно быть лишь локально интегрируемо с квадратом. Насколько мы знаем, этот результат и другие наши результаты являются первыми результатами о природе спектра почти-периодических операторов с негладкими потенциалами.

Блоховские решения ψ_{\pm} , описанные в теореме 4.1 имеют ту же функциональную структуру, что и построенные в [7, 9]. В нашем случае, регулярность решений $e^{\pm ip(E)x} P_{\pm}(x-z, \varepsilon x, E)$ по “медленной” переменной εx определяется функцией W , а по “быстрой” переменной $x - z$ — функцией V .

4.2. Асимптотики матрицы монодромии

Для описания асимптотик нам потребуется *фазовый интеграл*

$$\Phi(E) = \int_0^{2\pi} \kappa(\zeta) d\zeta, \quad (4.4)$$

где

$$\kappa(\zeta) = \begin{cases} k_p(E - W(\zeta)) - \pi(n_0 - 1), & \text{если } n_0 \text{ нечетное,} \\ \pi n_0 - k_p(E - W(\zeta)), & \text{если } n_0 \text{ четное,} \end{cases}$$

а k_p — главная ветвь Блоховского квазиимпульса. При условии (4.1) функция Φ аналитична по E в некоторой окрестности J и принимает вещественные значения при $E \in J$; $\Phi'(E) \neq 0$ на J .

В дальнейшем, мы будем систематически использовать следующее обозначение. Для комплекснозначной функции комплексных переменных z_1, z_2, \dots, z_n , мы положим

$$g^*(z_1, z_2, \dots, z_n) = \overline{g(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)}. \quad (4.5)$$

Теорема 4.2. *Фиксируем $E_0 \in J$. Имеются положительное число S_0 и окрестность V_0 точки E_0 такие, что при достаточно малом ε существует согласованный базис решений семейства уравнений (1.1), для которого матрица монодромии аналитична по $(E, z) \in V_0 \times \{|\operatorname{Im} z| \leq y/\varepsilon\}$ с некоторым $y > 0$, независимым от ε ; имеет вид*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}; \quad (4.6)$$

при $(E, z) \in V_0 \times \{|\operatorname{Im} z| \leq y/\varepsilon\}$ допускает равномерное асимптотическое представление

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \left(I + O \left(e^{-2\pi \frac{S_0 - \varepsilon |\operatorname{Im} z|}{\varepsilon}} \right) \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.7)$$

с независимым от z $u = \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \Phi(E) + i\Phi_1(E) + o(1) \right)$, где Φ_1 и $o(1)$ – аналитические функции в V_0 , вещественные на $V_0 \cap \mathbb{R}$; Φ_1 не зависит от ε .

Теорема 4.2 доказана в с помощью комплексного метода ВКБ, упоминавшегося во Введении. Она вытекает результатов работы [18]: из теоремы 1.1 и наблюдения из раздела 8.3.1

Для рассматриваемого широкого класса возмущений W невозможно получить дополнительную асимптотическую информацию о поправочном слагаемом в (4.7). Сузив класс возмущений, можно получить старший член его асимптотики. Он оказывается тригонометрическим полиномом первого порядка.

В качестве S в теореме 4.1, можно выбрать любое положительное число, меньшее S_0 из теоремы 4.2. Разность $S_0 - S$ определяет размер полосы аналитичности по ζ функций $P_{\pm}(x, \zeta, E)$.

4.3. Идеи доказательства спектральных результатов

С точностью до поправочного члена матрица монодромии M из теоремы 4.2 – постоянная диагональная матрица с диагональными элементами, равными по модулю единице при вещественных E .

Рассмотрим уравнение монодромии (2.7) с этой матрицей M . Если бы поправочного члена не было, то можно было бы явно построить решения этого уравнения. Отсюда и из теоремы 2.2 вытекало бы существование ограниченных (блоховских) решений для всех уравнений семейства (1.1). Тогда, используя теорему Исии–Пастура–Котани, можно было бы заключить, что при рассматриваемых E спектр является абсолютно непрерывным.

Мы учитываем влияние поправочного члена, используя конструкцию из [13], основанную на стандартных идеях КАМ теории. Это позволяет построить ограниченные решения уравнения монодромии для E , находящиеся вне “плохого” борелевского множества B . Условия “ $\varepsilon \in \mathbb{D}$ ” и “ $E \notin B$ ” необходимы для контроля малых знаменателей, возникающих при использовании КАМ теории. Отметим, что “плохое” множество оказывается счетным объединением интервалов

малой суммарной меры, центры которых описываются “условиями квантования” вида

$$\frac{1}{\varepsilon} \Phi(E) + \Phi_1(E) + o(1) = \pi(k \cdot h + l), \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

и являются резонансами теории КАМ.

Построив (вне “плохого” множества) решения уравнения монодромии, мы с помощью теоремы 2.2 доказываем утверждения теоремы 4.1 о решениях уравнения (1.1). Из их ограниченности следует, что показатель Ляпунова для семейства уравнений (1.1) равен нулю на $J \setminus B$. Отсюда и из теоремы Исси–Пастура–Котани [34] вытекает утверждение теоремы 4.1 об абсолютно непрерывном спектре.

Замечание 4.2. Фактически мы устанавливаем связь между блоховскими решениями уравнений, связанных монодромизацией. Для разностных уравнений, такая связь была исследована в [2].

5. РАЗРУШЕНИЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА НА НЕБОЛЬШИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗОНАХ

Здесь, следуя [15], мы обсудим спектр, формирующийся под воздействием адиабатического возмущения на месте относительно небольших спектральных зон периодического оператора Шредингера. Мы опишем асимптотику показателя Ляпунова на рассматриваемом интервале спектральной оси и увидим, что имеющийся на этом интервале спектр является сингулярным.

5.1. Спектральные результаты

В этом параграфе дополнительно к условиям (Н1)–(Н4) мы предполагаем, что W имеет в точности один максимум и один минимум на $[0, 2\pi)$. Для определенности мы считаем, что максимум расположен в нуле, а минимум – в точке $0 < \zeta^* < 2\pi$.

5.1.1. Предположения об изучаемом интервале спектральной оси

Мы предполагаем, что имеется замкнутый интервал $J \subset \mathbb{R}$ и два натуральных числа n и t такие, что

- зоны $[E_{2(n+j)-1}, E_{2(n+j)}]$, $j = 0, 1, \dots, t$, изолированы; $\forall E \in J$, они содержатся во внутренней части отрезка $E - W(\mathbb{R})$, а остальной спектр находится вне $E - W(\mathbb{R})$.

Ниже мы будем рассматривать только случай нечетного n ; результаты для четного n аналогичны.

5.1.2. Комплексный импульс и коэффициенты туннелирования

Рассмотрим точки ζ , удовлетворяющие уравнению $E_j = E - W(\zeta)$, $j \in \mathbb{N}$. При наших условиях на W и J на интервале $[0, 2\pi]$ эти уравнения имеют решения при $2n - 1 \leq j \leq 2(n + m)$. При этом для каждого такого j имеются две решения ζ_j^\pm ,

$$0 < \zeta_j^- < \zeta^*, \quad \zeta^* < \zeta_j^+ < 2\pi.$$

Точки ζ_j^\pm , $j = 2n - 1, 2n, \dots, 2(n + m)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} 0 < \zeta_{2n-1}^- < \zeta_{2n}^- \cdots \zeta_{2(n+m)}^- < \zeta^* \\ < \zeta_{2(n+m)}^+ < \zeta_{2(n+m)-1}^+ \cdots \zeta_{2n-1}^+ < 2\pi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Заметим, что отображение $\zeta \rightarrow \mathcal{E}(\zeta) = E - W(\zeta)$ переводит точки ζ_j^\pm в концы открытых лакун периодического оператора.

Пусть \mathcal{G} – семейство отрезков:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_j^- &= (\zeta_{2j}^-, \zeta_{2j+1}^-), \quad \mathfrak{g}_j^+ = (\zeta_{2j+1}^+, \zeta_{2j}^+), \quad j = n, n+1, \dots, n+m-1, \\ \mathfrak{g}_{n-1} &= (\zeta_{2n-1}^+ - 2\pi, \zeta_{2n-1}^-), \quad \mathfrak{g}_{n+m} = (\zeta_{2(n+m)}^-, \zeta_{2(n+m)}^+). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Заметим, что \mathcal{E} отображает эти отрезки (без их концов) в лакуны периодического оператора.

Пусть $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$, а $G(\mathfrak{g})$ – замкнутая кривая, которая обходит отрезок \mathfrak{g} инфинитезимально близко к нему. На каждой из таких кривых можно фиксировать непрерывную ветвь комплексного импульса $\kappa(\zeta) = k(\mathcal{E}(\zeta))$.

Определим коэффициенты туннелирования:

$$t(\mathfrak{g}) = e^{-\frac{1}{2\varepsilon} S(\mathfrak{g})}, \quad S(\mathfrak{g}) = i \oint_{G(\mathfrak{g})} \kappa(\zeta) d\zeta, \quad \mathfrak{g} \in \mathcal{G}. \quad (5.3)$$

В каждом из интегралов мы интегрируем ветвь комплексного импульса непрерывно на контуре интегрирования.

Оказывается, что действия $S(\mathfrak{g})$ аналитичны по E в окрестности J . При $E \in J$, они вещественны и не обращаются в нуль. Мы будем выбирать направления интегрирования так, чтобы все действия были положительны при $E \in J$. При таком выборе коэффициенты туннелирования экспоненциально малы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

5.1.3. Показатель Ляпунова и спектр

При наших условиях относительно W и J справедлива

Теорема 5.1. *При достаточно малом ε показатель Ляпунова семейства уравнений (1.1) на интервале J описывается равномерными асимптотическими формулами:*

$$\Theta(E) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}} \ln \frac{1}{t(\mathfrak{g})} + o(1) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}} S(\mathfrak{g}) + o(1). \quad (5.4)$$

Из этой теоремы вытекает положительность Θ на J .

Напомним, что Σ – спектр эргодического семейства уравнений. Мы используем следующее простое наблюдение

Теорема 5.2. ([13]). *Пусть $\tilde{\Sigma} = \sigma(H_p) + W(\mathbb{R})$, где $\sigma(H_p)$ – спектр периодического оператора. Тогда, $\forall \varepsilon \geq 0$, $\Sigma \subset \tilde{\Sigma}$; для любого компакта $K \subset \tilde{\Sigma}$ при достаточно малом ε*

$$\Sigma \cap (E - \varepsilon^{1/2}, E + \varepsilon^{1/2}) \neq \emptyset \quad \forall E \in K.$$

Из этого наблюдения, положительности показателя Ляпунова на J и теоремы Исии–Пастура–Котани, см. раздел 2.1.2, вытекает

Теорема 5.3. *При предположениях этого параграфа относительно W и J при достаточно малом ε*

$$\Sigma \cap J \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \Sigma \cap J \subset \Sigma_{\text{sing}},$$

где Σ_{sing} – сингулярный спектр семейства уравнений (1.1).

Заметим, что до нашей работы сингулярный спектр для уравнений с потенциалами достаточно общего вида был обнаружен только для аналитических потенциалов в случае большой константы связи: напр., в [22] для $W(\zeta) = \alpha \cos \zeta$, $\varepsilon \sim 1$ (нет адиабатического параметра) и $\alpha \rightarrow \infty$ (большая константа связи) было доказано, что нижняя часть спектра сингулярна.

5.2. Асимптотики матрицы монодромии

Матрица монодромии вычисляется асимптотически для согласованного базиса, построенного с помощью адиабатического комплексного метода ВКБ. Для простоты изложения опишем асимптотику матрицы монодромии лишь в случае, когда $m = 0$, т.е., когда отрезок $E - W(\mathbb{R})$ содержит лишь одну – n -ую – изолированную зону периодического оператора.

Теорема 5.4. Пусть $E_0 \in J$. Существуют число $y > 0$ и окрестность V_0 точки E_0 такие, что при достаточно малом ε имеется согласованный базис решений (1.1), для которого матрица монодромии M аналитична по $(E, z) \in V_0 \times S_y = \{|\operatorname{Im} z| \leq y/\varepsilon\}$; она имеет вид (4.6); при $(E, z) \in V_0 \times S_y$ коэффициенты матрицы монодромии допускают следующие равномерные асимптотические представления:

$$a = -iF_0 - iF_1 e^{2\pi iz}, \quad b = F_0 + F_1 e^{2\pi iz},$$

где

$$F_0 = T^{-1} \exp\left(\frac{i\theta_0}{2\varepsilon} + o(1)\right),$$

$$F_1 = T^{-1} \exp\left(\frac{i\theta_1}{2\varepsilon} + o(1)\right), \quad T = e^r \prod_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}} t(\mathfrak{g}),$$

а θ_0, θ_1 и r не зависят от ζ и ε , аналитичны по $E \in V_0$ и вещественны при $E \in \mathbb{R} \cap V_0$.

Эта теорема – следствие из теоремы 1.4 из [15] (см. раздел 1.5.6 процитированной работы).

5.3. Идея вывода асимптотик показателя Ляпунова

Сначала изучается показатель Ляпунова θ для уравнения монодромии. Он определяется формулой

$$\theta(E, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \|M(z + Nh) \dots M(z + h)M(z)\|, \quad (5.5)$$

существует для почти всех z и не зависит от z . Из (5.5) и асимптотик коэффициентов матрицы монодромии сразу вытекают оценки сверху для θ . Чтобы получить оценки снизу, мы используем идеи [6, 23]. Из теоремы 5.4 вытекает, что при $E \in \mathbb{R}$ и $\delta/\varepsilon < \operatorname{Im} z < (y - \delta)/\varepsilon$, $\delta > 0$, старший член асимптотики матрицы монодромии совпадает с матрицей

$$M_0 = \overline{F_1} e^{-2\pi iz} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

для которой показатель Ляпунова θ_0 вычисляется явно. Чтобы отсюда вывести оценку снизу для “настоящего” показателя Ляпунова

θ используется его субгармоничность по z (как в [6, 23]). Полученные оценки сверху и снизу приводят к асимптотической формуле для показателя Ляпунова для уравнения монодромии. Эта формула и теорема 2.2 и приводят к асимптотике показателя Ляпунова для исходного семейства уравнений (1.1).

Замечание 5.1. 1. Фактически мы устанавливаем связь между показателями Ляпунова уравнений, связанных монодромизацией. Для разностных уравнений, такая связь была исследована в [2].

2. В работе [32] авторы обобщили наш результат; в частности, они отказались от предположения о числе экстремумов W .

6. ПЕРЕХОДЫ АНДЕРСОНА У НИЖНЕГО КРАЯ СПЕКТРА

Здесь, следуя [13], мы обсудим спектр эргодического семейства (1.1), расположенный относительно близко к нижнему краю спектра периодического оператора.

Одним из важных явлений, обнаруживаемых при исследовании спектров почти-периодических операторов, являются так называемые *переходы Андерсона* или *переходы “метал-изолятор”*. Было обнаружено численно (см., напр., [24, 26]), что для некоторых почти-периодических операторов Шредингера спектр “разбит” на интервалы, где он абсолютно непрерывен, и интервалы, где он является сингулярным. С точки зрения физиков, сингулярный спектр соответствует фазе, где материал является изолятором, а абсолютно непрерывный соответствует фазе, где материал является проводником. Гипотеза Андерсона состоит в том, что переходы от одной фазы к другой происходят на дискретном множестве значений энергии, называемых *границами подвижности (mobility edges)*.

Мы рассмотрим случай, когда $W(\xi) = \alpha \cos \xi$, где $\alpha > 0$ – *константа связи*. Мы увидим, что при этом для достаточно малого ε у нижнего края спектра семейства уравнений (1.1) могут появляться *асимптотические границы подвижности*. Насколько нам известно, это – первый аналитический результат, касающийся переходов Андерсона.

6.1. Рассматриваемая область спектральной оси

Будем предполагать, что первая лакуна в спектре периодического оператора открыта, а спектральный параметр находится на замкнутом интервале J таком, что $\forall E \in J$

$$E - \alpha < E_1, \quad E_1 < E + \alpha < E_2. \quad (6.1)$$

Эти условия означают, что отрезок $E - W(\mathbb{R})$ содержит нижний край спектра периодического оператора и находится слева от его первой лакуны.

6.2. Фазовый интеграл и коэффициенты туннелирования

Рассмотрим точки ζ , удовлетворяющие уравнению $E_j = E - W(\zeta)$, $j \in \mathbb{N}$. Для $W(\zeta) = \alpha \cos \zeta$ и $E \in \mathbb{R}$ они расположены на \mathbb{R} и прямых $\pi\mathbb{Z} + i\mathbb{R}$. Множество таких точек 2π -периодично и симметрично относительно этих линий.

Опишем эти точки на границе полосы $\Pi = \{\operatorname{Im} \zeta \geq 0, 0 \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \pi\}$. Заметим, что отображение $\zeta \rightarrow \mathcal{E}(\zeta) = E - \alpha \cos \zeta$ конформно отображает $\Pi \setminus \partial\Pi$ на \mathbb{C}_+ . При этом граница Π биективно отображается на вещественную ось. Поэтому, каждое из уравнений $E_j = E - W(\zeta)$ имеет единственное решение $\zeta_j \in \partial\Pi$. При условии (6.1), $0 < \zeta_1 < \pi$, а точки ζ_j с $j > 1$ расположены на линии $\pi + i\mathbb{R}_+$ так, что

$$0 < \operatorname{Im} \zeta_2 < \operatorname{Im} \zeta_3 < \operatorname{Im} \zeta_4 \leq \operatorname{Im} \zeta_5 < \operatorname{Im} \zeta_6 \leq \operatorname{Im} \zeta_7 \dots$$

Заметим, что неравенство $\operatorname{Im} \zeta_2 < \operatorname{Im} \zeta_3$ — строгое (так как мы предположили, что первая лакуна открыта).

Определим в Π главную ветвь комплексного импульса формулой $\kappa_p(\zeta) = k_p(\mathcal{E}(\zeta))$ и определим действия

$$S_h = -i \int_{-\zeta_1}^{\zeta_1} \kappa_p d\zeta \quad \text{и} \quad S_v = i \int_{2\pi - \zeta_2}^{\zeta_2} (\kappa_p - \pi) dk,$$

где мы интегрируем по отрезкам линий \mathbb{R} и $\pi + i\mathbb{R}$ соответственно, и фазовый интеграл

$$\Phi = \int_{\zeta_1}^{2\pi - \zeta_1} \kappa_p d\zeta, \quad (6.3)$$

где мы интегрируем по отрезку \mathbb{R} . В этих формулах мы интегрируем ветвь комплексного импульса, получаемую аналитическим продолжением ветви κ_p из Π вдоль контура.

Функции S_h , S_v и Φ положительны на отрезке J и аналитичны в некоторой его окрестности. Кроме того, на J $\Phi'(E) > 0$. Определим коэффициенты туннелирования формулами:

$$t_h = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} S_h\right), \quad t_v = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} S_v\right). \quad (6.4)$$

Коэффициенты туннелирования экспоненциально малы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

6.3. Асимптотики матрицы монодромии

Договоримся представлять периодические функции $f : z \mapsto f(z)$ в виде $f = f_0 + f_1(z)$, где f_0 – нулевой коэффициент Фурье f .

Теорема 6.1. Пусть $E = E_0 \in J$, а $y = \text{Im } \zeta_3$. Пусть $S_y = \{|\text{Im } z| < y/\varepsilon\}$. Имеется окрестность V_0 точки E_0 такая, что при достаточно малом ε в пространстве решений (1.1) существует согласованный базис, для которого матрица монодромии $M(E, z)$ аналитична в $V_0 \times S_y$ и имеет вид (4.6). В $V_0 \times S_y$ ее коэффициенты a и b описываются равномерными асимптотическими формулами:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0(E) = -\frac{1}{t_h} e^{\frac{i\Phi}{\varepsilon}} (1 + o(1)), \\ a_1(z) &= \tilde{a}(z, E) = -\frac{t_v}{t_h} e^{2i\pi(z-z_0)} (1 + o(1)), \\ b_0 &= b_0(E) = \frac{1}{t_h} e^{\frac{i\Phi}{\varepsilon}} (1 + o(1)), \\ b_1(z) &= \tilde{b}(z, E) = \frac{t_v}{t_h} e^{2i\pi(z-z_0)} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\Phi = \Phi(E)$, $t_h = t_h(E)$ и $t_v = t_v(E)$; $z_0 = -\pi/\varepsilon + \phi_0(E)$, где функция ϕ_0 аналитична, вещественна при $E \in J$ и не зависит от ε .

6.4. Расположение спектра на J

Рассмотрим точки $E^{(l)} \in J$, $l \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon} \Phi(E^{(l)}) = \pi/2 + \pi l. \quad (6.5)$$

При малых ε число таких точек имеет порядок $1/\varepsilon$, а расстояния между соседними точками удовлетворяют неравенствам:

$$c_1 \varepsilon \leq E^{(l)} - E^{(l-1)} \leq c_2 \varepsilon,$$

где $c_1, c_2 > 0$ – числа, независимые от ε .

Теорема 6.2. Для достаточно малых ε спектр Σ семейства (1.1) на отрезке J содержится в объединении интервалов (I_l) таких, что I_l содержится в $o(\varepsilon)$ -окрестности $E^{(l)}$, мера I_l имеет асимптотику

$$|I_l| = 2 \frac{\varepsilon (t_v(E^{(l)}) + t_h(E^{(l)}))}{\Phi'(E^{(l)})} (1 + o(1)), \quad (6.6)$$

а приращение плотности состояний семейства (1.1) на каждом из I_l равно $\frac{\varepsilon}{2\pi}$.

Замечание 6.1. Опишем идею доказательства этой теоремы. Старший член асимптотики следа матрицы монодромии вдали от точек $E^{(l)}$ равен $-2t_h^{-1}(E) \cos(\Phi(E)/\varepsilon)$ и является экспоненциально большим. Благодаря этому, удается доказать, что уравнение монодромии имеет два линейно независимых решения ψ_{\pm} , экспоненциально быстро убывающих соответственно на $\pm\infty$. С помощью теоремы 2.2 легко устанавливается, что имеются аналогичные решения (1.1). Отсюда вытекает, что соответствующие E находятся вне спектра (1.1). Существование (блоховских) решений ψ_{\pm} доказывается с помощью конструкции из [2].

6.5. Природа спектра

Пусть

$$\lambda(E) = t_v(E)/t_h(E), \quad \Delta S(E) = -\ln \lambda(E) = S_v(E) - S_h(E).$$

Положим

$$J^- = \{E \in J : \Delta S(E) < 0\} \quad \text{и} \quad J^+ = \{E \in J : \Delta S(E) > 0\}.$$

Если $J^+ \neq \emptyset$ (соотв., $J^- \neq \emptyset$), то при достаточно малом ε число интервалов $I_l \subset J^+$ (соотв., $I_l \subset J^-$) имеет порядок $1/\varepsilon$. Мы докажем

Теорема 6.3. Пусть I – фиксированный замкнутый отрезок, расположенный во внутренней J^+ . Положим $\lambda_I = e^{-\min_{E \in I} \Delta S(E)/\varepsilon}$. Фиксируем $\sigma \in (0, 1)$. Существует $\mathbb{D} \subset (0, 1)$ – подмножество множества диофантовых чисел такое, что

$$\text{mes}(\mathbb{D} \cap (0, \varepsilon)) / \varepsilon = 1 + O(\varepsilon \lambda_I^\sigma), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (6.7)$$

для достаточно малого $\varepsilon \in \mathbb{D}$ каждый из интервалов $I_l \subset I$ содержит абсолютно непрерывный спектр и

$$\text{mes}(I_l \cap \Sigma_{ac}) / \text{mes} I_l = 1 + o(1), \quad (6.8)$$

где Σ_{ac} – абсолютно непрерывный спектр семейства уравнений (1.1).

Доказательство этой теоремы следует схеме, намеченной в разделе 4.3. Действуя по этой схеме можно показать, что обобщенные функции абсолютно непрерывного спектра являются блоховскими решениями.

Спектр на J^- описывает

Теорема 6.4. Пусть I – фиксированный замкнутый отрезок, расположенный во внутренней J^- . При достаточно малом ε каждый из $I_l \subset I$ содержит сингулярный спектр. Более того, при $E \in I$ показатель Ляпунова семейства (1.1) удовлетворяет неравенству:

$$\Theta(E) \geq \frac{1}{2\pi} (S_h(E) - S_v(E)) + o(\varepsilon). \quad (6.9)$$

Доказательство этой теоремы следует схеме, намеченной в разделе 5.3. Заметим, что можно получить не только оценку снизу, но и старший член асимптотики показателя Ляпунова (аналогично описанному в предыдущем разделе), однако для этого требуется значительно более точное описание асимптотик матрицы монодромии. Необходимая для этого техника развита в [21].

6.6. Фазовая диаграмма

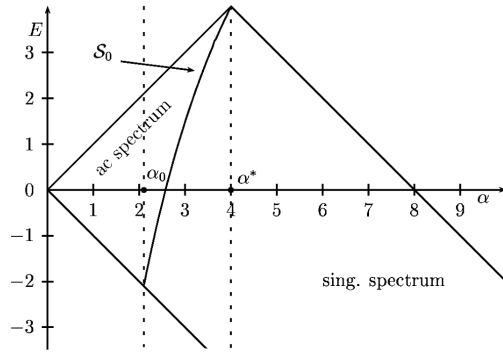
Чтобы убедиться, что на интервале J действительно возможно существование разных типов спектра, в работе [13] была исследована зависимость $\Delta S(E) = S_v(E) - S_h(E)$ и от E , и от константы связи α . Опишем некоторые результаты этого исследования. Ниже мы будем явно указывать зависимость S_h , S_v и ΔS от α .

Пусть \mathcal{S} – множество на плоскости (α, E) , внутри которого выполнено условие (6.1). Существуют числа α_0 и α^* такие, что $0 < \alpha_0 < \alpha^* < \infty$ и

- в области $\mathcal{S} \cap \{\alpha < \alpha_0\}$ $\Delta S(\alpha, E) > 0$;
- в области $\mathcal{S} \cap \{\alpha > \alpha^*\}$ $\Delta S(\alpha, E) < 0$;
- при $\alpha_0 < \alpha < \alpha^*$ уравнение $\Delta S(\alpha, E) = 0$ имеет конечное непустое множество решений.

В условиях теоремы 6.3 при $\alpha < \alpha_0$ и достаточно малом ε асимптотически весь спектр на J оказывается абсолютно непрерывным. Согласно теореме 6.4, при $\alpha > \alpha^*$ и достаточно малом ε спектр на J оказывается сингулярным. При $\alpha^* > \alpha > \alpha_0$ возникают (асимптотические) переходы Андерссона.

Опишем результат численного решения уравнения $\Delta S(\alpha, E) = 0$. В качестве V мы выбираем однозонный потенциал (см., например, [33]). Спектр соответствующего периодического оператора имеет вид $[E_1, E_2] \cup [E_3, +\infty)$. В нашем случае $E_1 = 0$, $E_2 = 8$. Значение E_3 выбрано так, чтобы период потенциала был равен единице. На рис. 1 мы изобразили полуполосу \mathcal{S} ; в области, помеченной надписью

Рис. 1. Фазовая диаграмма для однозонного V .

“ac spectrum” $\Delta S(\alpha, E) > 0$; в области, помеченной надписью “sing. spectrum” $\Delta S(\alpha, E) < 0$. Мы видим, что при “включении” адиабатического возмущения возникает один асимптотический переход Андерсона; при этом сингулярным в первую очередь становится нижний край спектра.

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОСЕДНИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗОН: НЕРЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ

Здесь, следуя [21], мы начинаем обсуждать спектр, возникающий в относительно небольших лакунах периодического оператора под действием адиабатического возмущения. При его изучении наблюдаются эффекты отталкивания уровней (как в задаче о двух близких потенциальных ямах), влияющие на природу спектра. Мы опять рассматриваем случай, когда $W(\zeta) = \alpha \cos \zeta$, где $\alpha > 0$ – фиксированная константа связи. Кроме того, мы предполагаем, что все лакуны в спектре периодического оператора H_p открыты.

7.1. Изучаемая область спектральной оси

Будем считать, что спектральный параметр находится на замкнутом отрезке J таком, что для всех $E \in J$

$$E_{2n-1} < E - \alpha < E_{2n}, \quad E_{2n+1} < E + \alpha < E_{2n+2}, \quad (7.1)$$

где $n \in \mathbb{N}$ – фиксированное число.

Замечание 7.1. Заметим, что при больших E длины лакун малы, а длины зон велики. Таким образом, для фиксированного α обсуждаемый интервал J существует для бесконечного числа соседних зон.

Мы будем рассматривать только случай, когда n в (7.1) – четное. Случай нечетного n описывается аналогично.

7.2. Фазовые интегралы и коэффициенты туннелирования

Точки, удовлетворяющих уравнениям $E_l = E - \alpha \cos \zeta$, $l \in \mathbb{N}$, обсуждались в разделе 6.2. Обсудим расположение таких точек на границе полосы $\Pi = \{\operatorname{Im} \zeta \geq 0, 0 \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \pi\}$ при условии (7.1). Легко видеть, что точки ζ_j с $j < 2n$ расположены на линии $i\mathbb{R}_+$ так, что

$$0 < \operatorname{Im} \zeta_{2n-1} < \operatorname{Im} \zeta_{2n-2} \cdots < \zeta_1;$$

точки ζ_{2n} и ζ_{2n+1} удовлетворяют неравенствам $0 < \zeta_{2n} < \zeta_{2n+1} < \pi$; наконец, точки ζ_j с $j > 2n+1$ расположены на линии $\pi + i\mathbb{R}_+$ так, что

$$0 < \operatorname{Im} \zeta_{2n+2} < \operatorname{Im} \zeta_{2n+3} \cdots$$

Определим главную ветвь комплексного импульса как в разделе 6.2 и определим фазовые интегралы формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_0(E) &= - \int_{-\zeta_{2n}}^{\zeta_{2n}} (\kappa_p - \pi n) d\zeta, \\ \Phi_\pi(E) &= \int_{\zeta_{2n+1}}^{2\pi - \zeta_{2n+1}} (\kappa_p - \pi n) d\zeta, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где интегралы берутся по отрезкам вещественной оси. Определим *вертикальные действия*

$$\begin{aligned} S_{v,0}(E) &= -i \int_{\zeta_{2n-1}}^{\zeta_{2n-1}} (\kappa_p - \pi(n-1)) d\zeta, \\ S_{v,\pi}(E) &= i \int_{\zeta_{2n+2}}^{\zeta_{2n+2}} (\kappa_p - \pi(n+1)) d\zeta, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где интегралы берутся по отрезкам прямых $\operatorname{Re} \zeta = 0$ и $\operatorname{Re} \zeta = \pi$, и *горизонтальные действия*:

$$\begin{aligned} S_{h,0}(E) &= i \int_{-\zeta_{2n+1}}^{-\zeta_{2n}} (\kappa_p - \pi n) d\zeta, \\ S_{h,\pi}(E) &= -i \int_{\zeta_{2n}}^{\zeta_{2n+1}} (\kappa_p - \pi n) d\zeta, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где интегралы берутся вдоль вещественной оси. В каждом из интегралов (7.2)–(7.4) мы интегрируем ветвь комплексного импульса, полученную из главной ветви κ_p аналитическим продолжением из полуполосы Π вдоль контура.

Фазовые интегралы и действия оказываются положительными на интервале J и аналитическими в некоторой его окрестности. Кроме того, при $E \in J$ $\Phi'_0(E) < 0$ и $\Phi'_\pi(E) > 0$.

Наконец, мы введем коэффициенты туннелирования:

$$t_{\mu,\nu}(E) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} S_{\mu,\nu}(E)\right), \quad \mu \in \{v, h\}, \quad \nu \in \{0, \pi\}. \quad (7.5)$$

Легко проверить, что $S_{h,0} = S_{h,\pi}$ и $t_{h,0} = t_{h,\pi}$. Нам также потребуются функции $S_h = S_{h,0} + S_{h,\pi}$ и $t_h = t_{h,0} \cdot t_{h,\pi}$.

7.3. Геометрическое условие

Всюду в дальнейшем, мы будем предполагать, что на J выполнено условие:

$$\begin{aligned} &2\pi \cdot \min\{\operatorname{Im} \zeta_{2n-2}(E), \operatorname{Im} \zeta_{2n+2}(E)\} \\ &> \max\{S_h(E), S_{v,0}(E), S_{v,\pi}(E)\}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Это условие выполняется, если n -ая и $(n+1)$ -ая спектральные зоны периодического оператора расположены относительно близко друг к другу и относительно далеко от остального спектра периодического оператора (мы проверяем это численно на простых примерах, см. раздел 7.10).

7.4. Грубое описание расположения спектра на J

Положим

$$\delta_0 := \frac{1}{2} \min_{E \in J} \min(S_h(E), S_{v,0}(E), S_{v,\pi}(E)) > 0. \quad (7.7)$$

Теорема 7.1. Фиксируем $E_* \in J$. При достаточно малом ε существует окрестность $V_* \subset \mathbb{C}$ точки E_* и две аналитические функции $E \mapsto \check{\Phi}_0(E, \varepsilon)$ и $E \mapsto \check{\Phi}_\pi(E, \varepsilon)$, определенные на V_* , вещественные на $V_* \cap \mathbb{R}$, допускающие равномерные асимптотики

$$\check{\Phi}_0(E, \varepsilon) = \Phi_0(E) + o(\varepsilon), \quad \check{\Phi}_\pi(E, \varepsilon) = \Phi_\pi(E) + o(\varepsilon), \quad (7.8)$$

и такие, что, если $(E_0^{(l)})_l := (E_0^{(l)}(\varepsilon))_l$ и $(E_\pi^{(l')})_{l'} := (E_\pi^{(l')}(\varepsilon))_{l'}$ – последовательности всех точек $J \cap V_*$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{1}{\varepsilon} \check{\Phi}_0(E_0^{(l)}, \varepsilon) = \frac{\pi}{2} + \pi l \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varepsilon} \check{\Phi}_\pi(E_\pi^{(l')}, \varepsilon) = \frac{\pi}{2} + \pi l', \quad l, l' \in \mathbb{Z}, \quad (7.9)$$

то спектр семейства уравнений (1.1), находящийся на $J \cap V_*$, содержится в объединении всех интервалов вида

$$I_0^{(l)} := E_0^{(l)} + [-e^{-\delta_0/\varepsilon}, e^{-\delta_0/\varepsilon}] \quad \text{и} \quad I_\pi^{(l')} := E_\pi^{(l')} + [-e^{-\delta_0/\varepsilon}, e^{-\delta_0/\varepsilon}].$$

В дальнейшем, чтобы упростить обозначения, мы не указываем аргумент ε у функций $\check{\Phi}_0$ и $\check{\Phi}_\pi$.

Легко видеть, что существует константа $C > 0$ такая, что при достаточно малом ε

$$\frac{1}{C}\varepsilon \leq E_0^{(l)} - E_0^{(l-1)} \leq C\varepsilon, \quad \frac{1}{C}\varepsilon \leq E_\pi^{(l)} - E_\pi^{(l-1)} \leq C\varepsilon.$$

Более того, при каждом $\nu \in \{0, \pi\}$, число точек $E_\nu^{(l)}$ на интервале $J \cap V_*$ имеет порядок $1/\varepsilon$.

В дальнейшем мы говорим, что точки $E_0^{(l)}$ (соотв. $E_\pi^{(l)}$) и интервалы $I_0^{(l)}$ (соотв. $I_\pi^{(l)}$) – точки и интервалы типа 0 (соотв. π).

Очевидно, при достаточно малом ε интервалы типа 0 (соотв. π) не пересекаются, а любой интервал типа 0 (соотв. π) пересекает не больше одного интервала типа π (соотв. 0).

7.5. Более точное описание расположения спектра на J

Уточним расположение спектра на интервалах из теоремы 7.1. Для определенности, будем рассматривать интервал типа π , *mutatis mutandis*, результаты для интервалов типа 0 аналогичны.

Результаты зависят от того, пересекает ли рассматриваемый интервал один из интервалов типа 0. Интервалы одного типа, пересекающие интервалы другого типа, будут называться *резонансными*. В этом параграфе мы будем изучать только *нерезонансные* интервалы.

Замечание 7.2. Поясним, как могут возникать резонансные интервалы. Напомним, что производные Φ_π и Φ_0 имеют противоположные знаки на J . Следовательно, при уменьшении ε точки типа 0 и типа π двигаются навстречу друг другу (по крайней мере, в старшем порядке по ε). Можно видеть, что эти точки двигаются непрерывно, а значит, соответствующие интервалы систематически встречаются.

Теорема 7.2. Пусть ε достаточно мало. Пусть интервал $I_\pi^{(l)}$ – нерезонансный. Тогда спектр на $I_\pi^{(l)}$ содержится в интервале $\check{I}_\pi^{(l)}$ с центром в точке

$$\check{E}_\pi^{(l)} = E_\pi^{(l)} + \varepsilon \frac{\Lambda_n(V)}{2\check{\Phi}'_\pi(E_\pi^{(l)})} t_h(E_\pi^{(l)}) \tan\left(\frac{\check{\Phi}_0(E_\pi^{(l)})}{\varepsilon}\right) \quad (7.10)$$

длины

$$|\check{I}_\pi^{(l)}| = \frac{2\varepsilon}{\check{\Phi}'_\pi(E_\pi^{(l)})} \left(\frac{t_h(E_\pi^{(l)})}{2|\cos\left(\frac{\check{\Phi}_0(E_\pi^{(l)})}{\varepsilon}\right)|} + t_{v,\pi}(E_\pi^{(l)}) \right) (1 + o(1)). \quad (7.11)$$

Величина $\Lambda_n(V)$ не меньше единицы, зависит только от периодического потенциала V и от номера n (из условия (7.1)). В (7.11) $o(1)$ стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $E \in \check{I}_\pi^{(l)}$ и l (пока $I_\pi^{(l)} \subset J$ является нерезонансным).

Замечание 7.3. Величина $\Lambda_n(V)$ изучена в работах [21, 19]. Показано, что в случае общего положения $\Lambda_n(V) > 1$.

Из следующей теоремы вытекает, что каждый из $\check{I}_\pi^{(l)}$ содержит спектр.

Теорема 7.3. В условиях теоремы 7.2, приращение интегрируемой плотности состояний (семейства (1.1)) на интервале $I_\pi^{(l)}$ равно $\frac{\varepsilon}{2\pi}$.

“Отталкивание уровней”. Пусть E_0 – точка последовательности $(E_0^{(l)})_l$, ближайшая к $E_\pi := E_\pi^{(l)}$. Анализируя формулу (7.10), мы замечаем “отталкивание” интервалов \check{I}_0 и \check{I}_π . Действительно, рассмотрим второй член в правой части (7.10). Поскольку $\check{\Phi}'_\pi(E) > 0$, он имеет тот же знак, что и $\tan\left(\frac{\check{\Phi}_0(E_\pi)}{\varepsilon}\right)$. Пусть E_0 и E_π достаточно близки друг к другу. Поскольку $\frac{1}{\varepsilon}\check{\Phi}_0(E_0) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$, и поскольку $\check{\Phi}'_0(E) < 0$,

второй член в правой части (7.10) отрицателен (соотв. положителен), когда E_π находится слева (соотв. справа) от E_0 . Это и есть отталкивание \check{I}_0 и \check{I}_π . Очевидно, отталкивание усиливается при уменьшении расстояния от E_0 до E_π .

7.6. Показатель Ляпунова на $\check{I}_\pi^{(l)}$

Положим

$$\lambda_\pi(E) = \frac{t_{v,\pi}(E)}{t_h(E)} \operatorname{dist} \left(E, \bigcup_{l'} \{E_0^{(l')}\} \right), \quad (7.12)$$

где $\operatorname{dist}(E, A)$ обозначает расстояние от точки E до множества A .

Теорема 7.4. На $\check{I}_\pi^{(l)}$ показатель Ляпунова имеет асимптотику

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \log^+ \lambda_\pi(E_\pi^{(l)}) + o(1), \quad \log^+ = \max(0, \log), \quad (7.13)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $E \in \check{I}_\pi^{(l)}$ и l , когда $I_\pi^{(l)}$ – нерезонансный.

Формула (7.13) показывает, что показатель Ляпунова на интервале $\check{I}_\pi^{(l)}$ резко уменьшается на величину порядка единицы, когда этот интервал приближается к одной из точек типа 0. Действительно, пусть на J разность $S_h - S_{v,\pi} > 0$. Фиксируем $N \in \mathbb{N}$. Если $\operatorname{dist} \left(E_\pi^{(l)}, \{E_0^{(l')}\}_{l'} \right) \geq \varepsilon^N$, то из теоремы 7.4 и формулы (7.12) следует, что

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} (S_h - S_{v,\pi})(E_\pi^{(l)}) + o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если же $\operatorname{dist} \left(E_\pi^{(l)}, \{E_0^{(l')}\} \right)$ имеет порядок $e^{-\delta/\varepsilon}$, то на $\check{I}_\pi^{(l)}$

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \left[(S_h - S_{v,\pi})(E_\pi^{(l)}) - \delta \right]^+ + o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

7.7. Общие утверждения о природе спектра

Из теоремы 7.4 и теоремы Исии–Пастура–Котани вытекает

Следствие 7.1. Фиксируем $c > 0$. При достаточно малом ε , если интервал $I_\pi^{(l)}$ является нерезонансным, а $\varepsilon \log \lambda_\pi(E_\pi^{(l)}) > c$, то $\check{I}_\pi^{(l)}$ содержит только сингулярный спектр.

Абсолютно непрерывный спектр описывает

Теорема 7.5. Для $c > 0$ существует константа $\eta > 0$ и множество $\mathbb{D} \subset (0, 1)$ такие, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{mes}(\mathbb{D} \cap (0, \varepsilon)) / \varepsilon = 1 + e^{-\eta/\varepsilon} o(1); \tag{7.14}$$

при достаточно малом $\varepsilon \in \mathbb{D}$, если $\check{I}_\pi^{(l)}$ – нерезонансный, а $\varepsilon \log \lambda_\pi(E_\pi^{(l)}) < -c$, то

$$\text{mes}(\check{I}_\pi^{(l)} \cap \Sigma_{ac}) / \text{mes}(\check{I}_\pi^{(l)}) = 1 + o(1), \tag{7.15}$$

где Σ_{ac} – абсолютно непрерывный спектр семейства (1.1). В (7.14)–(7.15) $o(1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $E \in \check{I}_\pi^{(l)}$ и l пока $\check{I}_\pi^{(l)}$ остается нерезонансным.

Замечание 7.4. Природа спектра зависит от соотношениями между величинами $S_h, S_{v,0}, S_{v,\pi}$. Как уже отмечалось, выбирая подходящим образом ε , можно сделать расстояние между последовательностями точек типа 0 и типа π произвольно малой. Этого можно добиться на подинтервале J с центром в произвольно фиксированной точке, длины $C\varepsilon$ (если C выбрана достаточно большой). На таком интервале $S_h(E), S_{v,0}(E)$ и $S_{v,\pi}(E)$ могут изменяться лишь на величины порядка ε . Поэтому, при изучении спектральных эффектов, возникающих при сближении интервалов разных типов, можно считать, что тройка $(S_h(E), S_{v,0}(E), S_{v,\pi}(E))$ принимает любое из своих возможных на J значений.

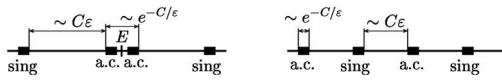


Рис. 2. Два новых явления.

7.8. Изменения природы спектра на слишком близких интервалах разных типов

Предположим, что

$$\min_{E \in J} S_h(E) > \max_{\nu \in \{0, \pi\}} \max_{E \in J} S_{v, \nu}(E)$$

и

$$\frac{3}{2} \min_{\nu \in \{0, \pi\}} \min_{E \in J} S_{v, \nu}(E) > \max_{E \in J} S_h(E).$$

Из первого условия следует, что $\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{\nu \in \{0, \pi\}} \min_{E \in J} S_{v, \nu}(E)$. Поэтому, существует $c > 0$ такая, что при $E \in J$ и $\nu \in \{0, \pi\}$

$$S_h(E) - S_{v, \nu}(E) - \delta_0 < -c < 0. \quad (7.16)$$

Рассмотрим два соседних интервала разных типов в $J \cap V_*$. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{D}$ достаточно мало (как в теореме 7.5). Тогда,

- если интервалы находятся на расстоянии порядка ε^N (где $N \in \mathbb{N}$ – фиксированно) друг от друга, то спектр на этих интервалах сингулярный;
- если интервалы находятся на расстоянии порядка $C \exp(-\delta_0/\varepsilon)$ друг от друга, то спектр на этих интервалах оказывается абсолютно непрерывным.

Мы видим, что спектр, который был бы сингулярным на достаточно далеких друг от друга интервалах, может оказаться абсолютно непрерывным, если они достаточно близки друг к другу, см. рис. 2(a). Интервалы J , на которых такое явление происходит, можно обнаружить численно, см. раздел 7.10.

7.9. Чередование интервалов с разной природой спектра

Пусть на J $\text{dist}(\{E_0^{(l)}\}, \{E_\pi^{(l')}\}) \geq \varepsilon^N$ (для некоторого фиксированного $N \in \mathbb{N}$). Тогда все интервалы $I_\nu^l \subset J$ оказываются нерезонансными. Фиксируем c . Будем считать, что $\varepsilon \in \mathbb{D}$ достаточно мало.

Если

$$\forall E \in J \quad S_{v, \pi}(E) - S_h(E) > c \quad \text{и} \quad S_{v, 0}(E) - S_h(E) < -c, \quad (7.17)$$

то на J интервалы типа 0 содержат сингулярный спектр, а интервалы типа π содержат в основном абсолютно непрерывный спектр. Возникает чередование интервалов с разной природой спектра, см. рис. 2(b).

Интервалы J , на которых может выполняться условие (7.17), можно обнаружить на компьютере (см. раздел 7.10).

7.10. Компьютерные вычисления

Проиллюстрируем компьютерными вычислениями эффекты описанные в разделах 7.8 и 7.9. Появление этих явлений зависит от соотношения величин действий S_h , $S_{v, 0}$ и $S_{v, \pi}$. Мы выберем двузонный

потенциал V . Для таких потенциалов блоховский квазиимпульс k описывается явно в терминах гиперэллиптических интегралов [25, 33], и действия легко вычисляются на компьютере. В наших вычислениях $\sigma(H_p) = [E_1, E_2] \cup [E_3, E_4] \cup [E_5, +\infty[$,

$$E_1 = 0, E_2 = 3.8571, E_3 = 6.8571, E_4 = 12.1004 \text{ и } E_5 = 100.7092.$$

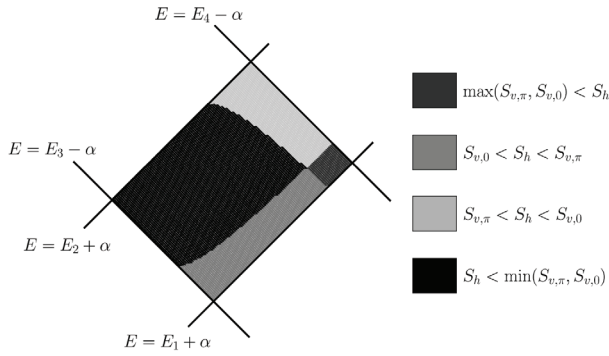


Рис. 3. Сравнение действий.

На рис. 3 мы изобразили область Δ на плоскости (α, E) , где выполнено условие (7.1) для $n = 1$.

Вычисления показывают, что условие (7.6) выполнено на всем множестве Δ . Поскольку $n = 1$, то $\zeta_{2n-2} = +i\infty$, и это условие проверяется лишь для $\zeta_{2n+3} = \zeta_5$. Выполнение условия связано с тем, что велика разность $E_5 - E_4$.

На рис. 3 **(1)** отмечены области, где либо $S_{v,0} < S_h < S_{v,\pi}$, либо $S_{v,\pi} < S_h < S_{v,0}$; в этих областях наблюдается чередование интервалов с разными типами спектра; **(2)** видна область, где множества $\{S_h > \max(S_{v,\pi}, S_{v,0})\}$ и $\{S_h < \min(S_{v,\pi}, S_{v,0})\}$ близки друг к другу; здесь происходит изменение типа спектра на достаточно близких интервалах I_ν^l разных типов.

8. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ОТНОСИТЕЛЬНО БЛИЗКИХ ЗОН: РЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ

Здесь, следуя [19], мы продолжим начатый в предыдущем разделе рассказ и рассмотрим “резонансный” случай. Наблюдаемые нами

эффекты соответствуют принципу: “чем медленнее убывание (обобщенных) собственных функций, отвечающих близким уровням энергии, тем больше взаимодействие между ними и сильнее отталкивание уровней”.

Пусть $E_0 := E_0^{(l)}$ и $E_\pi := E_\pi^{(l')}$ удовлетворяют неравенству:

$$|\Delta| \leq 2e^{-\frac{\delta_0}{\varepsilon}}, \quad \Delta = \frac{E_0 - E_\pi}{2}. \quad (8.1)$$

Тогда интервал $I_0 := I_0^{(l)}$ пересекается с интервалом $I_\pi := I_\pi^{(l')}$. Заметим, что остальные интервалы, содержащие спектр, находятся от этой пары на расстоянии порядка ε . Здесь мы изучим спектр на $I_0 \cup I_\pi$.

В резонансном случае природа и положение спектра зависят от величины параметра

$$\tau = 2\sqrt{\frac{t_{v,0}(\bar{E})t_{v,\pi}(\bar{E})}{t_h(\bar{E})}}, \quad \text{где } \bar{E} = \frac{E_\pi + E_0}{2}. \quad (8.2)$$

Так как коэффициенты туннелирования экспоненциально малы, то обычно либо $\tau \gg 1$, либо $\tau \ll 1$. Мы сконцентрируемся на изучении этих двух случаев. Мы фиксируем $\delta_\tau > 0$ и будем предполагать, что либо

$$\forall E \in V_* \cap J, \quad S_h(E) - S_{v,0}(E) - S_{v,\pi}(E) \geq \delta_\tau, \quad (8.3)$$

ссылаясь на этот случай, мы будем писать, что $\tau \gg 1$,

либо

$$\forall E \in V_* \cap J, \quad S_h(E) - S_{v,0}(E) - S_{v,\pi}(E) \leq -\delta_\tau, \quad (8.4)$$

ссылаясь на этот случай, мы будем писать, что $\tau \ll 1$.

Случай, когда $\tau \asymp 1$, является наиболее сложным (и редко встречается). Мы обсудим его кратко в конце параграфа.

Для описания результатов удобно ввести “локальные переменные”

$$\xi_\nu(E) = \frac{\check{\Phi}'_\nu(\bar{E})}{\varepsilon} \cdot \frac{E - E_\nu}{t_{v,\nu}(\bar{E})} \quad \text{где } \nu \in \{0, \pi\}. \quad (8.5)$$

Ниже все оценки равномерны по E , E_0 и E_π .

8.1. Случай большого τ

Расположение спектра описывает

Теорема 8.1. Пусть выполнено условие (8.3). При достаточно малом ε спектр семейства (1.1) на $I_0 \cup I_\pi$ расположен на интервалах

$$\check{I}_0 = \{E \in I_0 : |\xi_0(E)| \leq 1 + o(\varepsilon)\}$$

и

$$\check{I}_\pi = \{E \in I_\pi : |\xi_\pi(E)| \leq 1 + o(\varepsilon)\}.$$

Приращение интегрированной плотности состояний на их объединении равно $\frac{\varepsilon}{\pi}$. Если они не пересекаются, то приращение интегрированной плотности состояний на каждом из них равно $\frac{\varepsilon}{2\pi}$. Показатель Ляпунова на $\check{I}_0 \cup \check{I}_\pi$ описывается формулой:

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left(\tau \sqrt{1 + |\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|} \right) + o(1). \quad (8.6)$$

Проанализируем результаты теоремы 8.1.



Рис. 4. Расположение спектра при $\tau \gg 1$.

Расположение спектра. Согласно (8.5), центры интервалов \check{I}_0 и \check{I}_π находятся в точках E_0 и E_π . Их длины описываются формулами:

$$|\check{I}_0| = \frac{2\varepsilon}{|\check{\Phi}'_0(E_0)|} \cdot t_{v,0}(E_0) \cdot (1 + o(1))$$

и

$$|\check{I}_\pi| = \frac{2\varepsilon}{|\check{\Phi}'_\pi(E_\pi)|} \cdot t_{v,\pi}(E_\pi) \cdot (1 + o(1)).$$

Расположение спектра на $I_0 \cup I_\pi$ соответствует рис. 4, (а) и (б). Отталкивание интервалов \check{I}_0 и \check{I}_π , отмеченное в разделе 7.5 предыдущей

главы, оказывается пренебрежимым по сравнению с их длинами. Заметим, что мы не обсуждаем возможные лакуны, размер которых экспоненциально мал по сравнению с длинами \check{I}_0 и \check{I}_π .

Природа спектра. Согласно (8.3) и (8.6) на интервалах \check{I}_0 и \check{I}_π показатель Ляпунова положителен. Поэтому, согласно теореме Исии–Пастура–Котани, на этих интервалах спектр семейства (1.1) сингулярен.

Показатель Ляпунова $\Theta(E, \varepsilon)$ на спектре. Формула (8.6) допускает следующее упрощение:

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left(\tau \sqrt{1 + |\xi_0(E)|} \right) + o(1) \quad \text{при } E \in \check{I}_\pi,$$

и

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \left(\tau \sqrt{1 + |\xi_\pi(E)|} \right) + o(1) \quad \text{при } E \in \check{I}_0.$$

Если $|\Delta| = \frac{|E_\pi - E_0|}{2} \gg \max(t_{v,\pi}, t_{v,0})$, то на \check{I}_0 и \check{I}_π показатель Ляпунова почти постоянен. С другой стороны, если $|\Delta| \ll \max(t_{v,\pi}, t_{v,0})$, то на этих экспоненциально малых интервалах он может изменяться на величины порядка единицы. Действительно, предположим, что $t_{v,0} \ll t_{v,\pi}$ или, точнее, что имеется $\delta > 0$ такое, что на $V_* \cap J$ $S_{v,0}(E) > S_{v,\pi}(E) + \delta$. Если E_0 и E_π совпадают, то $\check{I}_0 \subset \check{I}_\pi$, и около центра \check{I}_π показатель Ляпунова принимает значение

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \tau + o(1) = \frac{1}{2\pi} (S_h(\bar{E}) - S_{v,\pi}(\bar{E}) - S_{v,0}(\bar{E})) + o(1).$$

Около же концов \check{I}_π

$$\begin{aligned} \Theta(E, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{\pi} \log \tau + \frac{\varepsilon}{2\pi} \log \frac{t_{v,\pi}(\bar{E})}{t_{v,0}(\bar{E})} + o(1) \\ &= \frac{1}{2\pi} (S_h(\bar{E}) - 2S_{v,\pi}(\bar{E})) + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, в старшем порядке изменение показателя Ляпунова равно $\frac{1}{2\pi} (S_{v,0}(\bar{E}) - S_{v,\pi}(\bar{E}))$. Мы наблюдаем резкое уменьшение величины показателя Ляпунова при движении E от концов \check{I}_π к E_π . Это означает, что при E , находящемся в центре \check{I}_π , решения (1.1) типично (при п.в. z) гораздо медленнее убывают (растут) на бесконечности, чем при E , расположенном вблизи его концов.

8.2. Случай малого τ

Теперь рассмотрим случай, когда $\tau \ll 1$. Свойства спектра зависят от величины $\Lambda_n(V)$, появившейся в формуле (7.10). Напомним, что в случае общего положения $\Lambda_n(V) > 1$, см. Замечание 7.3. Ниже мы будем считать это неравенство выполненным.

Имеется несколько разных типичных “сценариев спектрального поведения”. Начнем с общего описания свойств спектра. А затем, обсудим эти сценарии.

Во всех утверждениях ниже мы считаем ε достаточно малым.

8.2.1. Геометрия спектра

Теорема 8.2. *Спектр на $I_0^{(l)} \cup I_\pi^{(l')}$ содержится во множестве Σ_{res} , описываемом неравенством*

$$|\tau^2 \xi_0(E) \xi_\pi(E) + 2\Lambda_n(V)| \leq (2 + \tau^2 |\xi_0(E)| + \tau^2 |\xi_\pi(E)|) (1 + o(1)). \quad (8.7)$$

Из (8.7) вытекает

Предложение 8.1. *Множество Σ_{res} из теоремы 8.2 является объединением двух непересекающихся интервалов; оба они находятся в $(2e^{-\delta_0/\varepsilon})$ -окрестности \bar{E} . Приращение интегрированной плотности состояний на каждом из этих интервалов равно $\frac{\varepsilon}{2\pi}$.*

Для интервалов из Предложения 8.1 мы опять будем использовать обозначения I_0 и I_π .

Мы видим, что на каждом из I_0 и I_π содержится спектр семейства (1.1). Поскольку эти интервалы не сливаются в один (в отличие от случая, когда $\tau \gg 1$), мы наблюдаем отталкивание “резонансных” интервалов.

8.2.2. Природа спектра

Теорема 8.3. *При $E \in \Sigma_{\text{res}}$*

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \log(\tau^2 (|\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|) + 1) + o(1). \quad (8.8)$$

Пусть $c > 0$. Положим

$$I_c^+ = \left\{ E \in \Sigma_{\text{res}} : \varepsilon \log\left(\tau \sqrt{|\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|}\right) > c \right\}. \quad (8.9)$$

Из теоремы 8.3 и Теоремы Исии–Пастура–Котани вытекает

Следствие 8.1. Множество $\Sigma_{\text{res}} \cap I_c^+$ содержит только сингулярный спектр семейства (1.1).

Положим

$$I_c^- = \left\{ E \in \Sigma_{\text{res}} : \varepsilon \log \left(\tau \sqrt{|\xi_0(E)| + |\xi_\pi(E)|} \right) < -c \right\}. \quad (8.10)$$

Из теоремы 8.2 вытекает, что при достаточно малом ε I_c^- содержится во множестве

$$\tilde{\Sigma}_{\text{ac}} = \{ E \in \mathbb{R} : |\tau^2 \xi_0(E) \xi_\pi(E) + 2\Lambda_n(V)| \leq 2(1 + o(1)) \}. \quad (8.11)$$

Можно показать, что оно состоит из непересекающихся интервалов \tilde{I}_0 и \tilde{I}_π , расстояние между которыми оказывается не меньше, чем $C \varepsilon \sqrt{t_h(\bar{E})}$. Обозначим через Σ_{ac} абсолютно непрерывный спектр уравнения (1.1).

Теорема 8.4. Фиксируем $c > 0$. Пусть $\nu \in \{0, \pi\}$. Существуют число $\eta > 0$ и множество $\mathbb{D} \subset (0, 1)$ такие, что

$$\text{mes}(\mathbb{D} \cap (0, \varepsilon)) / \varepsilon = 1 + o\left(e^{-\eta/\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0;$$

если $\varepsilon \in \mathbb{D}$, а $I_c^- \cap I_\nu \neq \emptyset$, то $\text{mes}(I_\nu \cap \Sigma_{\text{ac}}) = \text{mes}(I_\nu) (1 + o(1))$.

8.2.3. Возможные “спектральные сценарии”

Положим

$$\rho := \frac{\max(t_{v,\pi}, t_{v,0})}{\sqrt{t_h}} \Big|_{E=\bar{E}} = \tau \sqrt{\frac{\max(t_{v,\pi}, t_{v,0})}{\min(t_{v,\pi}, t_{v,0})}} \Big|_{E=\bar{E}}. \quad (8.12)$$

Заметим, что $\rho \geq \tau$. Поскольку коэффициенты туннелирования экспоненциально малы, имеются два типичных случая: случай экспоненциально малого ρ и случай, когда ρ экспоненциально велико.

1. Коротко обсудим случай $\rho \ll 1$. Если $|\Delta| = \frac{|E_0 - E_\pi|}{2} \ll \varepsilon \sqrt{t_h(\bar{E})}$, Σ_{res} является объединением двух интервалов длин $\sim \varepsilon \sqrt{t_h}$; они разделены лакуной длины $\sim \varepsilon \sqrt{t_h}$ с центром в точке $\approx \bar{E}$, см. рис. 5.

Длины интервалов, содержащих спектр, так же как и длина и центр лакуны практически остаются неизменными при увеличении $|\Delta|$ от

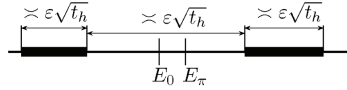


Рис. 5. Случай $\rho \ll 1$.

нуля до величины $\sim \varepsilon \sqrt{t_h(\bar{E})}$; затем, эти интервалы начинают расходить друг от друга вместе с E_0 и E_π .

При $|\Delta| \ll \varepsilon \sqrt{t_h(\bar{E})}$, интервалы, содержащие спектр, расположены на множестве I_c^- ; таким образом, большая часть спектра на этих интервалах является абсолютно непрерывной (если $\varepsilon \in \mathbb{D}$).

2. Коротко обсудим случай $\rho \gg 1$. Для определенности предположим, что $t_{v,0} \ll t_{v,\pi}$. Тогда, интервал I_π с центром в точке $\approx E_\pi$ имеет длину порядка $\varepsilon t_{v,\pi}(\bar{E})$. При этом, выполнено следующее.

- Если $E_0 \in I_\pi$, а расстояние от E_0 до концов I_π имеет тот же порядок, что и длина I_π , то Σ_{res} состоит из интервала I_π без “лакуны” длины $\sim \varepsilon t_h(\bar{E})/t_{v,\pi}(\bar{E})$, содержащей точку E_0 , см. рис. 6(b). Более того, расстояние от E_0 концов лакуны имеет порядок $\varepsilon t_h(\bar{E})/t_{v,\pi}(\bar{E})$.
- Если E_0 находится снаружи от I_π на расстоянии от него порядка его длины или больше, то I_0 содержится в окрестности E_0 размера $\sim \varepsilon^2 t_h(\bar{E})/|\Delta|$, а длина I_0 имеет порядок $\varepsilon^2 t_h(\bar{E})/|\Delta| + \varepsilon t_{v,0}(\bar{E})$, см. рис. 6(a).

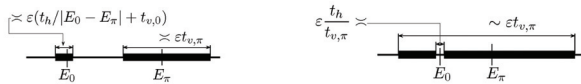


Рис. 6. Расположение спектра при $\tau \ll 1$ и $\rho \gg 1$.

На интервалах, содержащих спектр, показатель Ляпунова может изменяться очень быстро. Пусть $|\Delta| \ll \varepsilon t_{v,\pi}(\bar{E})$. При E близком к лакуне, окружающей E_0 величина $\tau^2 \xi_0(E)$ имеет порядок 1, тогда как $\tau^2 \xi_\pi(E)$ экспоненциально мала. Поэтому из теоремы 8.3 вытекает, что $\Theta(E, \varepsilon) = o(1)$. С другой стороны, около внешних концов интервалов, содержащих спектр, $\tau^2 \xi_0(E)$ имеет порядок ρ^2 ; мы получаем, что

$$\Theta(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \log \rho + o(1)$$

имеет порядок единицы. Описанное явление похоже на то, что мы видели в случае, когда $\tau \gg 1$. Только теперь показатель Ляпунова уменьшается от величины порядка единицы (у внешних концов интервалов, содержащих спектр) до величины близкой к нулю или даже равной нулю (около E_0).

Фактически, показатель Ляпунова положителен на большей части Σ_{res} , и расположенный здесь спектр оказывается сингулярным. Вблизи лакуны, окружающей E_0 старший член асимптотики показателя Ляпунова становится малым (как и поправка). Здесь гораздо труднее контролировать природу спектра.

8.3. Модельное уравнение

Обсудим уравнение монодромии, возникающее в резонансном случае. Мы будем предполагать дополнительно, что $\tau^2(\bar{E}) \geq \min_{\nu \in \{0, \pi\}} t_{\nu, \nu}(\bar{E})$. Тогда, асимптотика матрицы монодромии M становится наиболее простой и при $E \in I_0 \cup I_\pi$ старший член матрицы монодромии имеет вид

$$M_0(z, E) = \begin{pmatrix} \tau^2 g_0(z) g_\pi(z) + \theta_n^{-1} & \tau g_0(z) \\ \theta_n \tau g_\pi(z) & \theta_n \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

где

$$g_\nu = \xi_\nu + \sin(2\pi(z - z_\nu)), \quad \nu \in \{0, \pi\},$$

а $\theta_n = \theta_n$ и $(z_\nu)_{\nu \in \{0, \pi\}}$ – постоянные.

Уравнение монодромии (2.7), в котором матрица монодромии заменена на M_0 , является модельным уравнением для изучаемой задачи. Все описанные эффекты могут быть выведены из этого уравнения.

8.4. Случай τ порядка единицы

При τ порядка единицы старший член асимптотики матрицы монодромии описывается формулой (8.13). Если τ , $|\xi_0|$ и $|\xi_\pi|$ имеют порядок единицы, то старший член не содержит асимптотических параметров. Если хотя бы одна из “локальных переменных” $\xi_\nu(E)$ велика, то спектр может быть опять описан с той же степенью подробности, что и в разделах 8.1 и 8.2.

8.5. Компьютерные вычисления

Здесь мы опишем результаты компьютерных вычислений, иллюстрирующие описанные спектральные эффекты. Для наших вычислений мы выбрали тот же потенциал, что и в разделе 7.10, а на рис. 7

мы изобразили ту же область на плоскости (α, E) , что и на рис. 3. Теперь на этой области мы показали зоны, где τ и ρ экспоненциально малы и велики.

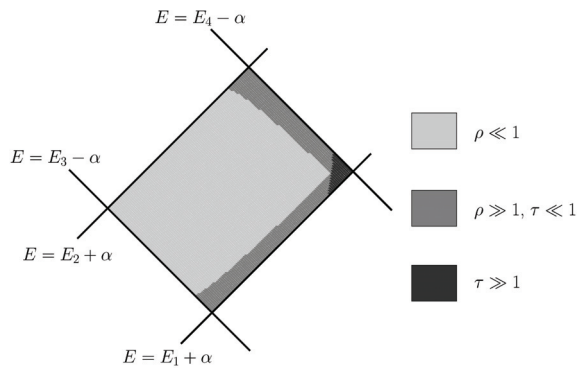


Рис. 7. Сравнение τ и ρ с 1.

Рисунок показывает, что при подходящем α все описанные спектральные явления, см. рис. 4, 5 и 6, действительно происходят.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Buslaev, A. Fedotov, *The monodromization and Harper equation*. — Séminaires Équations aux Dérivées Partielles, 1993–1994, XXI, École Polytechnique, Palaiseau (1994), pp. 1–23.
2. В. С. Буслаев, А. А. Федотов, *Блоховские решения для разностных уравнений*. — Алгебра и анализ **7**(4) (1994), 74–122.
3. В. С. Буслаев, А. А. Федотов, *Уравнение Харпера: монодромизация без квазиклассики*. — Алгебра и анализ **8**(2) (1996), 65–97.
4. V. Buslaev, A. Fedotov, *On the difference equations with periodic coefficients*. — Advances in Theoretical and Mathematical Physics **5**(6) (2001), 1105–1168.
5. H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
6. E. Sorets, T. Spencer, *Positive Lyapunov exponents for Schrödinger operators with quasi-periodic potentials*. — Comm. Math. Phys. **142**(3) (1991), 543–566.
7. E. I. Dinaburg, Ja. G. Sinaï, *The one-dimensional Schrödinger equation with quasiperiodic potential*. — Funkcional. Anal. i Priložen. **9**(4) (1975), 8–21.
8. M. Eastham, *The spectral theory of periodic differential operators*. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
9. L. H. Eliasson, *Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation*. — Communications in Mathematical Physics **146** (1992), 447–482.
10. A. Fedotov, F. Klopp, *Coexistence of different spectral types for almost periodic Schrödinger equations in dimension one*. — In: Mathematical Results in Quantum

- Mechanics, Proceedings of the QMath7 conference held 22–26 June 1998 in Prague. Edited by J. Dittrich, P. Exner, and M. Tater. Operator Theory: Advances and Applications, Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag **108** (1999), pp. 243–252.
11. A. Fedotov, F. Klopp, *Transitions d'Anderson pour des opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques en dimension 1*. — Équations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytech., Palaiseau (1999), 12pp.
 12. A. Fedotov, F. Klopp, *A complex WKB method for adiabatic problems*. — Asymptotic analysis **27** (2001), 219–264.
 13. A. Fedotov, F. Klopp, *Anderson transitions for a family of almost periodic Schrödinger equations in the adiabatic case*. — Communications in Mathematical Physics **227** (2002), 1–92.
 14. A. Fedotov, F. Klopp, *The spectral theory of the adiabatic quasi-periodic operators on the real line*. — Markov Processes and Related Fields, **9**(4) (2004), 579–615.
 15. A. Fedotov, F. Klopp, *On the singular spectrum of quasi-periodic Schrödinger operator in adiabatic limit*. — Annales Henri Poincaré **5** (2004), 929–978.
 16. A. Fedotov, F. Klopp, *Geometric tools of the adiabatic complex WKB method*. — Asymptotic analysis **39**(3–4) (2004), 309–357.
 17. A. Fedotov, F. Klopp, *Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques adiabatiques: interactions entre les bandes spectrales d'un opérateur périodique*. — Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique (Palaiseau) (2003–2004), 22 pp.
 18. A. Fedotov, F. Klopp, *On the absolutely continuous spectrum of one dimensional quasi-periodic Schrödinger operator in adiabatic limit*. — Transactions of AMS **357** (2005), 4481–4516.
 19. A. Fedotov, F. Klopp, *Strong resonant tunneling, level repulsion and spectral type for one-dimensional adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators*. — Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4e série **38**(6) (2005), 889–950.
 20. A. Fedotov, F. Klopp, *Level repulsion and spectral type for one-dimensional adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators*. — In: Mathematical Physics of Quantum Mechanics. Selected and Refereed Lectures from QMath9. Lect. Notes in Physics, Berlin Springer Verlag **690** (2006), 383–402.
 21. A. Fedotov, F. Klopp, *Weakly resonant tunneling interactions for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators*. — Mémoires de la S.M.F. **104** (2006), 1–108.
 22. J. Fröhlich, T. Spencer, and P. Wittwer, *Localization for a class of one dimensional quasi-periodic Schrödinger operators*. — Communications in Mathematical Physics **132** (1990), 5–25.
 23. Michael-R. Herman, *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2*. — Comment. Math. Helv. **58**(3) (1983), 453–502.
 24. H. Hiramoto, M. Kohmoto, *Electronic spectral and wavefunction properties of one-dimensional quasi-periodic systems: a scaling approach*. — International Journal of Modern Physics B **164**(3–4) (1992), 281–320.
 25. A. R. Its, V. B. Matveev, *Hill operators with a finite number of lacunae*. — Funkcional. Anal. i Priložen. **9**(1) (1975), 69–70.
 26. T. Janssen, *Aperiodic Schrödinger operators*. — In: The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order, (R. Moody, ed.) Kluwer, 1997, pp. 269–306.

27. S. Jitomirskaya, *Almost everything about the almost Mathieu operator. II.* — In: XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, 1994), Cambridge, Internat. Press. (1995), pp. 373–382,
28. S. Ya. Jitomirskaya, *Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator.* — Ann. of Math. (2) **150**(3) (1999), 1159–1175.
29. P. Kargaev, E. Korotyaev, *Effective masses and conformal mappings.* — Communications in Mathematical Physics **169** (1995), 597–625.
30. Y. Last, *Almost everything about the almost Mathieu operator. I.* — In: XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, 1994), Cambridge, Internat. Press (1995), pp. 366–372,
31. V. Marchenko, I. Ostrovskii, *A characterization of the spectrum of Hill's equation.* — Math. USSR Sbornik **26** (1975), 493–554.
32. M. Marx, H. Najjar, *On the singular spectrum for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators.* — Advances in Mathematical Physics, accepted 28 February 2010, 30 pp.
33. H. McKean, P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation.* — Inventiones Mathematicae **30** (1975), 217–274.
34. L. Pastur, A. Figotin, *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators.* Springer Verlag, Berlin, 1992.
35. Joachim Puig, *Reducibility of quasi-periodic skew products and the spectrum of Schrödinger operators.* — PhD Thesis, Univ. of Barcelona, Barcelona, Spain, 2004. <http://www.maia.ub.es/dsg/2004/puig0402.pdf>.

Fedotov A. A. Adiabatic almost-periodic Schrödinger operators,

In this review we describe spectral results for an one-dimensional almost-periodic Schrödinger operator with two periods, one of the periods being much larger, than the second one.

С.-Петербургский государственный
университет, Физический факультет,
Ульяновская ул, д. 3, Петродворец, 198504
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: fedotov.s@mail.ru

Поступило 12 октября 2010 г.