

М. М. Попов, П. М. Попов

**СРАВНЕНИЕ МЕТОДА ХИЛЛА И
МЕТОДА ГЛУБИННОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ
МИГРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ
СУММИРОВАНИЯ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ**

ВВЕДЕНИЕ

В работах Хилла [7, 8] развит метод сейсмической миграции с помощью гауссовых пучков, который к настоящему времени стал хорошо известным в геофизике. Недавно [4, 10] был предложен и опробован на ряде широко используемых геофизических моделей подход к миграции, основанный на методе суммирования гауссовых пучков (МСГП). Таким образом, гауссовы пучки используются в обоих случаях, и потому сразу же возник вопрос не являются ли эти два метода по существу одинаковыми. Он особенно остро встал при публикации нами статьи [10] в журнале *Geophysics*, что и привело к необходимости проанализировать математическую основу метода Хилла.

Цель данной работы состоит в подробном изложении анализа математической основы метода Хилла. Как отмечает сам автор статьи [8], ключевой момент его глубинной миграции до суммирования с помощью гауссовых пучков состоит в эффективном вычислении интеграла (19) по гауссовым пучкам путём замены его произведением двух гауссовых пучков, см. формулу (22), связанных соответственно с источником волнового поля и сейсмоприёмником (геофоном). Как оправдание замены интеграла по гауссовым пучкам произведением двух из них, автор утверждает, что формула (22) является результатом применения метода перевала, точнее надо сказать метода стационарной фазы, к интегралу (19) при большой круговой частоте ω , т.е. при $\omega \rightarrow \infty$.

В данной заметке мы показываем, что это утверждение неверно и, следовательно, нет математических оснований для замены (19) на (22).

Ключевые слова: глубинная сейсмическая миграция, лучевой метод, гауссовы пучки.

Поэтому этот ключевой пункт метода Хилла следует рассматривать как дополнительное предположение, которое, фактически, нивелирует теоретические рассуждения обсуждаемой статьи Хилла, изложенные до стр. 1243. Кроме того, это предположение противоречит математическому базису МСПП, см. [1, 3], и именно в этом пункте заключается основное различие с нашим подходом к задачам миграции.

С другой стороны, опубликованные результаты по применению метода Хилла, см. например [8], [6], показывают, что он дает высококачественное изображение миграции, если оценивать его визуально. В этой заметке мы предлагаем объяснение этим результатам, а также демонстрируем на простых примерах, как ключевой момент метода Хилла сказывается на точности вычисления волнового поля.

1. ИНТЕГРАЛ ПО ГАУССОВЫМ ПУЧКАМ И МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

Напомним формулы (19) и (22) из [8], которые требуют детального обсуждения. Рассматривается глубинная миграция до суммирования в трехмерном случае и частотном диапазоне. На первых шагах берется конфигурация общей срединной точки, положение которой задаётся вектором \mathbf{L} , смещение же источника волнового поля и детектора, геофона, относительно этой точки описывается вектором \mathbf{h} (офсет), см. Fig.2 обсуждаемой статьи. При построении функций Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s; \omega)$ и $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d; \omega)$, где \mathbf{r}_s и \mathbf{r}_d описывают соответственно положение источника и геофона, в виде интегралов по гауссовым пучкам берутся векторы медленности \mathbf{p}_s и \mathbf{p}_d в качестве лучевых параметров центрального поля лучей. После введения новых переменных \mathbf{p}^m и \mathbf{p}^h , см. равенства (17) из [8],

$$\mathbf{p}^m = \mathbf{p}^d + \mathbf{p}^s, \quad \mathbf{p}^h = \mathbf{p}^d - \mathbf{p}^s, \quad (1.1)$$

где \mathbf{p}^m описывает наклон эйконала отражённой волны на сейсмограмме в окрестности рассматриваемой срединной точки \mathbf{L} , формулой (19) выделяется следующий двойной интеграл

$$U_{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}^m; \omega) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int \int \frac{dp_x^h dp_y^h}{p_z^s} \times \\ U_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{L} + \mathbf{h}, \mathbf{p}^d; \omega) U_{GB}^*(\mathbf{r}, \mathbf{L} - \mathbf{h}, \mathbf{p}^s; \omega) \quad (1.2)$$

Здесь p_x, p_y, p_z – декартовы координаты вектора медленности, а U_{GB}^* – гауссовы пучки, ассоциированные с источником “s” и геофоном “d”;

символ $*$ означает комплексное сопряжение. Способ “эффективного” вычисления этого интеграла по гауссовым пучкам и является ключевым моментом глубинной миграции до суммирования по Хиллу. Отметим, что для каждой точки \mathbf{r} в области миграции этот интеграл должен вычисляться при всевозможных значениях входящих в него параметров $\mathbf{L}, \mathbf{h}, \mathbf{p}^m$ поскольку окончательное построение миграционного изображения требует суммирования $U_{\mathbf{h}}(\mathbf{r}, \mathbf{L}, \mathbf{p}^m; \omega)$ по этим параметрам. В последующих формулах (21) и (22) автор описывает этот способ, состоящий в том, что интеграл (1.2) заменяется произведением двух гауссовых пучков, ассоциированных, соответственно, с источником “ s ” и геофоном “ d ” и таких, которые оказываются наиболее близкими к данной точке \mathbf{r} в области миграции.

При этом утверждается, что этот способ вычисления интеграла (1.2) вытекает из применения метода перевала, точнее метода стационарной фазы, к этому интегралу при больших ω . Тот факт, что ω считается большим параметром в (1.2) является естественным, так как гауссовы пучки представляют собой высокочастотную асимптотику решений уравнения Гельмгольца. Но утверждение, что формула (22) есть следствие применения метода стационарной фазы к (1.2) оказывается неверным.

Поскольку утверждение автора сформулировано четко с математической точки зрения, достаточно привести всего лишь один контрпример, чтобы опровергнуть это утверждение. Для этой цели мы рассмотрим упрощенный случай, в котором вычисление асимптотики интеграла по методу стационарной фазы оказываются несложным и геометрически наглядным.

Во-первых, мы рассматриваем миграцию в случае двух измерений, при этом двойной интеграл (1.2) становится однократным. Во-вторых, мы предполагаем, что скорость распространения волн V в области миграции $z > 0$ постоянна, т.е. $V = \text{const}$. Это приводит к простым явным формулам для гауссовых пучков. В дальнейшем мы стремимся сохранить обозначения, принятые в статье Хилла. Точка M в области миграции задается координатами $x = L$ и $z = R$, а положение источника x_s и геофона x_d на сейсмической границе $z = 0$ равенствами $x_s = L - h$ и $x_d = L + h$, соответственно, см. Fig. 2. из статьи Хилла и наш рис. 1.

Наконец, опять же с целью упрощения вычислений мы полагаем, что ‘наклон эйконала’ отражённой волны в окрестности срединной точки L равен нулю, т.е. $p_x^m = \frac{\delta t}{\delta x} = 0$. При этом из равенств (1.1)

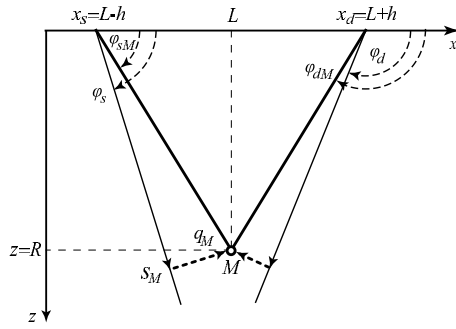


Рис. 1. Схема центральных лучей в приложении к методу стафазы. Здесь φ_s и φ_d углы выхода лучей из источника и приемника, соответственно. φ_{sM} и φ_{dM} соотносятся с лучами, которые проходят точно через точку M в области миграции. s_M и q_M локальные координаты точки M вблизи луча.

следует, что между координатами векторов медленности \mathbf{p}^d , \mathbf{p}^s и \mathbf{p}^m , \mathbf{p}^h имеют место следующие соотношения

$$p_x^s = -p_x^d, \quad p_x^h = 2p_x^d = -2p_x^s \quad (1.3)$$

Для построения асимптотики функций Грина в терминах гауссовых пучков мы предпочитаем использовать углы выхода центральных лучей из источника φ_s и геофона φ_d вместо векторов медленности. Соотношение между ними имеет вид

$$\begin{cases} p_x^d = \frac{1}{V} \cos \varphi_d \\ p_z^d = \frac{1}{V} \sin \varphi_d \end{cases} \begin{cases} p_x^s = \frac{1}{V} \cos \varphi_s \\ p_z^s = \frac{1}{V} \sin \varphi_s \end{cases} \quad (1.4)$$

и совместно с формулами (1.3) позволяет ввести вместо переменной интегрирования p_x^h один из углов φ_d или φ_s . Действительно, из уравнений (1.3) и (1.4) следует, что $p_x^h = -\frac{2}{V} \cos \varphi_s$ и

$$\varphi_d = \pi - \varphi_s, \quad (1.5)$$

см. также рис. 1.

Введём в рассмотрение дополнительно два центральных луча гауссовых пучков, которые, стартуя из источника и геофона, в точности

падают в точку M в области миграции. Обозначим их углы выхода через φ_{sM} и φ_{dM} , соответственно. Очевидно, что для них также выполнится равенство (1.5), т.е. $\varphi_{dM} = \pi - \varphi_{sM}$.

Далее обратимся к гауссовым пучкам, используемым для построения асимптотики функций Грина. Для них мы возьмём выражение (В-2) из статьи Хилла, редуцированное для рассматриваемого нами двумерного случая, и запишем их в виде

$$U_{GB} = A \exp \{i\omega \Phi\}, \quad (1.6)$$

в котором комплексно-значные фаза Φ и амплитуда A определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{s}{V} + \frac{i}{2} \frac{q^2}{\omega_\ell w_\ell^2 + iVs} \\ A &= (\omega_\ell w_\ell^2 + iVs)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В последних формулах мы сохраняем смысл обозначений цитируемой статьи: w_ℓ – начальная ширина гауссова пучка при частоте, равной ω_ℓ , а s и q – локальные координаты в окрестности центрального луча: s – длина дуги этого луча, q – расстояние до него по нормали.

Для того, чтобы различать пучки, выходящие из источника и гефона, введем для них дополнительные обозначения $U_{GB}^{(s)}$ и $U_{GB}^{(d)}$. Соответственно их амплитуды и фазы снабжаются индексами “ s ” и “ d ”: A_s , Φ_s и A_d , Φ_d . Далее необходимо вычислить локальные координаты s_M и q_M точки M для каждого из гауссовых пучков. Из рис. 1 непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} q_M &= \sqrt{R^2 + h^2} \sin(\varphi_s - \varphi_{sM}) \\ s_M &= \sqrt{R^2 + h^2} \cos(\varphi_s - \varphi_{sM}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

для пучков, вышедших из источника.

Подставляя выражение (1.8) в формулы (1.7), находим явные формулы для A_s и Φ_s , а значит, и для гауссовых пучков $U_{GB}^{(s)}$ в точке M как функции угла выхода φ_s из источника:

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{V} \cos(\varphi_s - \varphi_{sM}) + \frac{i}{2} \frac{(R^2 + h^2) \sin^2(\varphi_s - \varphi_{sM})}{\omega_\ell w_\ell^2 + iV \sqrt{R^2 + h^2} \cos(\varphi_s - \varphi_{sM})} \\ A &= \left[\omega_\ell w_\ell^2 + iV \sqrt{R^2 + h^2} \cos(\varphi_s - \varphi_{sM}) \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Нетрудно проверить, что формулы для A_d и Φ_d , а значит и для гауссовых пучков $U_{GB}^{(d)}$ могут быть получены из равенств (1.9) заменой $\varphi_s - \varphi_{sM}$ на $\varphi_{dM} - \varphi_d$, см. рис. 1. Принимая во внимание соотношение (1.5) между углами φ_d , φ_{dM} и φ_s , φ_{sM} , приходим к равенству $\varphi_s - \varphi_{sM} = \varphi_{dM} - \varphi_d$, откуда следует, что $A_s = A_d$ и $\Phi_s = \Phi_d$, и гауссовы пучки $U_{GB}^{(s)}$ и $U_{GB}^{(d)}$ в точке M совпадают.

Учитывая выше изложенное, интеграл по гауссовым пучкам (1.2) в рассматриваемом случае принимает следующий вид

$$U_h = N \int \frac{d p_x^h}{p_z^s} U_{GB}^{*(d)} U_{GB}^{*(s)} = 2N \int d\varphi_s (A_s^*)^2 \exp \{-i\omega 2\Phi_s^*\}, \quad (1.10)$$

где постоянный множитель N возникает из нормировочных множителей от двух функций Грина в двумерном случае. Явное выражение для N несущественно для нашего рассмотрения.

Явные формулы (1.9) и (1.10) позволяют легко вычислить асимптотику интеграла (1.10) при $\omega \rightarrow \infty$ методом стационарной фазы. Действительно, уравнение для стационарной точки $\frac{d}{d\varphi_s} \Phi_s^* = 0$ имеет решение $\varphi_s = \varphi_{sM}$ и поскольку, как было установлено выше, $\varphi_{dM} - \varphi_d = \varphi_s - \varphi_{sM}$, то в стационарной точке имеют место равенства

$$\varphi_s = \varphi_{sM}, \quad \varphi_d = \varphi_{dM}. \quad (1.11)$$

Эта точка не вырождена, так как

$$\left. \frac{d^2}{d(\varphi_s)^2} \Phi_s^* \right|_{\varphi_s = \varphi_{sM}} = -\frac{\omega_\ell w_\ell^2}{V} \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{\omega_\ell w_\ell^2 - iV\sqrt{R^2 + h^2}} \neq 0 \quad (1.12)$$

Впрочем, это ясно и из геометрических соображений, поскольку семейства центральных лучей, ассоциированных с функциями Грина, в рассматриваемом случае не образуют каустик.

Далее стандартные вычисления метода стационарной фазы приводят к следующему результату

$$U_h = \text{const} \left(V \sqrt{R^2 + h^2} + i\omega_\ell w_\ell^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{V}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -i\omega 2 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{V} \right\} \left(1 + O \left(\frac{1}{\omega} \right) \right) \quad (1.13)$$

где дополнительно обозначено $\text{const} = i\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} (\omega_\ell w_\ell^2)^{-\frac{1}{2}} 2N$.

Остановимся на физической интерпретации полученного результата.

1. Стационарная точка рассматриваемого интеграла по гауссовым пучкам имеет простую геометрическую интерпретацию: она соответствует таким двум центральным лучам, вышедшим соответственно из источника и геофона, которые в точности попадают в точку M в области миграции. Это следует из равенств (1.11), ср. также с результатами вычислений в работе [3].
2. То, что обычно называют эйконалом (travel time) является чисто вещественным $\tau = 2\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{V}$ и представляет собой суммарный набег фазы вдоль этих центральных лучей. Два предэкспоненциальных множителя имеют разный смысл. Вещественный множитель $(V/\sqrt{R^2+h^2})^{\frac{1}{2}}$ является лучевой амплитудой для одного из центральных лучей ($\sqrt{R^2+h^2}$ есть геометрическое расхождение в точке M), а другой комплексно-значный $(V\sqrt{R^2+h^2} + i\omega_\ell w_\ell^2)^{-\frac{1}{2}}$ представляет собой “амплитуду” гауссова пучка U_{GB}^* , вычисленную в точке M .

Таким образом, мы видим, что применение метода стацфазы к интегралу по гауссовым пучкам не приводит к произведению двух из них, как утверждает автором [8] в его формуле (22). Следовательно его утверждение неверно.

2. К ЧЕМУ ПРИВОДИТ КЛЮЧЕВОЙ МОМЕНТ В МИГРАЦИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ

Ключевой момент сейсмической миграции до суммирования, предложенный и используемый Хиллом [8], состоит по существу в замене интеграла по гауссовым пучкам одним из них, а именно, тем, центральный луч которого оказывается ближайшим к данной точке M . Ближайшим, поскольку попасть в данную точку при численных расчетах не представляется возможным. В этом параграфе мы покажем к чему это приводит в расчетах волновых полей. Ввиду того, что интеграл (1.2) является лишь промежуточным звеном в процедуре миграции и не имеет четкого физического смысла, обратимся к задаче о точечном источнике, рассматриваемой в аппендиксе B статьи Хилла.

Функция Грина $G(M, M_0, \omega)$ удовлетворяет неоднородному урав-

нению Гельмгольца

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{V^2}\right)G = -\delta(M - M_0). \quad (2.1)$$

В трехмерной однородной среде $V = \text{const}$ решение имеет вид

$$G = \frac{1}{4\pi r} \exp\left(i\frac{\omega}{V}r\right), \quad (2.2)$$

где r суть расстояние от источника в точке M_0 до точки наблюдения M . (Отметим, что формула (2.2) имеет лучевой вид с эйконалом $\tau = \frac{r}{V}$ и амплитудой $\frac{1}{r}$, проистекающей из геометрического расхождения. Однако, в двумерном случае это уже не так: $G = \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{V}r\right)$, где $H_0^{(1)}$ есть функция Ханкеля нулевого порядка и первого рода).

Очевидно, задача (2.1) для функции Грина G обладает сферической симметрией с центром в M_0 , где расположен точечный источник. Поэтому удобно в дальнейшем ввести декартовы и сферические координаты с центром в M_0 : $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$.

Для построения асимптотики G в терминах гауссовых пучков мы должны сделать следующее, см. [3]:

1. построить центральное поле лучей, выходящих из M_0 под всевозможными углами ϑ и φ , которые и считаются лучевыми параметрами;
2. для каждого луча построить гауссов пучок U_{GB} , распространяющийся вдоль этого луча (центральный луч гауссова пучка). Очевидно при этом, что сам пучок будет зависеть от углов ϑ и φ , т.е. $U_{GB}(\vartheta, \varphi; \omega)$;
3. взять интеграл по всем значениям лучевых параметров ϑ и φ от гауссовых пучков с неизвестными пока начальными амплитудами $\psi_0(\vartheta, \varphi; \omega)$

$$G = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \psi_0 \sin \vartheta U_{GB}(\vartheta, \varphi). \quad (2.3)$$

4. и, наконец, 'сшить' при $\omega \rightarrow \infty$ этот интеграл с лучевой асимптотикой функции Грина G . Для этого нужно вычислить асимптотику (2.3) по методу стационарной фазы.

Остановимся на последнем пункте более подробно. Гауссов пучок U_{GB} введем формулой $(B - 2)$ из [8]

$$U_{GB} = \frac{\omega_\ell w_\ell^2}{V} \left(\frac{\omega_\ell w_\ell^2}{V} + is \right)^{-1} \exp \left(i\omega \left[\frac{s}{V} + \frac{i}{2} \frac{q_1^2 + q_2^2}{\omega_\ell w_\ell^2 + iVs} \right] \right), \quad (2.4)$$

в которой s — длина вдоль центрального луча, а q_1 и q_2 — локальные координаты в ортогональной к этому лучу плоскости. Смысл w_ℓ и ω_ℓ объяснен выше, см. §1.

В силу сферической симметрии мы можем считать, не ограничивая общности, что точка M совпадает с северным полюсом сферических координат $\vartheta = 0$ на расстоянии R от M_0 . Далее нужно вычислить координаты M в системе s, q_1, q_2 для каждого гауссова пучка, вышедшего под углами ϑ и φ из источника в M_0 .

В рассматриваемом нами существенно упрощённом случае нетрудно вывести, что для точки M имеют место следующие равенства $s_M = R \cos \vartheta$ и $(q_1^2 + q_2^2)|_M = R^2 \sin^2 \vartheta$. Записав гауссов пучок U_{GB} в виде (1.6), мы получаем

$$\begin{aligned} \Phi|_M &= \frac{R \cos \vartheta}{V} + \frac{i}{2} \frac{R^2 \sin^2 \vartheta}{\omega_\ell w_\ell^2 + iVR \cos \vartheta} \\ A|_M &= \frac{\omega_\ell w_\ell^2}{V} \left(\frac{\omega_\ell w_\ell^2}{V} + iR \cos \vartheta \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что интеграл (2.3) имеет невырожденную стационарную точку $\vartheta = 0$, так как $\frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2}|_{\vartheta=0} \neq 0$. Далее вычисления по методу стационарной фазы приводят к следующему результату в главном члене асимптотики

$$U \simeq \frac{\psi_0 V}{i\omega R} \exp \left(i\omega \frac{R}{V} \right). \quad (2.6)$$

Таким образом, мы получили в правой части (2.6) лучевую формулу, которая 'сшивается' с выражением (2.2) для функции Грина уравнения Гельмгольца при $\psi_0 = \frac{i\omega}{4\pi V}$. Такого вида вычисления проводятся в методе суммирования гауссовых пучков для нахождения начальных амплитуд гауссовых пучков, см. [3]. При отсутствии каустик в окрестности точки наблюдения M они приводят к лучевым формулам. При наличии каустик вычисления существенно усложняются и приводят к формулам В. П. Маслова.

Обратимся далее к идее Хилла заменить интеграл по гауссовым пучкам (2.3) одним из них, а именно, тем из них, центральный луч которого в точности попадает в точку M . Уравнение его имеет вид $x = y = 0, z = r$, а $q_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$ и $q_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$. Вместо (2.3) получаем следующую формулу

$$U_H = \psi_0 \frac{\omega_\ell w_\ell^2}{V} \left(\frac{\omega_\ell w_\ell^2}{V} + iR \right)^{-1} \exp \left(i\omega \left[\frac{R}{V} + \frac{i}{2} \frac{R^2 \sin^2 \vartheta}{\omega_\ell w_\ell^2 + iVR} \right] \right) \quad (2.7)$$

которая существенно отличается от (2.2).

Действительно,

1. предэкспоненциальный множитель не совпадает с амплитудой $\frac{1}{R}$ и зависит от начальной ширины гауссова пучка. Это и приводит к острой дискуссии об оптимальном выборе последнего;
2. комплекснозначный эйконал под знаком экспоненты совпадает со временем прихода волны только на самом центральном луче и несовпадение между ними растёт с удалением от центрального луча.

Рассмотрим далее более содержательный пример вычисления сейсмограмм с помощью метода суммирования гауссовых пучков для скоростной модели, взятой из работы [5]. Она содержит низкоскоростное включение, описываемое двумерной гауссовой функцией, над отражающим слоем, имеющим ломаную границу, рис. 2.

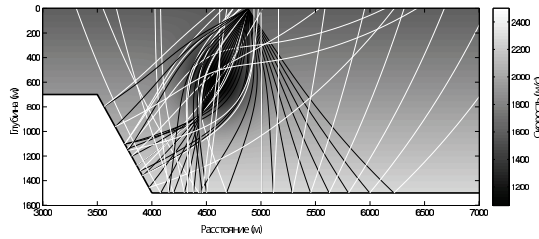


Рис. 2. Скоростная модель и диаграмма лучей от точечного источника. Черным обозначены лучи, выходящие из источника, а белым -- лучи отраженные границей раздела сред. Лучи выпущены с интервалом в 3 градуса.

Скорость $C(x, z)$ распространения волн в этой модели описывается следующей формулой

$$C(x, z) = a + bz - B \exp \left(-\frac{(x - \xi)^2}{\mu_x^2} \right) \exp \left(-\frac{(z - \zeta)^2}{\mu_z^2} \right).$$

Вычисления выполнены нами для следующих значений параметров: $a = 1600\text{м/с}$, $B = 800\text{м/с}$, $b = 0.45$, $\mu_x = \mu_z = 300\text{м}$, $\xi = 4600\text{м}$ и $\zeta = 600\text{м}$.

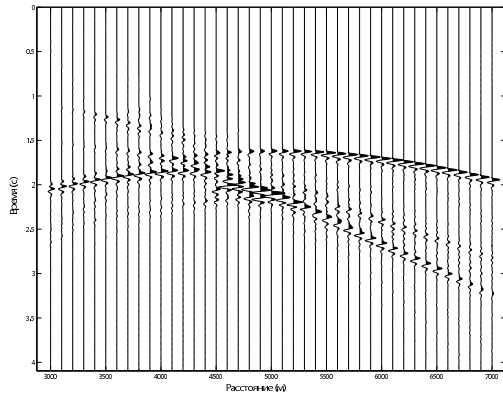


Рис. 3. Сейсмограмма, построенная методом суммирования гауссовых пучков. Лучи выпускались из источника с интервалом в 1 градус.

Поле лучей от точечного источника оказывается довольно сложным, в частности, из-за наличия каустик, см. рис. 2. Сейсмограмма, изображенная на рис. 3, вычислялась методом суммирования гауссовых пучков. Это означает, что волновое поле в каждом геофоне получалось суммированием вкладов от многих гауссовых пучков. При этом лучи из источника выпускались с интервалом в один градус.

На рис. 4 и рис. 5 показан результат расчета сейсмограмм для этой же модели на основе идеи Хилла, а именно, для каждого геофона трейс вычислялся по одному гауссову пучку, центральный луч которого оказывался ближайшим к этому геофону. Сейсмограмма оказывается “рваной” (с разрывами) и неустойчивой относительно числа лучей, выпущенных из источника. Это объясняется тем, что при варьировании числа лучей ближайшим к геофону может оказываться луч, принадлежащий к разному типу волн, т.е. с разной предисторией. И чем сложнее волновое поле в рассматриваемой модели, тем сильнее будет проявляться это явление.

С другой стороны, ясно, что идея Хилла позволяет уменьшить объём необходимых численных расчетов.

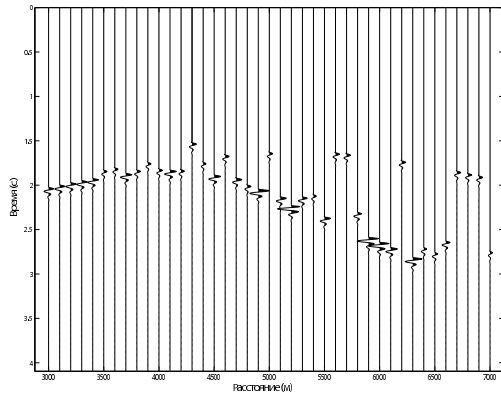


Рис. 4. Сейсмограмма, построенная на основе идеи Хилла. Лучи выпускались из источника с интервалом в 1 градус.

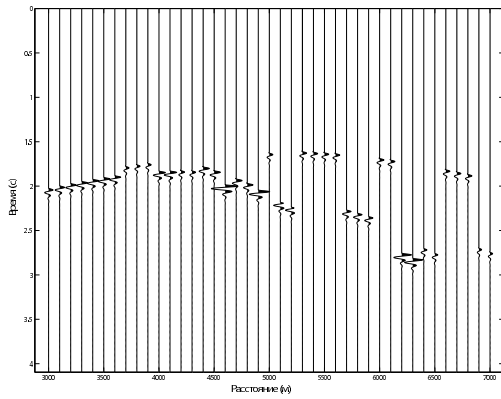


Рис. 5. Сейсмограмма, построенная на основе идеи Хилла. Лучи выпускались из источника с интервалом в 5 градусов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, выше показано, что ключевой момент метода Хилла не имеет математического обоснования и представляет собой дополнительное и независимое от изложенной им до стр. 1243 теории предположе-

ние. Оно приводит к тому, что метод Хилла следует рассматривать как базирующуюся на лучевом методе миграцию Кирхгофа, в которой лучи заменяются изолированными гауссовыми пучками, распространяющимися вдоль этих лучей. Основное преимущество этого подхода по сравнению с чисто лучевым состоит в следующем. Из-за хорошо известной двухточечной проблемы лучевого метода, точка пересечения лучей от источника и геофона не совпадает с узлом в области миграции, и поэтому для построения миграционного изображения необходима экстраполяция результата расчета на ближайшую узловую точку. Если же эти два луча заменить двумя гауссовыми пучками, центрированными на них, см. формулу (22) из [8], то мы получаем формулу, формально обеспечивающую гладкую экстраполяцию результата на область пересечения двух гауссовых пучков. В силу конечной ширины пучков эта область содержит ближайшие узловые точки. Как показывает сравнение выражений (2.6) и (2.7), такая экстраполяция содержит ошибки и по амплитуде и по фазе, но она приводит к визуально непрерывному, гладкому миграционному изображению.

Остановимся в заключение на сравнении метода Хилла и нашего подхода к глубинной сейсмической миграции до суммирования, основанного на МГСП, см. [4, 10]. Формула (22) из [8] противоречит математической основе МГСП. Уже в первых численных экспериментах по применению этого метода, см. [2], было установлено, что для получения 5% относительной погрешности в вычислении волнового поля необходимо просуммировать 15–20 гауссовых пучков в окрестности точки наблюдения. Путем вариации числа пучков мы можем контролировать точность вычислений, что, естественно, невозможно при использовании лишь одного из них. Упомянутая формула (22) является по существу водоразделом между двумя подходами к сейсмической миграции.

Отметим также следующие особенности нашего метода:

1. Математически последовательное применение МГСП позволяет естественным образом реализовать построение сейсмических миграционных изображений в истинных амплитудах и при некоторых условиях вычислять коэффициент отражения на границах раздела сред по входным данным для миграции, см. [9]. В отличие от метода Хилла у нас не возникает проблем с многозначностью времен прихода волн в сложных областях скоростного разреза, где возникают многочисленные каустики.

2. При обратном продолжении сейсмограмм вглубь области миграции мы работаем с волновым полем, записанным в результате реального сейсмического эксперимента. Наш алгоритм легко адаптируется к произвольной конфигурации источник-приемник, включая VSP.
3. Миграция осуществляется во временной области, что дает дополнительный параметр - временное окно, которое позволяет автоматически включать/исключать из рассмотрения запаздывающие волны.
4. Как показали численные эксперименты, см. [10], наш подход оказывается эффективным особенно для целевой миграции, когда нужно получить детальное изображение выделенной подобласти миграции. При этом удается уменьшить необходимый для этого объём задаваемых входных данных (сейсмограмм).

Авторы глубоко благодарны Н. М. Семченку и А. Верделу за многочисленные обсуждения рассматриваемого вопроса.

Работа поддержана грантом РФФИ 080100511.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, М. М. Попов, *Метод суммирования гауссовых пучков*. — Обзор, Известия ВУЗов, Радиофизика **32**, No. 12 (1989), 1447–1466.
2. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение метода суммирования гауссовых пучков для расчета высокочастотных волновых полей*, ДАН СССР **258**, No. 5 (1981), 1097–1100.
3. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ **104** (1981), 195–216.
4. М. М. Попов, Н. М. Семченко, А. Р. Вердел, П. М. Попов, *Метод суммирования гауссовых пучков в задачах сейсмической миграции*, ДАН **416** (2007), No. 6, 822–825.
5. S. Brandsberg-Dahl, M. V. de Hoop, and B. Ursin, *Focusing in dip and AvA compensation on scattering-angle/azimuth common image gathers*: Geophysics **68** (2003), 232–254.
6. S. H. Gray, *Gaussian beam migration of common-shot records*: Geophysics **70** (2005), S71–S77.
7. N. R. Hill, *Gaussian beam migration*: Geophysics **55** (1990), 1416–1428.
8. N. R. Hill, *Prestack Gaussian-beam depth migration*: Geophysics **66** (2001), 1240–1250.
9. M. M. Popov, N. M. Semtchenok, P. M. Popov, A. R. Verdel, *Reverse Time Migration with Gaussian Beams and Velocity Analysis Applications*, EAGE Rome 2008, Extended Abstracts **F048** (2008).
10. M. M. Popov, N. M. Semtchenok, P. M. Popov, A. R. Verdel, *Depth migration by the Gaussian beam summation method*. — Geophysics **75** (2010), 581–593.

Popov M. M., Popov P. M. Comparison of the Hill's method with the seismic depth migration by the Gaussian beam summation method.

The mathematical basement of the Hill's method of prestack depth migration is analyzed. It is shown that this method should be classified as the ray based Kirchhoff migration with so called "fat" rays, that is where the rays are substituted by isolated Gaussian beams centered on the rays and associated somehow with the input data on the seismic surface. That makes essential difference with our approach to seismic depth migration based on Gaussian beam summation method. We display on numerical examples the results of implementation of basic Hill's idea in the wave field computations.

Санкт-Петербургское отделение

Математического Института

им. В. А. Стеклова РАН

наб. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2010 г.