Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 379, 2010 г.

Н. Я. Кирпичникова

ВОЛНЫ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА УПРУГОЙ СРЕДЫ И ЖИДКОСТИ

Рассмотрим двумерный аналог задачи о распространении поверхностных (ПВ) и смешанных поверхностных (СПВ) волн от точечного источника, лежащего на границе Γ раздела жидкой Ω_0 и упругой Ω_1 сред. Смешанными поверхностными волнами (СПВ) мы называем волны, представляющие собой комбинацию волн типа шепчущей галереи (сосредоточенных вблизи границы в слое толщины $O(\omega^{-2/3})$ при $\omega \to \infty$, где ω есть круговая частота) и обычных поверхностных волн (экспоненциально убывающих с удалением от границы с показателем, пропорциональным ω). Такие волны впервые были описаны в работах [1–7].

В данной работе исследуются волновые процессы с различными фазовыми скоростями распространения вдоль границы Γ. Найдены поверхностные волны и смешанные поверхностные волны (СПВ), фазовые скорости которых близки к скоростям c_{St} волн Стонли (Stonely) или c_{R} волн Релея (Rayleigh, Lord), распространяющихся вдоль границы раздела Γ, к скорости распространения $a_0 = \sqrt{\lambda_0/\rho_0}$ волн в жидкости Ω_0, к продольной $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и поперечной $b = \sqrt{\mu/\rho}$ скоростям распространения в упругой среде Ω_1. Здесь λ_0 и ρ_0 есть соответственно параметр Ламе и плотность жидкой среды Ω_0, λ, μ и ρ являются параметрами Ламе и плотностью упругой среды Ω_1 соответственно. Плоскость (x, z) является плоскостью наших исследований. Обозначим продольную скорость распространения волн в жидкой среде Ω_0 через $a_0(z)$, в упругой среде Ω_1 через $a(z)$, а поперечную скорость в упругой среде Ω_1 через $b(z)$. Скорости c_{St} волн Стонли и волн Релея c_{R} берем постоянными. Для рассматриваемых неоднородных по двум координатам областям Ω_0 и Ω_1 задача рас-

---

Ключевые слова: асимптотика, пограничный слой, смешанные поверхностные волны, упругие, жидкие среды, граница раздела, фазовая скорость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), (грант 08-01-00511).

падается на скалярную задачу SH поляризации и векторную задачу о колебаниях волн типа SV или P. В областях Ω_i, $i=0,1$ волновые поля $\mathbf{u}_i(x,z)=(u_i(x,z),v_i(x,z),w_i(x,z))$, $i=0,1$ есть решения уравнений изотропной теории упругости. Вектор смещений $\mathbf{u}_i(x,z)$, $i=0,1$ для волн SH поляризации превращается в однокомпонентный вектор $\mathbf{u}_1(x,z)=(0,v_1(x,z),0)$, смещение частиц в среде для которого происходит ортогонально плоскости рассмотрений (x,z). В жидкой среде Ω_0 волны этой поляризации не распространяются, так как скорость их распространения поперечная. Вектора смещений волн типа SV и P поляризаций имеют две не равные тождественно нулю компоненты $\mathbf{u}_i(x,z)=(u_i(x,z),0,w_i(x,z))$, $i=0,1$. Смещение частиц для таких волн происходит параллельно плоскости (x,z). При этом для SV волн это смещение происходит в направлении нормали к границе раздела с поперечной скоростью $b(z)$, а для P волн смещение направлено вдоль волнового вектора и происходит с продольной скоростью $a(z)$. Интересна серия волн, распространяющихся с фазовой скоростью, близкой к наименьшей скорости из возможных. Этой наименьшей скорости, начиная со скорости в жидкости $a_0(z)$, будет соответствовать вещественный эйконал, описывающий распространение волны шепчущей галереи, другим скоростям соответствуют комплексные эйконалы и затухающие с удалением от Γ поверхностные волны. Если же фазовая скорость волны близка к другой (не к наименьшей) скорости распространения, то всем меньшим скоростям распространения будут соответствовать вещественные эйконалы и уходящие от границы Γ волны, уносящие энергию вглубь среды.

В данной работе асимптотическим методом пограничного слоя [8–10] будет исследован векторный вариант и проведено сравнение результатов в зависимости от близости фазовой скорости распространения к одной из скоростей c_{St}, c_{R}, $a_0(z)$, $a(z)$ и $b(z)$ на границе раздела Γ. Граница раздела Γ может быть прямолинейной или гладкой криволинейной. Здесь мы будем исследовать лишь поверхностные и смешанные поверхностные волны на прямолинейной границе раздела.

1. Постановка задачи

Пусть полуплоскость $-\infty<x<\infty$, $z\le 0$ есть область Ω_0, заполненная идеальной жидкостью. Упругое полупространство занимает область Ω_1, для которой $-\infty<x<\infty$, $z\ge 0$. Граница раздела $\Gamma=\{-\infty<x<\infty,\ z=0\}$ содержит точечный источник Q^* в начале координат плоскости (x,z). Мы рассматриваем двумерное пространство на плоскости (x,z), состоящее из двух сред Ω_i, $i=0,1$ с различными скоростями $b_0 \equiv 0$, $b_1 = b(z)$, $a_i = a_i(z)$, $i=0,1$, $(a_1 = a)$ распространения поперечных и продольных волн. Скорость распространения волн в жидкости Ω_0 равна $a_0 = \sqrt{\lambda_0/\rho_0}$. Область Ω_1, для которой $-\infty < x < \infty$, $z \geq 0$, есть упругая среда с параметрами Ламе $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$ и плотностью среды $\rho_1 = \rho$, достаточно плавно зависящими от координаты z. На границе $z=0$ заданы условия жесткого контакта. Точечный источник Q^* находится в начале координат на границе Г. Ось x совмещена с границей раздела.

В упругой среде Ω_1 волновое поле $\mathbf{u}_1 = (u,0,w)$ есть решение системы уравнений при $z \geq 0$, $x > 0$

$$(\lambda+2\mu)u_{xx}+\mu u_{zz}+(\lambda+\mu)w_{xz}+\rho\omega^2 u+\mu_z(w_x+u_z)=0, \quad (1.1)$$

$$(\lambda+\mu)u_{xz}+\mu w_{xx}+(\lambda+2\mu)w_{zz}+\rho\omega^2 w+\lambda_z(u_x+w_z)+2\mu_z w_z=0, \quad (1.2)$$

где величина u_{xz} определена как вторая частная производная от функции u, а именно, $u_{xz} = \partial^2 u/\partial x \partial z$.

В области Ω_0, заполненной жидкостью, волновое поле $\mathbf{u}_0 = (u_0, 0, w_0)$ есть решение следующей системы уравнений при $z < 0$, $x > 0$

$$\lambda_0 u_{0xx} + \lambda_0 w_{0xz} + \rho_0\omega^2 u_0 = 0, \quad (1.3)$$

$$\lambda_0 u_{0xz} + \lambda_0 w_{0zz} + \rho_0\omega^2 w_0 + \lambda_{0z}(u_{0x}+w_{0z}) = 0. \quad (1.4)$$

Аналогично, $u_{0xz} = \partial^2 u_0/\partial x \partial z$. На границе раздела Г выполнены условия контакта между средами:

$$\mu(u_z+w_x)|_{z=0} = 0, \Big(\bigvee -\delta(x)\Big), \quad w - w_0\big|_{z=0} = 0,$$

$$(\lambda+2\mu)w_z + \lambda u_x - \lambda_0(u_{0x}+w_{0z})\big|_{z=0} = -\delta(x), \Big(\bigvee 0\Big). \quad (1.5)$$

Здесь символ $\bigvee$ означает слово "или". Так в данной работе будет рассмотрен первый вариант для фазовых скоростей c_{St}, c_{R}, $a_0(0)$, $a(0)$, а второй вариант условий сопряжения на границе Г исследован для фазовой скорости близкой к поперечной скорости $b(0)$ распространения SV-волн. Отметим, что так как здесь рассматривается случай идеальной жидкости, которая скользит вдоль поверхности Г твердого тела Ω_1, на границе раздела не требуется непрерывности продольной составляющей векторов смещений.

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (1.1)–(1.5) следует добавить условие излучения $\mathbf{u}$ при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty$:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}\mathbf{u}\right) = 0, \tag{1.6}$$

где c есть фазовая скорость рассматриваемого волнового процесса.

2. Решение задачи (1.1)–(1.6) для фазовой скорости близкой к скоростям c_{St} и c_{R}

Решение $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ задачи (1.1)–(1.6) будет в каждой области Ω_0 и Ω_1 существенным образом зависеть от значений фазовой скорости распространения. Рассмотрим первый вариант из возможных скоростей: пусть фазовая скорость c близка к скорости c_{St} или c_{R}. В жидкой среде Ω_0 решение представим следующим выражением

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx\zeta}\left[e^{ik\alpha_0(z,\zeta)}\begin{pmatrix} u_0(x,z,\zeta) \\ w_0(x,z,\zeta)\end{pmatrix}\right] k d\zeta, \quad k = \frac{\omega}{c}, \tag{2.1}$$

где α_0, u_0 и w_0 искомые функции. В упругой среде Ω_1 вектор смещений $\mathbf{u}_1$ будем искать в виде

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx\zeta}\left[e^{ik\alpha_a(z,\zeta)}\begin{pmatrix} u_a \\ w_a\end{pmatrix} + e^{ik\alpha_b(z,\zeta)}\begin{pmatrix} u_b \\ w_b\end{pmatrix}\right] k d\zeta. \tag{2.2}$$

Здесь искомые функции u_a, w_a, u_b, w_b есть функции параметра интегрирования ζ и координат x, z. Неизвестные величины α_a и α_b зависят от параметра интегрирования ζ и координаты z. Найдем лишь главные компоненты в асимптотическом (лучевом) разложении векторов смещений (2.1)–(2.2)

$$u = \sum_{l=0} \frac{u^l}{k^l}, \quad w = \sum_{l=0} \frac{w^l}{k^l}. \tag{2.3}$$

Подставим решение (2.1)–(2.2) в уравнения и граничные условия (1.1)–(1.6) с последующим приравниванием нулю коэффициентов при каждой степени $k = \omega/c$. Получаем систему трех линейных уравнений относительно искомых величин u_0, u_a, w_b, причем из уравнений (1.1)–(1.4) следуют соотношения для трех других искомых функций $w_0 = (\alpha_0' u_0)/\zeta$, $w_a = (\alpha_a' u_a)/\zeta$ и $u_b = (-\alpha_b' w_b)/\zeta$ в решении (2.1), (2.2). Рассмотрим два возможных случая соотношения скоростей:

$$(*) \quad c < a_0(0) < b(0) < a(0) \quad \text{и} \quad (**) \quad a_0(0) < c < b(0) < a(0).$$

Приведем соответствующие этим случаям значения функций α_0', α_a', α_b' на границе Γ:

$$(*) \qquad \alpha_0' = \frac{\partial \alpha_0}{\partial z} = -ic\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{a_0^2(0)}},$$

$$\alpha_b' = \frac{\partial \alpha_b}{\partial z} = ic\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2(0)}},$$

$$\alpha_a' = \frac{\partial \alpha_a}{\partial z} = ic\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{a^2(0)}};$$

$$(**) \qquad \alpha_0' = \frac{\partial \alpha_0}{\partial z} = -c\sqrt{\frac{1}{a_0^2(0)} - \frac{\zeta^2}{c^2}},$$

$$\alpha_b' = \frac{\partial \alpha_b}{\partial z} = ic\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2(0)}},$$

$$\alpha_a' = \frac{\partial \alpha_a}{\partial z} = ic\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{a^2(0)}}.$$

Определитель системы трех линейных уравнений относительно искомых величин u_0, u_a, w_b обращается в нуль при $\zeta = 1$ и дает следующее уравнение для определения скорости распространения c поверхностной волны: в случае $(*)$ $c < a_0$

$$\left[\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}\right] = -\frac{\rho_0 a_0 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}}{b^4 \rho \sqrt{\frac{a_0^2}{c^2} - 1}}, \qquad (2.4)$$

в случае $(**)$ $c > a_0$

$$\left[\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}\right] = -\frac{i\rho_0 a_0 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}}{b^4 \rho \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{c^2}}}. \qquad (2.5)$$

В правые части уравнений (2.4) и (2.5) входит малая величина (см. [5])

$$\xi = \frac{\rho_0 a_0}{\rho b},$$

которая является отношением акустических жесткостей двух рассматриваемых сред. При $\xi \to 0$ уравнения (2.4) и (2.5) превращаются в уравнение Релея

$$\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}\ \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}, \qquad (2.6)$$

имеющее единственный положительный корень c_0 (c_0 есть релеевская скорость распространения), причем $c_0 < b(0) < a(0)$. Если $\xi \neq 0$, уравнение (2.5) имеет комплексный корень $c = c_{\mathrm{R}}$. При условии $\xi = \frac{\rho_0 a_0}{\rho b} \ll 1$ этот корень можно представить в виде (см. [5])

$$c_{\mathrm{R}} = c_0(1 - i\varepsilon), \quad \varepsilon = \xi f(a, b, c_0,) > 0.$$

Это условие ($\varepsilon > 0$) соответствует распространению вдоль границы волны Релея с затуханием, определяемым величиной ε и обусловленным излучением энергии в жидкость. Уравнение (2.4) для скорости c имеет решение $c = c_{\mathrm{St}}$ близкое к скорости a_0, именно, $c_{\mathrm{St}} = a_0(1 - \delta)$. Если предположить, что выполнены неравенства $a_0 \ll b$ и $\delta \ll 1$, получим $\delta > 0$. Положительному значению корня c_{St} соответствует вторая поверхностная волна, распространяющаяся с наименьшей скоростью вдоль границы раздела упругой среды с жидкостью. Эта волна называется волной Стонели. Соотношение скоростей для поверхностных волн получено таким

$$c_{\mathrm{St}} < a_0(0) < |c_{\mathrm{R}}| < b(0) < a(0).$$

2.1. Окончательное решение задачи (1.1)–(1.6) для фазовой скорости близкой к скоростям c_{St} и c_{R}

1^0. Выпишем решение поставленной задачи в случае скорости $c = c_{\mathrm{St}}$, которая является корнем определителя Δ_{St}, $c < a_0$:

$$\left[\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}\ \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}\right] + \frac{\rho_0 a_0 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}}{b^4 \rho \sqrt{\frac{a_0^2}{c^2} - 1}} = 0. \quad (2.7)$$

Тогда в области Ω_0, заполненной жидкостью, при $z \le 0$ вектор смещений $\mathbf{u}_0^{\mathrm{St}}$ равен

$$\mathbf{u}_0^{\mathrm{St}} = e^{ikx} e^{k\int\limits_0^z \sqrt{1-\frac{c^2}{a_0^2(z)}}dz} \frac{ic^2\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}{\Delta'_{\mathrm{St}} b^4 \rho} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{1-\frac{c^2}{a_0^2(z)}} \end{pmatrix} \left(1 + O\Big(\frac{1}{k}\Big)\right). \tag{2.8}$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c}$, величина Δ'_{St}, после применения теоремы о вычетах $(\zeta = 1)$, запишется в виде

$$\Delta'_{\mathrm{St}} = i\sqrt{1-\frac{c^2}{a_0^2}} \left\{ \frac{\rho_0 c^6}{\rho b^4 \Big(\sqrt{1-\frac{c^2}{a_0^2}}\Big)^3 \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0^2}\right) - 8\Big(\frac{c^2}{b^2} - 2\Big) - 8\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\,\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}} - 4\frac{2 - \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}} \right\}.$$

В упругой среде Ω_1 вектор смещений $\mathbf{u}_1^{\mathrm{St}}$, распространяющийся с фазовой скоростью равной скорости волн Стонели, определен следующим выражением при $z \ge 0$

$$\mathbf{u}_1^{\mathrm{St}} = e^{ikx} \left[e^{-k\int\limits_0^z \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2(z)}}dz} \frac{ic^2\sqrt{1-\frac{c^2}{a_0^2}}\big(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\big)}{\Delta'_{\mathrm{St}} b^2 \rho} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2(z)}} \end{pmatrix} + e^{-k\int\limits_0^z \sqrt{1-\frac{c^2}{b^2(z)}}dz} \frac{2\sqrt{1-\frac{c^2}{a_0^2}}\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}{\Delta'_{\mathrm{St}} b^2 \rho} \begin{pmatrix} -i\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2(z)}} \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \left(1 + O\Big(\frac{1}{k}\Big)\right). \tag{2.9}$$

Волновой процесс на границе жидкость-упругость, возбуждаемый точечным источником на Γ, распространяется с минимальной из возможных скоростей и описывает поверхностные волны типа волн Стонели. Вдоль Γ волна Стонели распространяется без затухания.

2^0. Найдем поверхностные волны в случае скорости $c = c_{\mathrm{R}}$, (см. (2.5)–(2.6) и две следующие за ними формулы). Скорость $c = c_{\mathrm{R}}$ является корнем определителя Δ_{R}, $c > a_0$:

$$\left[\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}\right] + \frac{i\rho_0 a_0\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}}{b^4\rho\sqrt{1 - \frac{a_0^2}{c^2}}} = 0. \quad (2.10)$$

Тогда в области Ω_0, заполненной жидкостью, при $z \leq 0$ вектор смещений $\mathbf{u}_0^{\mathrm{St}}$ будет равен следующему выражению

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0^R = e^{ikx} e^{-ik\int\limits_0^z \sqrt{\frac{c^2}{a_0^2(z)} - 1}\,dz} \frac{ic^2\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}{\Delta'_{\mathrm{R}} b^4 \rho} \\ \times \left(\frac{1}{-\sqrt{\frac{c^2}{a_0^2(z)} - 1}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),\end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta'_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{c^2}{a_0^2} - 1}\Bigg\{\frac{i\rho_0 c^6}{\rho b^4(\sqrt{\frac{c^2}{a_0^2} - 1})^3\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}\left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{a^2}\right) \\ -8\left(\frac{c^2}{b^2} - 2\right) - 8\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\,\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} - 4\frac{2 - \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Волна Релея в жидкости не экспоненциально убывает при $|kz| \to \infty$, а осциллирует и излучает энергию в жидкость. При условии $\xi \ll 1$ корень $c_{\mathrm{R}} = c_0(1 - i\varepsilon), \varepsilon = \xi f(a, b, c_0,) > 0$ является комплексным числом. Условие ($\varepsilon > 0$) соответствует распространению вдоль границы Γ волны Релея с затуханием, определяемым величиной ε и обусловленным излучением энергии в жидкость. В упругой среде Ω_1 вектор смещений $\mathbf{u}_1^{\mathrm{R}}$, распространяющийся с фазовой скоростью равной скорости волн Релея $c_{\mathrm{R}} = c_0(1 - i\varepsilon)$, $\varepsilon = \xi f(a, b, c_0,) > 0$, определен следующим выражением при $z \geq 0$

$$\mathbf{u}_1^R = e^{ikx}\left[e^{-k\int\limits_0^z\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2(z)}}dz}\frac{c^2\sqrt{\frac{c^2}{a_0^2}-1}\left(\frac{2}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\Delta_R' b^2\rho}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2(z)}}\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+e^{-k\int\limits_0^z\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2(z)}}dz}\frac{2\sqrt{\frac{c^2}{a_0^2}-1}\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}{\Delta_R' b^2\rho}\begin{pmatrix}-i\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2(z)}}\\ 1\end{pmatrix}\right]$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right). \tag{2.12}$$

В упругой среде $z \geq 0$ волновой процесс подобен распространению поверхностной волны, экспоненциально затухающей по мере возрастания глубины $z > 0$.

3. Решение задачи для фазовой скорости близкой к скорости в жидкости

В этом разделе ограничимся следующим вариантом: пусть фазовая скорость c близка к скорости в жидкости $a_0(z) = \sqrt{\lambda_0/\rho_0}$ на границе и соотношение между скоростью в жидкости и скоростями в упругой среде удовлетворяет неравенствам $a_0(0) < b(z) < a(z)$. Рассмотрим жидкую среду как градиентную среду по z с минимальной скоростью на границе раздела. В жидкой среде Ω_0 решение $\mathbf{u}_0$ представим следующим выражением

$$\mathbf{u}_0 = e^{ikx}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta}\begin{pmatrix}u_0(x,z,\zeta)\\ w_0(x,z,\zeta)\end{pmatrix}d\zeta, \quad k = \frac{\omega}{a_0(0)},$$

где σ, u_0 и w_0 искомые функции. В упругой среде Ω_1 вектор смещений $\mathbf{u}_1$ будем искать в виде

$$\mathbf{u}_1 = e^{ikx\zeta}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta}\begin{pmatrix}u_a\\ w_a\end{pmatrix} + e^{ik\alpha_b(z,\zeta)}\begin{pmatrix}u_b\\ w_b\end{pmatrix}\right]d\zeta.$$

Здесь искомые функции u_a, w_a, u_b, w_b есть функции параметра интегрирования ζ и координат x, z. Неизвестные величины α_a и α_b зависят от параметра интегрирования ζ и координаты z. Решение будем искать методом пограничного слоя (наиболее близкая версия этого метода см. [10]). Следуя приемам метода пограничного слоя, введем растянутые координаты:

$$\nu = \psi k^{2/3} 2^{1/3} z, \quad \sigma = \psi^2 k^{1/3} 2^{-1/3} x. \tag{3.3}$$

Величина ψ определена формулой

$$\psi^3 = \left(-\frac{a_0'(0)}{a_0(0)} \right), \quad \psi > 0, \quad z \le 0. \tag{3.4}$$

Это условие показывает, что скорость в жидкости на границе раздела минимальная и в среде Ω_0 распространяется серия волн типа шепчущей галереи. Найдем лишь главные компоненты в асимптотическом разложении векторов смещений (3.1)–(3.2)

$$u = \sum_{l=0} \frac{u^l}{k^{l/3}}, \qquad w = \sum_{l=0} \frac{w^l}{k^{l/3}}. \tag{3.5}$$

Наиболее интересна серия волн, распространяющихся с фазовой скоростью, близкой к наименьшей скорости из возможных. В этом случае в жидкости возникают смешанные поверхностные волны (СПВ), движущиеся вдоль границы Γ без затухания с фазовой скоростью близкой к скорости в жидкости.

Выпишем значения искомых величин, а затем само решение задачи в случае минимальной скорости на границе, равной скорости в жидкости. Так величины α_a и α_b выбираем в следующем виде

$$\alpha_a(z) = i \int\limits_0^z \sqrt{1 - \frac{a_0^2(0)}{a^2(z)}} dz, \quad \alpha_b(z) = i \int\limits_0^z \sqrt{1 - \frac{a_0^2(0)}{b^2(z)}} dz,$$

а их производные по z будут определены так

$$\alpha_a'(z) = i \sqrt{1 - \frac{a_0^2(0)}{a^2(z)}}, \quad \alpha_b'(z) = i \sqrt{1 - \frac{a_0^2(0)}{b^2(z)}}.$$

Главное асимптотическое решение задачи будет найдено в виде

$$\mathbf{u}_0 = \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \begin{pmatrix} Av(\zeta - \nu) + \frac{u_0^1}{k^{1/3}} \\ \frac{i\psi 2^{1/3}}{k^{1/3}} Av'(\zeta - \nu) \end{pmatrix} \Big(1 + O\big(k^{-2/3}\big)\Big) d\zeta. \tag{3.6}$$

Функция $v(-\nu+\zeta)$ является вещественнозначной функцией Эйри. Следует добавить, что в случае волны шепчущей галереи контур интегрирования от $-\infty$ до ∞ на плоскости комплексного переменного ζ следует проводить по лучу $-\infty e^{-2/3\pi}$ до 0 и от 0 до $\infty e^{1/3\pi}$, охватывая конечное число корней функции Эйри v на отрицательной части вещественной оси переменной интегрирования ζ. В упругой среде Ω_1 вектор смещений волнового процесса $\mathbf{u}_1$ ищется равным

$$\mathbf{u}_1 = \frac{e^{ikx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}}\begin{pmatrix} Be^{ik\alpha_a(z)} - \alpha_b' Ce^{ik\alpha_b(z)} \\ \alpha_a' Be^{ik\alpha_a(z)} + Ce^{ik\alpha_b(z)}\end{pmatrix} \times \left(1+O\big(k^{-2/3}\big)\right)d\zeta, \tag{3.7}$$

где неизвестные коэффициенты B, C являются функциями ζ. Величины α_a, α_b определены выше.

3.1. Окончательное решение задачи (1.1)–(1.6) для фазовой скорости близкой к скорости в жидкости

Подставим решения (3.6)–(3.7) с неизвестными коэффициентами A, B, C в граничные условия (1.5)–(1.6) и найдем их. Так, например, искомый коэффициент A есть функция параметра интегрирования ζ:

$$A = -\frac{i\psi^2}{k^{2/3}2^{1/3}\lambda_0(0)v(\zeta)}.$$

Все величины для этих коэффициентов A, B, C взяты на границе раздела, т.е. при $z=0$. Применяя теорему о вычетах в нулях функции Эйри $v(\zeta)=0$, лежащих на отрицательной части вещественной оси на плоскости комплексного переменного ζ, получим следующие значения векторов смещений в жидкости и упругой среде. В жидкой среде Ω_0 при $\nu \le 0$ вектор смещений волнового процесса $\mathbf{u}_0$ получен в виде

$$\mathbf{u}_0 = \frac{e^{ikx}\psi^2}{\lambda_0(0)k^{2/3}}\Bigg[\sum_{p=1}^{P}\frac{e^{-i\sigma\zeta_p}v(-\zeta_p-\nu)}{2^{1/3}v'(-\zeta_p)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \sum_{p=1}^{P}\frac{e^{-i\sigma\zeta_p}i\psi v'(-\zeta_p-\nu)}{k^{1/3}v'(-\zeta_p)} \times \begin{pmatrix} \frac{\rho b^4}{\rho_0 a_0\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{a^2}}}\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a_0^2}\right)^2 - \frac{4}{a_0^2}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{b^2}}\right] \\ -1 \end{pmatrix} \times \left(1+O\Big(\frac{1}{k^{2/3}}\Big)\right)\Bigg]. \tag{3.8}$$

Асимптотически главная компонента u_0^0 вектора смещений $\mathbf{u}_0$ в жидкой среде (при $z \neq 0$) распространяется подобно смешанной поверхностной волне шепчущей галереи p-ого порядка

$$u_0^0 = \frac{e^{ikx}\psi^2}{\lambda_0(0)k^{2/3}} \; \frac{e^{-i\sigma\zeta_p}v(-\zeta_p-\nu)}{2^{1/3}v'(-\zeta_p)}.$$

Компонента w_0^0 равна нулю. На границе раздела волна $\mathbf{u}_0^0$ обращается в нуль. Вдоль Г распространяется без затухания волна следующего порядка $\mathbf{u}_0^1/k^{1/3}$

$$\mathbf{u}_0|_\Gamma = -\sum_{p=1}^{P} \frac{e^{ikx}e^{-i\sigma\zeta_p}i\psi^3 v'(-\zeta_p-\nu)}{k\lambda_0 v'(-\zeta_p)}$$

$$\times\left(\begin{array}{c}\frac{\rho b^4}{\rho_0 a_0\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{a^2}}}\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a_0^2}\right)^2-\frac{4}{a_0^2}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{b^2}}\right]\\ -1\end{array}\right),$$

причем амплитуда волны много больше единицы, так как амплитуда продольной компоненты u_0^1 содержит множителем величину $\frac{\rho b}{\rho_0 a_0} = \frac{1}{\xi}$, где ξ есть малая величина (см. неравенство, после формулы (2.5)). Отметим интересное обстоятельство: в амплитуде продольной компоненты u_0^1 содержится множитель в квадратных скобках

$$\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a_0^2}\right)^2-\frac{4}{a_0^2}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{b^2}}\right],$$

который совпадает с определителем Релея, если скорость a_0 совпадает со скоростью Релея c_0 (см. формулу (2.6)), т.е. множитель обращается в нуль.

В упругой среде Ω_1 вектор смещений волнового процесса $\mathbf{u}_1$ найден равным

$$\mathbf{u}_1 = \frac{e^{ikx}i\psi^3 b^2}{k\lambda_0}\sum_{p=1}^{P}\frac{e^{-i\sigma\zeta_p}}{k^{1/3}}\left(\begin{array}{c}\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a_0^2}}{\alpha_a'}e^{ik\alpha_a(z)}-\frac{2\alpha_b'}{a_0^2}e^{ik\alpha_b(z)}\\ \left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a_0^2}\right)e^{ik\alpha_a(z)}+\frac{2}{a_0^2}e^{ik\alpha_b(z)}\end{array}\right)$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right)\right).$$

Получены поверхностные волны, убывающие экспоненциально при отходе от границы раздела вглубь упругой среды. Это непосредственно следует из того факта, что величины α_a и α_b выбираем чисто мнимыми с положительной мнимой частью

$$\alpha_a(z) = i\int\limits_0^z \sqrt{1-\frac{a_0^2(0)}{a^2(z)}}dz, \quad \alpha_b(z) = i\int\limits_0^z \sqrt{1-\frac{a_0^2(0)}{b^2(z)}}dz,$$

а их производные по z будут определены так

$$\alpha_a'(z) = i\sqrt{1-\frac{a_0^2(0)}{a^2(z)}}, \quad \alpha_b'(z) = i\sqrt{1-\frac{a_0^2(0)}{b^2(z)}}.$$

Весь волновой процесс распространяется вдоль границы раздела Γ без затухания с фазовой скоростью близкой к скорости в жидкости (см. [5]):

$$\mathrm{v}_p = a_0(0)\left(1+\frac{\zeta_p\psi^2}{k^{2/3}2^{1/3}}+\frac{\psi^3}{k}\frac{\rho b^4}{\rho_0 a_0\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{a^2}}}\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a_0^2}\right)^2-\frac{4}{a_0^2}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\frac{1}{a_0^2}-\frac{1}{b^2}}\right]+O(k^{-4/3})\right). \tag{3.10}$$

Здесь величина ω есть угловая частота, а величины ψ, ζ_p, k и γ_0 равны

$$\psi^3 = -\frac{a_0'(0)}{a_0(0)}, \quad \psi>0, \quad v(-\zeta_p)=0, \quad \zeta_p>0, \quad p=1,2,\dots, \quad k=\frac{\omega}{a_0(0)}.$$

Если скорость в жидкости близка к скорости распространения волн Релея c_0, то слагаемое при k^{-1} в формуле (3.10) мало.

4. Решение для фазовой скорости близкой к поперечной скорости (SV-волны)

Как мы отмечали ранее, решение задачи (1.1)–(1.6) будет в каждой области Ω_0 и Ω_1 существенным образом зависеть от значений фазовой скорости распространения. В этой секции рассмотрим случай фазовой скорости c близкой к поперечной скорости упругой среды $b(0) = \sqrt{\mu/\rho}$ на границе и соотношение между скоростями в жидкости и скоростями в упругой среде удовлетворяет неравенствам $a_0(0) < b(z) < a(z)$. Рассмотрим упругую среду как среду градиентную по z с минимальной скоростью на границе раздела, т.е. $b'(0) = \frac{db}{dz}(0) > 0$ при $z > 0$. В жидкой среде Ω_0 решение $\mathbf{u}_0$ представим следующим выражением

$$\mathbf{u}_0 = e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \begin{pmatrix} u_0(x,z,\zeta) \\ w_0(x,z,\zeta) \end{pmatrix} d\zeta, \quad k = \frac{\omega}{a_0(0)}, \tag{4.1}$$

где σ, u_0 и w_0 искомые функции. В упругой среде Ω_1 вектор смещений $\mathbf{u}_1$ будем искать в виде

$$\mathbf{u}_1 = e^{ikx\zeta} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \left[\begin{pmatrix} u_b \\ w_b \end{pmatrix} + e^{ik\alpha_a(z,\zeta_a)} \begin{pmatrix} u_a \\ w_a \end{pmatrix} \right] d\zeta. \tag{4.2}$$

Здесь искомые функции u_a, w_a, u_b, w_b есть функции параметра интегрирования ζ и координат x, z. Неизвестная величина α_a зависит от параметра интегрирования ζ и координаты z. Решение будем искать методом пограничного слоя. Введем растянутые координаты:

$$\nu = \psi k^{2/3} 2^{1/3} z, \qquad \sigma = \psi^2 k^{1/3} 2^{-1/3} x, \tag{4.3}$$

где величина ψ определена формулой

$$\psi^3 = \frac{b'(0)}{b(0)}, \quad \psi > 0, \quad z \geq 0. \tag{4.4}$$

Это условие показывает, что поперечная скорость в упругой среде на границе раздела минимальная и в среде Ω_1 распространяется серия волн шепчущей галереи. Наиболее интересна серия SV-волн, распространяющихся в Ω_1 с фазовой скоростью, близкой к наименьшей скорости из возможных. Главное асимптотическое решение задачи для среды Ω_0 будет найдено в виде

$$\mathbf{u}_0 = \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \begin{pmatrix} C e^{-ik\int_0^z \alpha_0(z)dz} \\ -C\alpha_0 e^{-ik\int_0^z \alpha_0(z)dz} \end{pmatrix} \times \Big(1 + O\big(k^{-2/3}\big)\Big) d\zeta, \tag{4.5}$$

где неизвестный коэффициент C является функцией ζ, а величина $\alpha_0(z)$ равна $\alpha_0(z) = \sqrt{\frac{b^2(0)}{a_0^2(z)} - 1}$. Решение задачи для упругой среды Ω_1 ведет себя как СПВ:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b = \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \frac{i\psi 2^{1/3}}{k^{1/3}} Av'(\zeta+\nu) \\ Av(\zeta+\nu) + \frac{w_b^1 v'(\zeta+\nu)}{k^{1/3}} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{e^{-k\int\limits_0^z \sqrt{1-\frac{b^2(0)}{a^2(z)}}dz}}{k^{1/3}} \begin{pmatrix} B \\ i\sqrt{1-\gamma^2}B \end{pmatrix} \Bigg\} \Big(1 + O(k^{-2/3})\Big) d\zeta, \qquad (4.6)$$

где неизвестные коэффициенты A, B, w_b^1 являются функциями ζ, а следующие величины определены равенствами $\psi^3 = \frac{b'(0)}{b(0)}$, $\gamma_0 = \frac{b(0)}{a(0)}$, $\gamma = \frac{b(0)}{a(z)}$. Функция $v(\nu+\zeta)$ является вещественнозначной функцией Эйри. Неизвестные коэффициенты A, B, w_b^1 и C найдем из граничных условий (1.5), причем в случае волн вертикальной поляризации (т.е. SV-волн) скачок тензора напряжений σ_{xz} на границе раздела $[\sigma_{xz}]|_{z=0} = -\delta(x)$, а скачок тензора напряжений σ_{zz} равен нулю, т.е. $[\sigma_{zz}]|_{z=0} = 0$. Выпишем значения коэффициентов A, B и C:

$$A = \frac{i\psi^2}{\mu k^{2/3} 2^{1/3} v(\zeta)}; \quad B = -\frac{2\psi^3 v'(\zeta)\xi a_0}{\mu k^{2/3} v(\zeta)\big[\sqrt{\frac{b^2}{a_0^2} - 1} + i\sqrt{1-\gamma_0^2}\xi\frac{a_0}{b}\big] b};$$

$$C = \frac{2\psi v'(\zeta) i\sqrt{1-\gamma_0^2}}{\mu k^{2/3} v(\zeta)\big[\sqrt{\frac{b^2}{a_0^2} - 1} + i\sqrt{1-\gamma_0^2}\xi\big]};$$

$$w_b^1 = \frac{4i\sqrt{1-\gamma_0^2}\psi^3\xi a_0}{\mu b k^{2/3} v(\zeta)\big[\sqrt{\frac{b^2}{a_0^2} - 1} + i\sqrt{1-\gamma_0^2}\xi\big]}.$$

Здесь величина ψ, входящая в значения коэффициентов, равна $\psi^3 = \frac{b_z'(0)}{b(0)}$, $\psi > 0$, а величина ξ, которая представляется отношением акустических жесткостей двух рассматриваемых сред, и входит в числитель коэффициентов B и w_b^1, является малой величиной. Применяя теорему о вычетах для корней функции Эйри $v(-\zeta_p) = 0$, $p = 1, 2, \ldots$, получим окончательное решение задачи (1.1)–(1.6). Поведение вектора смещений в жидкости при соотношении скоростей

$a_0(0) < b(0) < a(0)$ будет следующим

$$\mathbf{u}_0 = -\frac{e^{ikx} e^{-ik\int\limits_0^z \sqrt{\frac{b^2(0)}{a^2(z)}-1}dz}}{k\mu} \sum_{p=1}^{P} \frac{2e^{-i\sigma\zeta_p}\psi^3\sqrt{1-\gamma_0^2}}{\left[\sqrt{\frac{b^2}{a_0^2}-1}+i\sqrt{1-\gamma_0^2}\xi\frac{a_0}{b}\right]}$$
$$\times \left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_0^2(z)}-1}}\right)\Big(1+O\big(k^{-2/3}\big)\Big). \tag{4.7}$$

Следовательно скорости распространения в жидкой среде будет соответствовать вещественный эйконал и уходящие от границы Γ волны, уносящие энергию СПВ в жидкость. Поведение продольной составляющей вектора смещений $\mathbf{u}_1$ будет подобно поверхностной волне, распространяющейся с комплексным эйконалом и затухающей экспоненциально с удалением от границы раздела. Вертикальная поляризация SV-волн и минимум поперечной скорости на границе обеспечивают образование серии волн шепчущей галереи. В этом случае в среде Ω_1 возникают смешанные поверхностные волны (СПВ) шепчущей галереи, движущиеся вдоль границы Γ без затухания с фазовой скоростью близкой к поперечной скорости $b(0)$:

$$\mathrm{v}_p = b(0)\left(1+\frac{\zeta_p\psi^2}{k^{2/3}2^{1/3}} - \frac{4\psi^3\sqrt{1-\gamma_0^2}}{k} + O(k^{-4/3})\right).$$

Для вектора смещений в упругой среде имеем следующее выражение

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{e^{ikx}\psi^2}{\mu k^{2/3}2^{1/3}}\sum_{p=1}^{P} e^{-i\sigma\zeta_p}\Bigg\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v(-\zeta_p+\nu)}{v'(-\zeta)}\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-4i\sqrt{1-\gamma_0^2}\xi}{\left[\sqrt{\frac{b^2}{a_0^2}-1}+i\sqrt{1-\gamma_0^2}\xi\right]}\end{pmatrix}\frac{i\psi 2^{1/3}v'(-\zeta_p+\nu)}{k^{1/3}v'(-\zeta_p)}$$
$$+\frac{2^{4/3}ie^{-k\int\limits_0^z\sqrt{1-\frac{b^2(0)}{a^2(z)}}dz}\psi\xi}{k^{1/3}\left[\sqrt{\frac{b^2}{a_0^2}-1}+i\sqrt{1-\gamma_0^2}\xi\right]}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{1-\gamma^2}\end{pmatrix}\Bigg\}$$
$$\times\Big(1+O\big(k^{-2/3}\big)\Big). \tag{4.8}$$

Отметим, что на границе раздела продольная и поперечная составляющие вектора смещений упругой среды волны SV поляризации будут одного порядка малости ($O(k^{-1/3})$) и не разделяются.

5. Решение для фазовой скорости близкой к продольной скорости в твердом теле (P-волны)

Рассмотрим прежнее соотношение скоростей $a_0(0) < b(0) < a(0)$ и пусть фазовая скорость распространения близка к продольной скорости $a(0)$, имеющей минимум на границе раздела, т.е. $\frac{a'(0)}{a(0)} > 0$ при $z \geq 0$. В главном асимптотическом разложении (3.5) продольная составляющая вектора смещений является определяющей $u_a^0 \neq 0$. Проведем все вычисления подобно вычислениям в разделах 3 и 4. Для волн горизонтальной поляризации (т.е. P-волн) скачок тензора напряжений σ_{xz} на границе раздела равен нулю, т.е. $[\sigma_{xz}]|_{z=0} = 0$, а скачок тензора напряжений σ_{zz} равен следующему выражению $[\sigma_{zz}]|_{z=0} = -\delta(x)$. Тогда главное асимптотическое решение задачи для среды Ω_0 будет найдено в виде

$$\mathbf{u}_0 = \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{k^{1/3}} \begin{pmatrix} Ce^{-ik\int\limits_0^z \alpha_0(z)dz} \\ -C\alpha_0 e^{-ik\int\limits_0^z \alpha_0(z)dz} \end{pmatrix}$$

$$\times \Big(1 + O\big(k^{-2/3}\big)\Big) d\zeta. \tag{5.1}$$

Здесь неизвестный коэффициент C является функцией ζ, а величина $\alpha_0(z)$ равна $\alpha_0(z) = \sqrt{\frac{a^2(0)}{a_0^2(z)} - 1}$. Решение задачи для упругой среды Ω_1 ведет себя как СПВ:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b = \frac{e^{ikx}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \Bigg\{ \begin{pmatrix} \frac{i\psi 2^{1/3}}{k^{1/3}} Av'(\zeta + \nu) \\ Av(\zeta + \nu) + \frac{u_a^1 v'(\zeta+\nu)}{k^{1/3}} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{e^{ik\int\limits_0^z \sqrt{\frac{a^2(0)}{b^2(z)} - 1}\, dz}}{k^{1/3}} \begin{pmatrix} B \\ i\sqrt{1-\gamma^2} B \end{pmatrix} \Bigg\} \Big(1 + O(k^{-2/3})\Big) d\zeta, \tag{5.2}$$

где величины определены равенствами $\psi^3 = \frac{a'(0)}{a(0)}$, $\gamma_0 = \frac{b(0)}{a(0)}$, $\gamma = \frac{b(0)}{a(z)}$, а неизвестные коэффициенты A, B, w_b^1 являются функциями ζ:

$$A = \frac{i\psi^2}{2^{1/3}k^{2/3}\lambda v(\zeta)}; \quad B = \frac{2\psi^3\mu v'(\zeta)}{k^{2/3}\lambda^2 v(\zeta)};$$

$$C = -\frac{\psi^3(\lambda+2\mu)v'(\zeta)}{k^{2/3}\lambda^2 v(\zeta)\sqrt{\frac{a^2}{a_0^2}-1}}$$

$$u_a^1 = \frac{\psi^3(\lambda+2\mu)}{k^{2/3}\lambda^3 v(\zeta)}\left[\frac{\lambda_0 a^2}{a_0^2\sqrt{\frac{a^2}{a_0^2}-1}} + 2\mu\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right].$$

Функция $v(\nu+\zeta)$ является вещественнозначной функцией Эйри. В случае волны шепчущей галереи, как и в случае распространения СП волн в разделах 3 и 4, контур интегрирования от $-\infty$ до ∞ на плоскости комплексного переменного ζ следует проводить по лучу $-\infty e^{-2/3\pi}$ до 0 и от 0 до $\infty e^{1/3\pi}$, охватывая конечное число корней функции Эйри v на отрицательной части вещественной оси переменной интегрирования ζ. Тогда поведение волн в жидкости Ω_0 дается следующим выражением

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{p=1}^{P} \frac{ie^{ikx}e^{-i\sigma\zeta_p}e^{-ikz\sqrt{\frac{a^2(0)}{a_0^2(0)}-1}}\psi^3(\lambda+2\mu)}{k\lambda^2\sqrt{\frac{a^2(0)}{a_0^2(0)}-1}} \times \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{\frac{a^2(0)}{a_0^2(0)}-1} \end{pmatrix}\left(1+O\big(k^{-2/3}\big)\right). \tag{5.3}$$

Следовательно скорости распространения в жидкой среде будет соответствовать вещественный эйконал и уходящие от границы Γ волны, уносящие энергию СПВ в жидкость.

Для вектора смещений в упругой среде имеем следующее выражение

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{p=1}^{P} \frac{ie^{ikx}e^{-i\sigma\zeta_p}\psi^2}{\lambda k^{2/3}2^{1/3}}\left\{\begin{pmatrix} \frac{v(-\zeta_p+\nu)}{v'(-\zeta)} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i2^{1/3}\psi v'(-\zeta_p+\nu)}{k^{1/3}v'(-\zeta_p)}\begin{pmatrix} \frac{(\lambda+2\mu)}{\lambda^2}\left[\frac{\lambda_0 a^2}{a_0^2\sqrt{\frac{a^2}{a_0^2}-1}} + 2\mu\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right] \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2ie^{ikz\sqrt{\frac{a^2(0)}{b^2(0)}-1}}\psi\mu}{k^{1/3}\lambda}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{\frac{a^2(0)}{b^2(z)}-1} \end{pmatrix}\right\}\left(1+O\big(k^{-2/3}\big)\right). \tag{5.4}$$

Поведение поперечной составляющей вектора смещений $\mathbf{u}_1$ будет подобно волне, распространяющейся с вещественным эйконалом, уходящей от границы Γ и уносящей энергию СПВ в упругую среду. Горизонтальная поляризация P-волн и минимум продольной скорости на границе обеспечивают образование серии волн шепчущей галереи. В этом случае в среде Ω_1 возникают смешанные поверхностные волны (СПВ), движущиеся вдоль границы Γ без затухания с фазовой скоростью близкой к продольной скорости $a(0)$:

$$\mathrm{v}_p = a(0)\left(1 + \frac{\zeta_p \psi^2}{k^{2/3}2^{1/3}} - \frac{4\psi^3\sqrt{1-\gamma_0^2}}{k\gamma_0} + O(k^{-4/3})\right).$$

Соответственно условию $a_0(0) < b(0) < a(0)$ можно рассмотреть и условие $b(0) < a_0(0) < a(0)$, заменяя соответствующие радикалы (которые всюду берутся положительными) на их мнимые значения определенного знака. Например, для SV-волн в этом случае (см. формулу (4.7)) скорости распространения в жидкой среде будет соответствовать комплексный эйконал

$$e^{-ikz\sqrt{\frac{b^2(0)}{a_0^2(0)}-1}} = e^{-ikzi\sqrt{1-\frac{b^2(0)}{a_0^2(0)}}} = e^{kz\sqrt{1-\frac{b^2(0)}{a_0^2(0)}}}, \quad z \le 0$$

и волновое поле, экспоненциально убывающее при отходе от границы Γ вглубь жидкой среды.

Литература

1. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах.* Изд-во АН СССР, 1956.
2. Л. М. Бреховских, *О поверхностных волнах в твердом теле.* — Акуст. ж. АН СССР **12**, No. 3 (1966), 374–376.
3. Л. М. Бреховских, *О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы.* — Акуст. ж. АН СССР **13**, No. 4 (1967), 541–555.
4. И. В. Мухина, И. А. Молотков, *О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам.* — Изв. АН СССР, Физика Земли No. 4 (1967), 3–8.
5. И. А. Молотков, *Возбуждение волн Рэлея и Стонли.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **17** (1970), 168–183.
6. И. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Смешанные поверхностные волны на границе упругой среды и жидкости.* — Изв. АН СССР, Физика Земли No. 8 (1971), 3–11.
7. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы.* — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **CXV**, No. 1 (1971), 114–130.

8. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.* — Журн. эксперим. и теор. физики **16**, No. 7 (1946), 557–573.
9. R. N. Buchal, J. B. Keller, *Boundary layer problems in diffraction theory.* — J. Comm. Pure Appl. Math. **13**, No. 1 (1960), 85–114.
10. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1974.

Kirpichnikova N. Ya. Point source waves near the interface between elastic and liquid media.

Combined surface waves are under consideration, they can be presented as a combination of whispering gallery waves (concentrated near the boundary in the layer of width $O(\omega^{-2/3})$ for $\omega \to \infty$, where ω is a frequency) and standard surface waves (exponentially decaying moving away from the interface boundary with parameter proportional to ω), or waves oscillating when going away from the boundary. Those waves are obtained near the boundary $z = 0$ of inhomogeneous elastic medium $z > 0$ (propagation velocities $a(z)$ and $b(z)$) and inhomogeneous liquid (velocity in the liquid is $a_0(z)$). In the latter case there are wave fields propagating with phase velocity close to the velocities of Stonely and Rayleigh, and also close to velocities a_0, b and a on the interface boundary.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nkirp@pdmi.ras.ru

Поступило 25 сентября 2010 г.