

Л. А. Молотков

О МЕДЛЕННОЙ ВОЛНЕ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЖИДКИХ СЛОЯХ

Посвящается светлой памяти
моего друга П. В. Крауклиса

В тонких жидких слоях, окруженных с одной или с двух сторон упругой средой, может распространяться волна, получившая название “медленная”. Эта волна обладает дисперсией, и её скорость при нулевой частоте обращается в нуль. Волна является поверхностной, распространяется на большие расстояния и несет сравнительно большую энергию. Существование этой волны является признаком наличия протяженного жидкого слоя между другими слоями.

Теоретические исследования, указавшие возможность существования такой волны, по-видимому, были впервые приведены в работе [1]. Экспериментальные полевые исследования, обнаружившие эту волну, были описаны в статье [2]. Низкоскоростная волна наблюдалась в зоне гидроразрыва, в результате которого образуются тонкие жидкие слои. В эффективной модели, описывающей чередующиеся упругие и жидкие тонкие слои, такая волна также существует [3,4].

К настоящему времени низкоскоростная волна хорошо изучена в случае жидких и упругих слоев с плоско-параллельными границами. В предлагаемой работе эта волна исследуется в криволинейных жидких слоях. С этой целью рассматриваются цилиндрические и сферические жидкие слои, расположенные между упругими средами. В этих слоях исследуются цилиндрические волны вдоль образующей и направляющей, а также меридиональные волны. В результате выясняется влияние кривизны тонкого жидкого слоя на скорость низкоскоростной волны.

Ключевые слова: медленная волна, жидкий слой, криволинейные границы, цилиндрические поверхности, сферическая поверхность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 08-01-00511.

§1. МЕДЛЕННАЯ ВОЛНА В ЖИДКОМ СЛОЕ
С ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Пусть в цилиндрической системе координат r, θ, z задана среда, состоящая из упругих полупространств 1 ($z < 0$), 2 ($z > h$) и жидкого слоя 0 ($0 < z < h$) (рис. 1). Среда возбуждается некоторым точечным источником, действующим с момента $t = 0$ и создающим волновое поле, в котором смещения не зависят от координаты θ и не содержат составляющих вдоль координаты θ . Образующиеся на границах смещения u_i ($i = r, z$), напряжения τ_{ik} ($i, k = r, z$) и давление p в жидкости представляются равенствами

$$u_{z1} = \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [\alpha_1 X_1 e^{kz\alpha_1} + Y_1 e^{kz\beta_1}] e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{rz1} = -\mu_1 \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [2\alpha_1 X_1 e^{kz\alpha_1} + g_1 Y_1 e^{kz\beta_1}] e^{kt\eta} d\eta, \quad (1.1)$$

$$\tau_{zz1} = \mu_1 \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [g_1 X_1 e^{kz\alpha_1} + 2\beta_1 Y_1 e^{kz\beta_1}] e^{kt\eta} d\eta;$$

$$u_{z0} = \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha_0 [X_0^+ e^{kz\alpha_0} - X_0^- e^{-kz\alpha_0}] e^{kt\eta} d\eta, \quad (1.2)$$

$$-p = \rho_0 \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^2 [X_0^+ e^{kz\alpha_0} + X_0^- e^{-kz\alpha_0}] e^{kt\eta} d\eta;$$

$$u_{z2} = \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [-\alpha_2 X_2 e^{-k(z-h)\alpha_2} + Y_2 e^{-k(z-h)\beta_2}] e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{rz2} = -\mu_2 \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [-2\alpha_2 X_2 e^{-(z-h)\alpha_2} + g_2 Y_2 e^{-k(z-h)\beta_2}] e^{kt\eta} d\eta, \quad (1.3)$$

$$\tau_{zz} = \mu_2 \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [g_2 X_2 e^{-k(z-h)\alpha_2} - 2\beta_2 Y_2 e^{-k(z-h)\beta_2}] e^{kt\eta} d\eta,$$

в которых

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{Pi}^2}}, & \beta_i &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{Si}^2}}, \\ \alpha_0 &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{P0}^2}}, & g_i &= 2 + \frac{\eta^2}{v_{Si}^2} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

λ_i, μ_i – коэффициенты Ламе, v_{Pi}, v_{Si} – скорости продольных и поперечных волн в среде i ; v_{P0} – скорость в жидком слое, ρ_i ($i = 0, 1, 2$) – плотность.

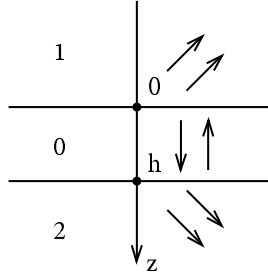


Рис. 1.

На границах $z = 0$ и $z = h$ выполняются условия

$$\begin{aligned} u_{z1}(0) = u_{z0}(0), & \quad \tau_{rz1}(0) = 0, \quad \tau_{zz1}(0) = -p(0), \\ u_{z0}(h) = u_{z2}(h), & \quad \tau_{rz2}(h) = 0, \quad -p(h) = \tau_{zz2}(h), \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эти граничные условия приводят к однородной системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + Y_1 &= \alpha_0 X_0^+ - \alpha_0 X_0^-, \\ 2\alpha_1 X_1 + g_1 Y_1 &= 0, \\ \mu_1(g_1 X_1 + 2\beta_1 Y_1) &= \rho_0 \eta^2 (X_0^+ + X_0^-), \\ \alpha_0(X_0^+ e^{kh\alpha_0} - X_0^- e^{-kh\alpha_0}) &= -\alpha_2 X_2 + Y_2, \\ -2\alpha_2 X_2 + g_2 Y_2 &= 0, \\ \rho_0 \eta^2 (X_0^+ e^{kh\alpha_0} + X_0^- e^{-kh\alpha_0}) &= \mu_2(g_2 X_2 - 2\beta_2 Y_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система (1.6) имеет ненулевое решение, если её определитель обращается в нуль.

Это условие определяет дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & \alpha_0 & -\alpha_0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 g_1 & 2\mu_1 \beta_1 & \rho_0 \eta^2 & \rho_0 \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 e^{kh\alpha_0} & -\alpha_0 e^{-kh\alpha_0} & -\alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_2 & g_2 \\ 0 & 0 & \rho_0 \eta^2 e^{kh\alpha_0} & \rho_0 \eta^2 e^{-kh\alpha_0} & \mu_2 g_2 & -2\mu_2 \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.7)$$

Входящий в уравнение (1.7) определитель представим в виде суммы четырех квазидиагональных определителей, а уравнение (1.7) представляется равенством

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 2\alpha_1 & g_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \rho_0 \eta^2 & \rho_0 \eta^2 \\ \alpha_0 e^{kh\alpha_0} & -\alpha_0 e^{-kh\alpha_0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2\alpha_2 & g_2 \\ \mu_2 g_2 & -2\mu_2 \beta_2 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 2\alpha_1 & g_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \rho_0 \eta^2 & \rho_0 \eta^2 \\ \rho_0 \eta^2 e^{kh\alpha_0} & \rho_0 \eta^2 e^{-kh\alpha_0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\alpha_2 & 1 \\ -2\alpha_2 & g_2 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} 2\alpha_1 & g_1 \\ \mu_1 g_1 & 2\mu_1 \beta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ \alpha_0 e^{kh\alpha_0} & -\alpha_0 e^{-kh\alpha_0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2\alpha_2 & g_2 \\ \mu_2 g_2 & -2\mu_2 \beta_2 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} 2\alpha_1 & g_1 \\ \mu_1 g_1 & 2\mu_1 \beta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 \\ \rho_0 \eta^2 e^{kh\alpha_0} & \rho_0 \eta^2 e^{-kh\alpha_0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\alpha_2 & 1 \\ -2\alpha_2 & g_2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Указанный прием при вычислении определителей 6×6 будет также использован в остальных параграфах. Дисперсионное уравнение будем исследовать на мнимой оси $\eta = i\tau$ при малых τ и kh . При вычислении определителей 2×2 полезно ввести функции

$$R_i = g_i^2 - 4\alpha_i \beta_i \quad (i = 1, 2), \quad (1.9)$$

и эти функции при малых τ представляются соотношениями

$$R_i = -\frac{2\tau^2(v_{P_i}^2 - v_{S_i}^2)}{v_{P_i}^2 v_{S_i}^2} = -\frac{2\tau^2 \rho_i (\lambda_i + \mu_i)}{\mu_i (\lambda_i + 2\mu_i)} \quad (i = 1, 2). \quad (1.10)$$

Используя условие $kh \ll 1$, заменим

$$\operatorname{sh} kh\alpha_0 = kh, \quad \operatorname{ch} kh\alpha_0 = 1. \quad (1.11)$$

При малых τ радикалы α_0 , α_1 и α_2 , не входящие в равенства (1.9)–(1.11), могут быть заменены 1. После этих замен и сокращения на

$2\tau^4\rho_1\rho_2$ формула (1.8) представится соотношением

$$-\frac{\rho_0\tau^2}{\mu_1}\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2}+\frac{\rho_0^2\tau^4kh}{\mu_1\mu_2}\frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda_1+2\mu_1}\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2}+2kh\frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda+2\mu_2}\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2}-\frac{\rho_0\tau^2}{\mu_2}\frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda_1+2\mu_1}=0. \quad (1.12)$$

При малых kh и τ второе слагаемое в равенстве (1.12) оказывается малым и может быть отброшено. После этого из уравнения (1.12) следует равенство

$$\tau^2=\frac{2kh\mu_1\frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda_1+2\mu_1}\mu_2\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2}}{\rho_0\left[\mu_1\frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda_1+2\mu_1}+\mu_2\frac{\lambda_2+\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2}\right]}, \quad (1.13)$$

которое определяет скорость медленной волны τ . При $kh=0$ скорость волны $\tau=0$, а при $kh\ll 1$ волна является медленной.

В случае одинаковых упругих полупространств ($\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, $\mu=\mu_1=\mu_2$)

$$\tau^2=\frac{kh\mu}{\rho_0}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}. \quad (1.14)$$

Исследуя формулы (1.13), приходим к выводу, что наибольшее значение скорости медленной волны оказывается в случае одинаковых упругих сред и дается выражением (1.14).

§2. МЕДЛЕННАЯ ВОЛНА ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в цилиндрической системе координат r, θ, z задана среда, состоящая из упругого слоя 1 $r < r_1$, жидкого цилиндрического слоя 0 $r_1 < r < r_2$ и внешности цилиндра $r > r_2$, заполненной упругой средой 2 (рис. 2). Среда возбуждается некоторым точечным источником, расположенным в начале координат. В волновом поле смещения не зависят от координаты θ и не содержат составляющей вдоль координаты θ . Образующиеся на границах смещения, напряжения и давление представляются равенствами [5]

$$u_{r1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[i\alpha_1 H_1^{(1)}(x_1)X_1 + H_1^{(1)}(y_1)Y_1 \right] e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{rz1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[i2\alpha_1 H_1^{(1)}(x_1)X_1 + g_1 H_1^{(1)}(y_1)Y_1 \right] e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\begin{aligned} \tau_{rr1} = & \frac{\mu_1}{2\pi i} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \left[g_1 H_0^{(1)}(x_1) - \frac{i2\alpha_1}{kr} H_1^{(1)}(x_1) \right] X_1 \right. \\ & \left. + \left[-i2\beta_1 H_0^{(1)}(y_1) - \frac{2}{kr} H_1^{(1)}(y_1) \right] Y_1 \right\} e^{kt\eta} d\eta; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u_{r0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha_0 \left[H_0^{(1)}(x_0) X_0^+ + H_0^{(2)}(x_0) X_0^- \right] e^{kt\eta} d\eta, \quad (2.2)$$

$$-p = \frac{\rho_0}{2\pi i} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^2 \left[H_0^{(1)}(x_0) X_0^+ + H_0^{(2)}(x_0) X_0^- \right] e^{kt\eta} d\eta;$$

$$u_{r2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k e^{-kz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[i\alpha_2 H_1^{(2)}(x_2) X_2 + H_1^{(2)}(y_2) Y_2 \right] e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{rz2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k^2 e^{-kz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[i2\alpha_2 H_1^{(2)}(x_2) X_2 + g_2 H_1^{(2)}(y_2) Y_2 \right] e^{kt\eta} d\eta, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rr2} = & \frac{\mu_2}{2\pi i} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \left[g_2 H_0^{(2)}(x_2) - \frac{i2\alpha_2}{kr} H_1^{(2)}(x_2) \right] X_2 \right. \\ & \left. + \left[-i2\beta_2 H_0^{(2)}(y_2) - \frac{2}{kr} H_1^{(2)}(y_2) \right] Y_2 \right\} e^{kt\eta} d\eta, \end{aligned}$$

в которых

$$x_i = -ikr\alpha_i \quad (i = 0, 1, 2), \quad y_i = -ikr\beta_i \quad (i = 1, 2), \quad (2.4)$$

а величины α_i и β_i определяются соотношениями (1.4)

На границах $r = r_1$ и $r = r_2$ выполняются условия

$$\begin{aligned} u_{r1}(r_1) = u_{r0}(r_1), \quad \tau_{rz1}(r_1) = 0, \quad \tau_{rr1}(r_1) = -p(r_1), \\ u_{r2}(r_2) = u_{r0}(r_2), \quad \tau_{rz2}(r_2) = 0, \quad \tau_{rr2}(r_2) = -p(r_2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

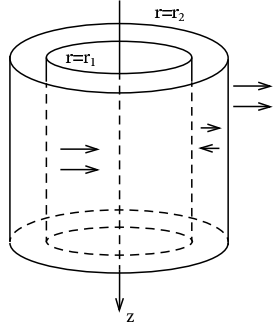


Рис. 2.

Граничные условия (2.5) приводят к однородной системе уравнений

$$\begin{aligned}
 & i\alpha_1 H_1^{(1)}(x_{11})X_1 + H_1^{(1)}(y_{11})Y_1 \\
 & -i\alpha_0 [H_1^{(1)}(x_{01})X_0^+ + H_1^{(2)}(x_{01})X_0^-] = 0, \\
 & i2\alpha_1 H_1^{(1)}(x_{11})X_1 + g_1 H_1^{(1)}(y_{11})Y_1 = 0, \\
 & \mu_1 \left[g_1 H_0^{(1)}(x_{11}) - \frac{i2\alpha_1}{kr_1} H_1^{(1)}(x_{11}) \right] X_1 \\
 & -\mu_1 \left[i2\beta_1 H_0^{(1)}(y_{11}) + \frac{i2}{kr_1} H_1^{(1)}(y_{11}) \right] Y_1 \\
 & -\rho_0 \eta^2 [H_0^{(1)}(x_{01})X_0^+ + H_0^{(2)}(x_{01})X_0^-] = 0, \\
 & i\alpha_0 [H_1^{(1)}(x_{02})X_0^+ + H_1^{(2)}(x_{02})X_0^-] \\
 & -[i\alpha_2 H_1^{(2)}(x_{22})X_2 + H_1^{(2)}(y_{22})Y_2] = 0, \\
 & i2\alpha_2 H_1^{(2)}(x_{22})X_2 + g_2 H_1^{(2)}(y_{22})Y_2 = 0, \\
 & \rho_0 \eta^2 [H_0^{(1)}(x_{02})X_0^+ + H_0^{(2)}(x_{02})X_0^-] \\
 & -\mu_2 \left[g_2 H_0^{(2)}(x_{22}) - \frac{i2\alpha_2}{kr_2} H_1^{(2)}(x_{22}) \right] X_2 \\
 & +\mu_2 \left[i2\beta_2 H_0^{(2)}(y_{22}) + \frac{2}{kr_2} H_1^{(2)}(y_{22}) \right] Y_2,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= -ikr_1\alpha_1, & x_{22} &= -ikr_2\alpha_2, & y_{11} &= -ikr_1\beta_1, \\
 y_{22} &= -ikr_2\beta_2, & x_{01} &= -ikr_1\alpha_0, & x_{02} &= -ikr_2\alpha_0.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Дисперсионное уравнение рассматриваемой среды получается, если определитель системы (2.6) приравнять нулю. В полученном дисперсионном уравнении полезно разделить элементы первого, второго, пятого и шестого столбцов определителя соответственно на $H_1^{(1)}(x_{11})$, $H_1^{(1)}(y_{11})$, $H_1^{(2)}(x_{22})$ и $H_1^{(2)}(y_{22})$. После этих операций дисперсионное уравнение выразится равенством

$$A_1 C_1 B_2 + A_1 C_2 B_1 + A_2 C_3 B_2 + A_2 C_4 B_1 = 0, \quad (2.8)$$

в котором $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, C_4$ являются определителями второго порядка. Вычисляя эти определители, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} A_1 &= -i\alpha_1 \frac{\tau^2}{v_{S1}^2}, & B_1 &= -i\alpha_2 \frac{\tau^2}{v_{S2}^2}, \\ A_2 &= -\mu_1 \left[g_1^2 \frac{H_0^{(1)}(x_{11})}{H_1^{(1)}(x_{11})} - 4\alpha_1 \beta_1 \frac{H_0^{(1)}(y_{11})}{H_1^{(1)}(y_{11})} - \frac{i2\alpha_1 \eta^2}{kr_1 v_{S1}^2} \right], & (2.9) \\ B_2 &= \mu_2 \left[g_2^2 \frac{H_0^{(2)}(x_{22})}{H_1^{(2)}(x_{22})} - 4\alpha_2 \beta_2 \frac{H_0^{(2)}(y_{22})}{H_1^{(2)}(y_{22})} - \frac{i2\alpha_2 \eta^2}{kr_2 v_{S2}^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= i\alpha_0 \rho_0 \eta^2 \left[H_0^{(1)}(x_{01}) H_1^{(2)}(x_{02}) - H_0^{(2)}(x_{01}) H_1^{(1)}(x_{02}) \right], \\ C_2 &= \rho_0^2 \eta^2 \left[H_0^{(1)}(x_{01}) H_0^{(2)}(x_{02}) - H_0^{(2)}(x_{01}) H_0^{(1)}(x_{02}) \right], & (2.10) \\ C_3 &= -\alpha_0^2 \left[H_1^{(1)}(x_{01}) H_1^{(2)}(x_{02}) - H_1^{(2)}(x_{01}) H_1^{(1)}(x_{02}) \right], \\ C_4 &= i\alpha_0 \rho_0 \eta^2 \left[H_1^{(1)}(x_{01}) H_0^{(2)}(x_{02}) - H_1^{(2)}(x_{01}) H_0^{(1)}(x_{02}) \right]. \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования дисперсионного уравнения будем проводить, предполагая малую кривизну границ

$$kr_1 \gg 1, \quad kr_2 \gg 1 \quad (2.11)$$

и тонкую толщину слоя

$$k(r_2 - r_1) = kh \ll 1. \quad (2.12)$$

Предположение (2.11) позволяет использовать асимптотику функций Ханкеля

$$H_p^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm(z-0.5p\pi-0.25\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(p+k+0.5)}{k! \Gamma(p-k+0.5)} \quad (p=0,1). \quad (2.13)$$

Из асимптотических формул (2.13) и равенств (2.7) следуют приближенные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{H_0^{(1,2)}(z)}{H_1^{(1,2)}(z)} &= \pm i \left(1 \mp \frac{i}{2z} \right), & \frac{H_0^{(1)}(x_{11})}{H_1^{(1)}(x_{11})} &= i \left(1 + \frac{1}{2kr_1\alpha_1} \right), \\ \frac{H_0^{(1)}(y_{11})}{H_1^{(1)}(y_{11})} &= i \left(1 + \frac{1}{2kr_1\beta_1} \right), & \frac{H_0^{(2)}(x_{22})}{H_1^{(2)}(x_{22})} &= -i \left(1 - \frac{1}{2kr_2\alpha_2} \right), \\ \frac{H_0^{(2)}(y_{22})}{H_1^{(2)}(y_{22})} &= -i \left(1 - \frac{1}{2kr_2\beta_2} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В результате с учетом малых τ приходим к выражениям для A_2 и B_2

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{i2\rho_1\tau^2}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{\mu_1}{kr_1} \right), \\ B_2 &= \frac{i2\rho_2\tau^2}{\lambda_1 + 2\mu_2} \left(\lambda_2 + \mu_2 - \frac{\mu_2}{kr_2} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

При преобразовании формул (2.10) для коэффициентов C_1, C_2, C_3 и C_4 используем первые члены рядов Тэйлора и определители Якоби для функций Ханкеля

$$\begin{aligned} H_p^{(1)}(z)H_{p+1}^{(2)}(z) - H_p^{(2)}(z)H_{p+1}^{(1)}(z) &= \frac{i4}{\pi z}, \\ H_p^{(1)'}(z)H_p^{(2)}(z) - H_p^{(1)}(z)H_p^{(2)'}(z) &= \frac{i4}{\pi z} \end{aligned} \quad (2.16)$$

и получим формулы

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{i4\rho_0\tau^2}{\pi kr_2}, & C_2 &= -\frac{i4\rho_0^2\tau^4 h}{\pi r_1}, \\ C_3 &= -\frac{i4\alpha_0^2 h}{\pi r_1}, & C_4 &= \frac{i4\rho_0\tau^2}{\pi kr_1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

После подстановки в (2.8) формул (2.9), (2.10) и (2.17) и сокращения на $i8\rho_1\rho_2\tau^4/(\pi k)$ и после отбрасывания второго члена приходим к равенству

$$\frac{\rho_0\tau^2\alpha_1[\lambda_2 + \mu_2 - \mu_2/(kr_2)]}{\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2)r_2} + \frac{\rho_0\tau^2\alpha_2[\lambda_1 + \mu_1 + \mu_1/(kr_1)]}{\mu_2(\lambda_1 + 2\mu_1)r_1} - \frac{2kh\alpha_0^2[\lambda_1 + \mu_1 + \mu_1/(kr_1)][\lambda_2 + \mu_2 - \mu_2/(kr_2)]}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)r_1} = 0. \quad (2.18)$$

В полученном соотношении, согласно предположениям (2.11) и (2.12), величины r_1 и r_2 одного порядка и на эти величины, стоящие в знаменателях, можно сократить. Вследствие малости τ положим в равенстве (2.18) $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$. После этих операций получим выражения

$$\tau^2 = \frac{2kh\mu_1\left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{\mu_1}{(kr_1)}\right)\mu_2\left(\lambda_2 + \mu_2 - \frac{\mu_2}{(kr_2)}\right)}{\rho_0(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)\left[\frac{\mu_1\left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{\mu_1}{(kr_1)}\right)}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\mu_2\left(\lambda_2 + \mu_2 - \frac{\mu_2}{(kr_2)}\right)}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right]} \quad (2.19)$$

для квадрата скорости медленной волны. В случае одинаковых упругих сред ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $\mu = \mu_1 = \mu_2$) и при предположении, что квадрат кривизны много меньше единицы, формула (2.19) переходит в (1.14). Если оба радиуса устремить к ∞ , то вместо (2.19) получим (1.13).

§3. МЕДЛЕННАЯ ВОЛНА ВДОЛЬ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в среде, заданной в §2, действует источник, расположенный в начале координат. В волновом поле смещения не зависят от координаты z и не содержат составляющей вдоль этой координаты (рис. 3). Образующиеся на границах смещения, напряжение и давление пред-

ставляются равенствами [5]

$$\begin{aligned}
 u_{r1} &= \frac{k}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [\varkappa_1 H_m^{(1)'}(x_1) X_1 + M H_m^{(1)}(y_1) Y_1] e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{r\theta 1} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ 2\mu_1 M \left[\varkappa_1 H_m^{(1)'}(x_1) - \frac{1}{kr} H_m^{(1)}(x_1) \right] X_1 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\tilde{\theta}_1 H_m^{(1)}(y_1) - \frac{2\mu_1 \varepsilon_1}{kr} H_m^{(1)'}(y_1) \right] Y_1 \right\} e^{kt\eta} d\eta, \quad (3.1) \\
 \tau_{rr1} &= \frac{k^2}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \left[\tilde{\theta}_1 H_m^{(1)}(x_1) - \frac{2\mu_1 \varkappa_1}{kr} H_m^{(1)'}(x_1) \right] X_1 \right. \\
 &\quad \left. + 2\mu_1 M \left[\varepsilon_1 H_m^{(1)'}(y_1) - \frac{1}{kr} H_m^{(1)}(y_1) \right] Y_1 \right\} e^{kt\eta} d\eta;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{r0} &= \frac{k}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varkappa_0 [H_m^{(1)'}(x_0) X_0^+ + H_m^{(2)'}(x_0) X_0^-] e^{kt\eta} d\eta, \quad (3.2) \\
 -p &= \frac{k^2 \rho_0}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^2 [H_m^{(1)}(x_0) X_0^+ + H_m^{(2)}(x_0) X_0^-] e^{kt\eta} d\eta; \\
 u_{r2} &= \frac{k}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [\varkappa_2 H_m^{(2)}(x_2) X_2 + M H_m^{(2)}(y_2) Y_2] e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{r\theta 2} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ 2\mu_2 M \left[\varkappa_2 H_m^{(2)'}(x_2) - \frac{1}{kr} H_m^{(2)}(x_2) \right] X_2 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\tilde{\theta}_2 H_m^{(2)}(y_2) - \frac{2\mu_2 \varepsilon_2}{kr} H_m^{(2)'}(y_2) \right] Y_2 \right\} e^{kt\eta} d\eta, \quad (3.3) \\
 \tau_{rr2} &= \frac{k^2}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \left[\tilde{\theta}_2 H_m^{(2)}(x_2) - \frac{2\mu_2 \varkappa_2}{kr} H_m^{(2)'}(x_2) \right] X_2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\mu_2 M \left[\varepsilon_2 H_m^{(2)'}(y_2) - \frac{1}{kr} H_m^{(2)}(y_2) \right] Y_2 \right\} e^{kt\eta} d\eta,
 \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned}
 x_i &= -ikr\eta/v_{Pi}, & y_i &= -ikr\eta/v_{Si}, & x_0 &= -ikr\eta/v_{P0}, & M &= \frac{m}{kr}, \\
 \varkappa_i &= \frac{x_i}{kr} = -i\eta/v_{Pi}, & \varepsilon_i &= \frac{y_i}{kr} = -i\eta/v_{Si}, & \varkappa_0 &= -i\eta/v_{P0}, \\
 \tilde{\theta}_i &= 2\mu_i M^2 + \rho_i \eta^2 \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

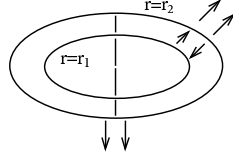


Рис. 3.

На границах $r = r_1$ и $r = r_2$ выполняются условия

$$\begin{aligned}
 u_{r1}(r_1) &= u_{r0}(r_1), & \tau_{r\theta 1}(r_1) &= 0, & \tau_{rr 1}(r_1) &= -p(r_1), \\
 u_{r2}(r_2) &= u_{r0}(r_2), & \tau_{r\theta 2}(r_2) &= 0, & \tau_{rr 2}(r_2) &= -p(r_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Граничные условия (3.5) приводят к однородной системе уравнений

$$\begin{aligned}
 &\varkappa_1 H_m^{(1)'}(x_{11})X_1 + M_1 H_m^{(1)}(y_{11})Y_1 \\
 &- \varkappa_0 H_m^{(1)'}(x_{01})X_0^+ - \varkappa_0 H_m^{(2)'}(x_{01})X_0^- = 0, \\
 &2\mu_1 M_1 \left[\varkappa_1 H_m^{(1)'}(x_{11}) - \frac{1}{kr_1} H_m^{(1)}(x_{11}) \right] X_1 \\
 &- \left[\tilde{\theta}_1 H_m^{(1)}(y_{11}) - \frac{2\mu_1 \varepsilon_1}{kr_1} H_m^{(1)'}(y_{11}) \right] Y_1 = 0, \\
 &\left[\tilde{\theta}_1 H_m^{(1)}(x_{11}) - \frac{2\mu_1 \varkappa_1}{kr_1} H_m^{(1)'}(x_{11}) \right] X_1 \\
 &+ 2\mu_1 M_1 \left[\varepsilon_1 H_m^{(1)'}(y_{11}) - \frac{1}{kr_1} H_m^{(1)}(y_{11}) \right] Y_1 \\
 &- \left[\rho_0 \eta^2 H_m^{(1)}(x_{01})X_0^+ - \rho_0 \eta^2 H_m^{(2)}(x_{01})X_0^- \right] = 0, \\
 &\varkappa_2 H_m^{(2)'}(x_{22})X_2 + M_2 H_m^{(2)}(y_{22})Y_2 \\
 &- \varkappa_0 H_m^{(1)'}(x_{02})X_0^+ - \varkappa_0 H_m^{(2)'}(x_{02})X_0^- = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\mu_2 M_2 \left[\varkappa_2 H_m^{(2)'}(x_{22}) - \frac{1}{kr_2} H_m^{(2)}(x_{22}) \right] X_2 \\
 & - \left[\tilde{\theta}_2 H_m^{(2)}(y_{22}) - \frac{2\mu_2 \varepsilon_2}{kr_2} H_m^{(2)'}(y_{22}) \right] Y_2 = 0, \\
 & \left[\tilde{\theta}_2 H_m^{(2)}(x_{22}) - \frac{2\mu_2 \varkappa_2}{kr_2} H_m^{(2)'}(x_{22}) \right] X_2 \\
 & + 2\mu_2 M_2 \left[\varepsilon_2 H_m^{(2)'}(y_{22}) - \frac{1}{kr_2} H_m^{(2)}(y_{22}) \right] Y_2 \\
 & - \rho_0 \eta^2 H_m^{(1)}(x_{02}) X_0^+ - \rho_0 \eta^2 H_m^{(2)}(x_{02}) X_0^- = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= -ikr_1 \eta / v_{P1}, & x_{22} &= -ikr_2 \eta / v_{P2}, & y_{11} &= -ikr_1 \eta / v_{S1}, \\
 y_{22} &= -ikr_2 \eta / v_{S2}, & x_{01} &= -ikr_1 / v_{P0}, & x_{02} &= -ikr_2 / v_{P0}, \\
 M_1 &= m / (kr_1), & M_2 &= m / (kr_2).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Дисперсионное уравнение рассматриваемой среды получается, если определитель системы (3.6) приравнять нулю. В полученном уравнении полезно разделить элементы первого, второго, пятого и шестого столбцов определителя соответственно на $H_m^{(1)}(x_{11})$, $H_m^{(1)}(y_{11})$, $H_1^{(2)}(x_{22})$ и $H_1^{(2)}(y_{22})$. После этих операций дисперсионное уравнение выразится, как и в §2, соотношением (2.8), в котором A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 являются определителями второго порядка. При вычислении этих определителей воспользуемся асимптотикой функций Ханкеля

$$\begin{aligned}
 H_m^{(1,2)}(z) &= \pm i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{m^2 - z^2}} \exp \left[\sqrt{m^2 - z^2} - m \operatorname{arctg} \frac{m}{z} \right] \\
 &\times \left(1 + \frac{1}{8\sqrt{m^2 - z^2}} \dots \right),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

справедливой при условиях $m \gg 1$ и $m > z$. Логарифмическая производная функция Ханкеля представляется равенством

$$\frac{H^{(1,2)'}(z)}{H^{(1,2)}(z)} = \mp \frac{\sqrt{m^2 - z^2}}{z} + \frac{z}{2(m^2 - z^2)}. \tag{3.9}$$

Для дальнейших преобразований дисперсионного уравнения введем, как и в работе [6], величину

$$\tilde{\tau} = \tau / M, \tag{3.10}$$

которая обозначает скорость распространения вдоль криволинейной поверхности. В соответствии с (3.10) образуем функции

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_i &= \sqrt{1 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_{P_1}^2}}, \quad \tilde{\beta}_i = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_{S_1}^2}}, \quad \tilde{g}_i = 2 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_{S_1}^2}, \\ \tilde{\theta}_i &= \mu_i M^2 \tilde{g}_i \quad (i = 1, 2), \quad \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\tau}^2}{v_{P_0}^2}}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Из равенств (3.10), (3.11) следуют формулы

$$\begin{aligned}\varkappa_1 \frac{H_m^{(1)'}(x_{11})}{H_m^{(1)}(x_{11})} &= -M_1 \tilde{\alpha}_1 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{P_1}^2 k r_1 \tilde{\alpha}_1^2}, \\ \varkappa_2 \frac{H_m^{(2)'}(x_{22})}{H_m^{(2)}(x_{22})} &= M_2 \tilde{\alpha}_2 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{P_2}^2 k r_2 \tilde{\alpha}_2^2}, \\ \varepsilon_1 \frac{H_m^{(1)'}(y_{11})}{H_m^{(1)}(y_{11})} &= -M_1 \tilde{\beta}_1 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{S_1}^2 k r_1 \tilde{\beta}_1^2}, \\ \varepsilon_2 \frac{H_m^{(2)'}(y_{22})}{H_m^{(2)}(y_{22})} &= M_2 \tilde{\beta}_2 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{S_2}^2 k r_2 \tilde{\beta}_2^2}, \\ \varkappa_0 \frac{H_m^{(1)'}(x_{01})}{H_m^{(1)}(x_{01})} &= -M_1 \tilde{\alpha}_0 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{P_0}^2 k r_1 \tilde{\alpha}_0^2}, \\ \varkappa_0 \frac{H_m^{(2)'}(x_{02})}{H_m^{(2)}(x_{02})} &= M_2 \tilde{\alpha}_0 + \frac{\tilde{\tau}^2}{2v_{P_0}^2 k r_2 \tilde{\alpha}_0^2},\end{aligned}\quad (3.12)$$

После вычисления определителей второго порядка и использования формул (3.12) придем к выражениям

$$\begin{aligned}A_1 &= M_1^3 \left[\rho_1 \tilde{\tau}^2 \tilde{\alpha}_1 + \frac{2\mu_1}{k r_1 M_1} (1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1) - \frac{\rho_1 \tilde{\tau}^4}{2k r_1 v_{P_1}^2 M_1 \tilde{\alpha}_1^2} \right], \\ A_2 &= \mu_1^2 M_1^4 \left[\tilde{R}_1 + \frac{2\tilde{\tau}^2}{k r_1 M_1} \left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{v_{S_1}^2 \tilde{\beta}_1^2} + \frac{\tilde{\beta}_1}{v_{P_1}^2 \tilde{\alpha}_1^2} - \frac{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1}{v_{S_1}^2} \right) \right], \\ B_1 &= -M_2^3 \left[\rho_2 \tilde{\tau}^2 \tilde{\alpha}_2 - \frac{2\mu_2}{k r_2 M_2} (1 - \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2) - \frac{\rho_2 \tilde{\tau}^4}{2k r_2 v_{P_2}^2 M_2 \tilde{\alpha}_2^2} \right], \\ B_2 &= \mu_2^2 M_2^4 \left[\tilde{R}_2 - \frac{2\tilde{\tau}^2}{k r_2 M_2} \left(\frac{\tilde{\alpha}_2}{v_{S_2}^2 \tilde{\beta}_2^2} + \frac{\tilde{\beta}_2}{v_{P_2}^2 \tilde{\alpha}_2^2} - \frac{\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2}{v_{S_2}^2} \right) \right],\end{aligned}\quad (3.13)$$

в которых $\tilde{R}_i = \tilde{g}_i^2 - 4\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_i$. Для исследования скорости медленной волны необходимо выразить функции (3.13) при малых τ , сохранив в этих функциях члены, пропорциональные τ^2 . В результате получим

$$\begin{aligned} A_1 &= M_1\rho_1\tau^2\left[1 + \frac{1}{kr_1M_1}\frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right], \\ A_2 &= -2\mu_1M_1^2\rho_1\tau^2\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\left[1 + \frac{1}{kr_1M_1}\right], \\ B_1 &= -M_2\rho_2\tau^2\left[1 - \frac{1}{kr_2M_2}\frac{\lambda_2 + 3\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right], \\ B_2 &= -2\mu_2M_2^2\rho_2\tau^2\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\left[1 - \frac{1}{kr_2M_2}\right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

Определители C_1, C_2, C_3 и C_4 вычисляются, как и в §2, с использованием первых членов рядов Тэйлора и определителей Якоби (2.16)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{i4\rho_0\tau^2}{\pi kr_2}, & C_2 &= -\frac{i4\rho_0^2\tau^4 kh}{\pi kr_2}, \\ C_3 &= \frac{i4M_2^2 kh}{\pi kr_2}, & C_4 &= -\frac{i4\rho_0\tau^2}{\pi kr_1}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

После подстановки формул (3.14) и (3.15) в равенство (2.8) отбросим второй член как малую величину и сократим уравнение на множитель

$$i8\tau^4\rho_1\rho_2M_1M_2/\pi.$$

В полученном равенстве

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_0\tau^2\mu_2M_2}{kr_2}\left[1 + \frac{1}{kr_1M_1}\frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right]\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\left[1 - \frac{1}{kr_2M_2}\right] \\ &+ \frac{\rho_0\tau^2\mu_1M_1}{kr_1}\left[1 - \frac{1}{kr_2M_2}\frac{\lambda_2 + 3\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right]\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\left[1 + \frac{1}{kr_1M_1}\right] \\ &- \frac{2\mu_1\mu_2M_1M_2^3 kh}{kr_2}\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\left[1 + \frac{1}{kr_1M_1}\right]\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\left[1 - \frac{1}{kr_2M_2}\right] = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

величины $M_1/(kr_1)$, $M_2/(kr_2)$ и $M_2/(kr_1)$ при больших радиусах могут быть рассмотрены как эквивалентные и на них можно сократить.

После этого из равенства (3.16) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^2 &= \frac{2khG_2}{\rho_0 H_2}, \\ G_2 &= \mu_1 \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(1 + \frac{1}{kr_1 M_1}\right) \mu_2 \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \left(1 - \frac{1}{kr_2 M_2}\right) M, \\ H_2 &= \mu_1 \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(1 + \frac{1}{kr_1 M_1}\right) \left(1 - \frac{1}{kr_2 M_2} \frac{\lambda_2 + 3\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right) \\ &\quad + \mu_2 \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \left(1 - \frac{1}{kr_2 M_2}\right) \left(1 + \frac{1}{kr_1 M_1} \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right),\end{aligned}\quad (3.17)$$

определяющие скорость $\tilde{\tau}$ медленной волны. Если в равенствах (3.17) перейти к плоским границам и положить $r_1 = \infty$, $r_2 = \infty$, $M = 1$ и $m = \infty$, то придем к формуле (1.13). Если в соотношении (3.17) учесть $M = m/(kr)$ и пренебречь квадратом кривизны по сравнению с единицей, то соотношения (3.17) перейдут в равенство

$$\tilde{\tau}^2 = \frac{\frac{2\mu_1\mu_2}{\rho_0} \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \frac{mh}{r}}{\mu_1 \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(1 - \frac{1}{m} \frac{M_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right) + \mu_2 \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \left(1 + \frac{1}{m} \frac{M_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right)}, \quad (3.18)$$

из которого видно, что квадрат скорости пропорционален частоте m и отношению толщины слоя h к среднему радиусу. Если предположить, что параметры у обеих упругих сред одинаковые ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $\mu = \mu_1 = \mu_2$), то равенства (3.18) заменятся соотношением

$$\tilde{\tau}^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{mh}{r} \quad (3.19)$$

и квадрат скорости пропорционален отношению толщины к радиусу.

§4. МЕДЛЕННАЯ ВОЛНА В СФЕРИЧЕСКОМ ЖИДКОМ СЛОЕ

Пусть в сферической системе координат r, θ, φ задана среда, состоящая из упругого шара 1 $r < r_1$, жидкого сферического слоя 2 $r_1 < r < r_2$ и внешности шара $r > r_2$, заполненной упругой средой 2 (рис. 4). Среда возбуждается некоторым точечным источником, расположенным в центре шара. В волновом поле смещения не зависят от координаты φ и не содержат составляющей вдоль координаты φ .

Образующиеся на границах смещения, напряжения и давление представляются равенствами [5]

$$\begin{aligned}
 u_{r1} &= \frac{k}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{N} P_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[-\Omega H_p^{(1)}(x_1) + \varkappa_1 H_p^{(1)'}(x_1) \right] X_1 \right. \\
 &\quad \left. + M H_p^{(1)'}(y_1) Y_1 \right\} e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{r\theta 1} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} P'_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \mu_1 \left[2M \varkappa_1 H_p^{(1)'}(x_1) - \frac{3M}{kr} H_p^{(1)}(x_1) \right] X_1 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\tilde{\theta}_1 H_p^{(1)}(y_1) - \frac{2\mu_1 \varepsilon_1}{kr} H_p^{(1)'}(y_1) \right] Y_1 \right\} e^{kt\eta} d\eta, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr1} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{N} P_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[\tilde{\theta}_1 H_p^{(1)}(x_1) - \frac{4\mu_1 \varkappa_1}{kr} H_p^{(1)'}(x_1) \right] X_1 \right. \\
 &\quad \left. + \mu_1 \left[2M \varepsilon_1 H_p^{(1)'}(y_1) - \frac{3M}{kr} H_p^{(1)}(y_1) \right] Y_1 \right\} e^{kt\eta} d\eta; \\
 u_{r0} &= \frac{k}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{N} P_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[\varkappa_0 H_p^{(1)'}(x_0) - \Omega H_p^{(1)}(x_0) \right] X_0^+ \right. \\
 &\quad \left. + \left[\varkappa_0 H_p^{(2)}(x_0) - \Omega H_p^{(2)}(x_0) \right] X_0^- \right\} e^{kt\eta} d\eta, \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

$$-p = \frac{k^2 \rho_0}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{N} P_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \eta^2 \left[H_p^{(1)}(x_0) X_0^+ + H_p^{(2)}(x_0) X_0^- \right] e^{kt\eta} d\eta;$$

$$\begin{aligned}
 u_{r2} &= \frac{k}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{N} P_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[-\Omega H_p^{(2)}(x_2) + \varkappa_2 H_p^{(2)'}(x_2) \right] X_2 \right. \\
 &\quad \left. + M H_p^{(2)'}(y_2) Y_2 \right\} e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{r\theta 2} &= \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} P'_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \mu_2 \left[2M \varkappa_2 H_p^{(2)'}(x_2) - \frac{3M}{kr} H_p^{(1)}(x_2) \right] X_2 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\tilde{\theta}_2 H_p^{(2)}(y_2) - \frac{2\mu_2 \varepsilon_2}{kr} H_p^{(2)'}(y_2) \right] Y_2 \right\} e^{kt\eta} d\eta, \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rr2} = & \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{N} P_m(\cos \theta) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[\tilde{\theta}_2 H_p^{(2)}(x_2) - \frac{4\mu_2 \varkappa_2}{kr} H_p^{(2)'}(x_2) \right] X_2 \right. \\ & \left. + \mu_2 \left[2M \varepsilon_2 H_p^{(2)'}(y_2) - \frac{3M}{kr} H_p^{(2)}(y_2) \right] Y_2 \right\} e^{tk\eta} d\eta, \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \varkappa_i &= -\frac{i\eta}{v_{Pi}}, & \varepsilon_i &= -\frac{i\eta}{v_{Si}}, & \varkappa_0 &= -\frac{i\eta}{v_{P0}}, \\ x_i &= -\frac{ikr\eta}{v_{Pi}}, & y_i &= -\frac{ikr\eta}{v_{Si}}, & x_0 &= -\frac{ikr\eta}{v_{P0}}, \\ \tilde{\theta}_i &= 2\mu_i M^2 + \rho_i \eta^2, & M &= \frac{m}{kr}, & \Omega &= \frac{1}{2kr} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

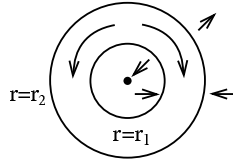


Рис. 4.

На границах $r = r_1$ и $r = r_2$ выполняются условия

$$\begin{aligned} u_{r1}(r_1) &= u_{r0}(r_1), & \tau_{r\theta 1}(r_1) &= 0, & \tau_{rr1}(r_1) &= -p(r_1), \\ u_{r2}(r_2) &= u_{r0}(r_2), & \tau_{r\theta 2}(r_2) &= 0, & \tau_{rr2}(r_2) &= -p(r_2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

Граничные условия (4.5) приводят, как и в предыдущем параграфе, к однородной системе уравнений. Определитель этой системы является левой частью дисперсионного уравнения. В этом определителе полезно элементы первого, второго, пятого и шестого столбцов разделить соответственно на

$$H_p^{(1)}(x_1), \quad H_p^{(1)}(y_1), \quad H_p^{(1)}(x_2), \quad H_p^{(1)}(y_2)$$

и представить дисперсионное уравнение соотношением (2.8). При вычислении определителей 2×2 A_1 , A_2 , B_1 и B_2 используется асимптотика функций Ханкеля. Линейная скорость распространения медленной волны $\tilde{\tau}$ представляется формулой (3.10), и через эту величину выражаются соотношения (3.11).

После вычисления определителей второго порядка и использования формул (3.12) придем к равенствам

$$\begin{aligned}
 A_1 &= M_1^3 \left[\rho_1 \tilde{\tau}^2 \tilde{\alpha}_1 + \frac{\rho_1 \tilde{\tau}^2}{2M_1 k r_1} + \frac{2\mu_1(1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1)}{k r_1 M_1} - \frac{\rho_1 \tilde{\tau}^4}{2k r_1 M_1 v_{P_1}^2 \tilde{\alpha}_1^2} \right], \\
 A_2 &= \mu_1^2 M_1^4 \left[\tilde{R}_1 - \frac{2\tilde{\tau}^2}{k r_1 M_1} \left(\frac{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1}{v_{S_1}^2} - \frac{\tilde{\alpha}_1}{v_{S_1}^2 \tilde{\beta}_1^2} - \frac{\tilde{\beta}_1}{v_{P_1}^2 \tilde{\alpha}_1^2} \right) - \frac{2\tilde{\beta}_1(1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1)}{k r_1 M_1} \right], \\
 B_1 &= M_2^3 \left[-\rho_2 \tilde{\tau}^2 \tilde{\alpha}_2 + \frac{\rho_2 \tilde{\tau}^2}{2M_2 k r_2} + \frac{2\mu_2(1 - \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2)}{k r_2 M_2} - \frac{\rho_2 \tilde{\tau}^4}{2k r_2 M_2 v_{P_2}^2 \tilde{\alpha}_2^2} \right], \\
 B_2 &= \mu_2^2 M_2^4 \left[\tilde{R}_2 - \frac{2\tilde{\tau}^2}{k r_2 M_2} \left(\frac{\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_2}{v_{S_2}^2} - \frac{\tilde{\alpha}_2}{v_{S_2}^2 \tilde{\beta}_2^2} - \frac{\tilde{\beta}_2}{v_{P_2}^2 \tilde{\alpha}_2^2} \right) - \frac{2\tilde{\beta}_2(1 - \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_2)}{k r_2 M_2} \right],
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

В выражениях (4.7) следует сохранить только члены, пропорциональные τ^2 . В результате получим

$$\begin{aligned}
 A_1 &= M_1 \rho_1 \tau^2 \left[1 + \frac{1}{k r_1 M_1} \frac{3\lambda_1 + 8\mu_1}{2(\lambda_1 + 2\mu_1)} \right], \\
 A_2 &= -\frac{\mu_1 M_1^2 \rho_1 \tau^2}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left[2(\lambda_1 + \mu_1) + \frac{3\lambda_1 + 5\mu_1}{k r_1 M_1} \right], \\
 B_1 &= -M_2 \rho_2 \tau^2 \left[1 - \frac{1}{k r_2 M_2} \frac{3\lambda_2 + 8\mu_2}{2(\lambda_2 + 2\mu_2)} \right], \\
 B_2 &= -\frac{\mu_2 M_2^2 \rho_2 \tau^2}{\lambda_1 + 2\mu_2} \left[2(\lambda_1 + \mu_1) - \frac{3\lambda_2 + 5\mu_2}{k r_2 M_2} \right].
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Определители C_1, C_2, C_3 и C_4 также представляются формулами (3.15). После подстановки формул (4.8) и (3.18) в (2.8), отбрасывания второго члена и сокращения уравнения на

$$i8\rho_1\rho_2\tau^4 M_1 M_2^2 / (\pi k r_2) \tag{4.9}$$

придем к соотношениям

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^2 &= \frac{2khG_4}{\rho_0 H_4}, \\ G_4 &= \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{1}{3\lambda_1 + 5\mu_1} 2kr_1 M_1 \right) \\ &\quad \times \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \left(\lambda_2 + \mu_2 - \frac{3\lambda_2 + 5\mu_2}{2kr_2 M_2} \right) M, \\ H_4 &= \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(\lambda_1 + \mu_1 + \frac{3\lambda_1 + 5\mu_1}{2kr_1 M_1} \right) \left(1 - \frac{1}{2kr_2 M_2} \frac{3\lambda_2 + 8\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right) \\ &\quad + \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \left(\lambda_2 + \mu_2 - \frac{3\lambda_2 + 5\mu_2}{2kr_2 M_2} \right) \left(1 + \frac{1}{2kr_1 M_1} \frac{3\lambda_1 + 8\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \right).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Если в равенстве (4.10), как и в §3, перейти к плоским границам, то придем к формулам (1.13). Если упругие среды 1 и 2 имеют одинаковые параметры ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $\mu = \mu_1 = \mu_2$), учесть в соотношении (4.10) $M = m/(kr)$ и пренебречь квадратом кривизны по сравнению с единицей, то придем к равенству

$$\tilde{\tau}^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{mh}{r},\tag{4.11}$$

которое отличается от формулы (3.19) тем, что в (4.11) r – сферический радиус, а в (3.19) – цилиндрический радиус.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. В. Крауклис, *О некоторых низкочастотных колебаниях жидкого слоя в упругой среде*. — ПММ **26**, No. 6 (1962), 1111–1115.
2. K. D. Mahrer, F. J. Mauk, *Seismic wave motion for a new model of hydraulic fracture with an induced low velocity zone*. — J. Geophys. Res. **92**, No. 8 (1987), 9293–9309.
3. Л. А. Молотков, В. П. Крауклис, *О дисперсионных характеристиках нормальных волн в слоистых моделях трещиноватых сред*. — Вопр. динам. теор. распр. сейсм. волн **28** (1989), 22–28.
4. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред*. Наука, СПб, 2001.
5. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах*. II, Наука, Ленинград (1985).
6. Н. Я. Кирпичникова, Л. А. Молотков, *О скорости волны Релея, распространяющейся вдоль криволинейных поверхностей*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **369** (2009), 48–63.

Molotkov L. A. About the slow waves in curvilinear fluid layers.

The slow wave can propagate in thin fluid layers surrounded by elastic media. This wave possesses dispersion and its velocity is equal to zero for null frequency. In order to investigate this wave, we consider several fluid layers between elastic media: (1) a plane layer, (2) cylindrical layer along element of cylinder, (3) cylindrical layer along directrix, and (4) spherical layer. In all cases we derive the expressions of velocities of the slow waves and compare these expressions. The slow waves carry big energy and are of great interest for investigation of waves propagating between holes.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 22 сентября 2010 г.