Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 379, 2010 г.

**Г. Л. Заворохин**

# О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН РЭЛЕЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ БИО

## 1. Введение

Работа посвящена исследованию распространения волн Рэлея вдоль свободной границы неоднородного анизотропного пористого тела, насыщенного жидкостью, – среды Био.

Векторы смещений в упругой и жидкой фазах представляются в виде того варианта пространственно–временных разложений, который учитывает "погранслойный" характер поверхностных волн [1]. Для того, чтобы получить члены этих разложений, выводятся рекуррентные уравнения. Их решение находится с помощью энергетических соотношений. Из соответствующих уравнений переноса получены формулы для амплитуды волны и фазы Берри главных членов разложений. Геометро-оптические приближения для волн Рэлея остаются верными в случае произвольной формы пористого тела.

Вдоль свободной границы среды Био не всегда распространяется волна Рэлея в отличие от свободной границы упругой среды. В монографии [2] указываются условия и приводится пример, когда волна Рэлея на свободной границе пористого тела не образуется.

Следуя монографии [2, гл. 1], мы рассматриваем идеализированный вариант сред Био, когда диссипация не учитывается. Ее можно учесть, добавив соответствующие диссипативные члены в уравнения движения. Эти добавления предполагается сделать в последующих публикациях.

## 2. Постановка задачи

Пусть $\Sigma$ – граница пористого тела, насыщенного жидкостью, и $(q^1, q^2)$ – локальная система координат на $\Sigma$. Вместе с координатой $q^3 = n$, где $n$ есть расстояние от произвольной точки до границы $\Sigma$,

---

*Ключевые слова*: упругие поверхностные волны, волны Рэлея, пористые среды, ПВЛМ.

$(q^1,\, q^2,\, q^3)$ формируют регулярную систему координат в окрестности $\Sigma$. Точки пористой среды, которые близки к границе $\Sigma$, имеют координаты $(q^1,\, q^2,\, q^3)$, где $q^3 = n$ мало и положительно. Такая координатная система является традиционной для работ, описывающих общую теорию поверхностных волн. Прежде всего, нам необходимо записать динамические уравнения среды Био в координатной системе $(q^1,\, q^2,\, q^3)$. Метрический тензор играет весьма важную роль в дальнейших построениях. Пусть $d\sigma$ – расстояние между точками $q^1$, $q^2$, $q^3$ и точками $q^1 + dq^1$, $q^2 + dq^2$, $q^3 + dq^3$, тогда

$$d\sigma^2 = G_{ij} dq^i dq^j, \quad G_{ij} = G_{ji}, \tag{1}$$

где $(G_{ij})$ – метрический тензор. Если $n \to 0$, то выполнены соотношения

$$\begin{aligned} G_{ij} &= g_{ij} - 2nb_{ij} + O(n^2), \quad i,j = 1,2, \\ G_{13} &= G_{31} = G_{23} = G_{32} = 0, \quad G_{33} = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $g_{ij}$ и $b_{ij}$ – коэффициенты первой и второй квадратичных форм Гаусса поверхности $\Sigma$, соответственно.

Пусть $u_r$, $U_r$, $r = 1,2,3$ – ковариантные компоненты векторов смещений и $\varepsilon_{ij}$, $E_{ij}$ – ковариантные компоненты тензоров деформаций в упругой и жидкой фазах, соответственно. Тогда компоненты тензоров $\varepsilon_{ij}$, $E_{ij}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij} = -\Gamma^r_{kl} u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial q^l} + \frac{\partial u_l}{\partial q^k}\right), \tag{3}$$

$$E_{ij} = -\Gamma^r_{kl} U_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial q^l} + \frac{\partial U_l}{\partial q^k}\right), \tag{4}$$

где

$$\Gamma^r_{kl} = \frac{1}{2} G^{ra}\left(\frac{\partial G_{ka}}{\partial q^l} + \frac{\partial G_{al}}{\partial q^k} - \frac{\partial G_{kl}}{\partial q^a}\right). \tag{5}$$

Здесь $(G^{ra})$ – обратная матрица к $(G_{ra})$, $\Gamma^r_{kl}$ – символы Кристоффеля.

Связь между тензорами напряжений и тензорами деформаций как для упругой, так и для жидкой фаз предполагается линейной:

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl}\varepsilon_{kl} + D^{ijkl}E_{kl}, \quad \Sigma^{ij} = C^{ijkl}E_{kl} + D^{klij}\varepsilon_{kl} \tag{6}$$

Здесь $c^{ijkl} = c^{ijkl}(q^1, q^2, q^3)$ – компоненты тензора упругих постоянных, $C^{ijkl} = C^{ijkl}(q^1, q^2, q^3)$ – компоненты тензора постоянных для жидкой фазы, $D^{ijkl} = D^{ijkl}(q^1, q^2, q^3)$ – компоненты тензора постоянных, описывающих взаимодействие обеих фаз, причем выполнены соотношения

$$c^{ijkl} = c^{klij} = c^{jikl} = c^{ijlk}, \tag{7}$$

$$C^{ijkl} = C^{klij} = C^{jikl} = C^{ijlk}, \tag{8}$$

$$D^{ijkl} = D^{jikl} = D^{ijlk}. \tag{9}$$

Предполагается, что (см. [2]) уравнения движения среды Био находятся из принципа Гамильтона, где лагранжиан $L$ является разностью плотностей кинетической $W_k$ и потенциальной энергий $W_p$, т.е.

$$L = W_k - W_p, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \delta \int L\sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3 dt \\ = \int \Big( & \frac{1}{2}\rho_1^{i\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_2^{i\alpha} \frac{\partial U_i}{\partial t} \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} \\ & + \rho_{12}^{i\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{2} c^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} C^{ijkl} E_{ij} E_{kl} - D^{ijkl} \varepsilon_{ij} E_{kl} \Big) \\ & \times \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3 dt, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$W_k := \frac{1}{2}\rho_1^{i\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_2^{i\alpha} \frac{\partial U_i}{\partial t} \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + \rho_{12}^{i\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} \tag{12}$$

$$W_p := \frac{1}{2} c^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C^{ijkl} E_{ij} E_{kl} + D^{ijkl} \varepsilon_{ij} E_{kl}. \tag{13}$$

Значения коэффициентов $\rho_1^{i\alpha}$, $\rho_{12}^{i\alpha}$, $\rho_2^{i\alpha}$ в выражении для плотности кинетической энергии $W_k$ зависят от структуры пористой среды (пористости, коэффициентов извилистости пор), плотностей упругой и жидкой сред в ней (см. [2]) и от значений метрического тензора $G^{i\alpha}$.

Из (11) получаем систему динамических уравнений среды Био:

$$\begin{cases} \Big( -\rho_1^{i\alpha} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \rho_{12}^{i\alpha} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \sigma^{ij} \Big) \sqrt{G} + \frac{\partial}{\partial q^j} (\sigma^{\alpha j} \sqrt{G}) = 0, \\ \Big( -\rho_{12}^{i\alpha} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \rho_2^{i\alpha} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \Sigma^{ij} \Big) \sqrt{G} + \frac{\partial}{\partial q^j} (\Sigma^{\alpha j} \sqrt{G}) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Поверхность среды Био свободна от напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma^{i3}\big|_{n=0} &= \left[c^{i3kl}\varepsilon_{kl} + D^{i3kl}E_{kl}\right]\big|_{n=0} \\ &= \left[c^{i3kl}\left( - \Gamma^r_{kl}u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial q^l} + \frac{\partial u_l}{\partial q^k}\right)\right)\right. \\ &\quad \left. + D^{i3kl}\left( - \Gamma^r_{kl}U_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial q^l} + \frac{\partial U_l}{\partial q^k}\right)\right)\right]_{n=0} = 0,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{i3}|_{n=0} &= \left[C^{i3kl}E_{kl} + D^{kli3}\varepsilon_{kl}\right]|_{n=0} \\ &= \left[C^{i3kl}\left( - \Gamma^r_{kl}U_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial q^l} + \frac{\partial U_l}{\partial q^k}\right)\right)\right. \\ &\quad \left. + D^{kli3}\left( - \Gamma^r_{kl}u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial q^l} + \frac{\partial u_l}{\partial q^k}\right)\right)\right]_{n=0} = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

## 3. Анзац

Будем искать решения системы уравнений (14) в виде формальных асимптотических разложений (ПВЛ-разложений), учитывающих "погранслойный" характер волн Рэлея:

$$\begin{aligned}u_l &\cong e^{ip\theta(q^1,q^2,t)} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{u_{sl}(q^1,q^2,t,\nu)}{(ip)^s}, \quad \nu = pn. \\ U_l &\cong e^{ip\theta(q^1,q^2,t)} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{v_{sl}(q^1,q^2,t,\nu)}{(ip)^s}, \quad \nu = pn.\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $p$ – большой параметр, $e^{ip\theta(q^1,q^2,t)}$ – фазовый множитель. Полагаем, что

$$\lim_{\nu\to\infty} u_{sl} = 0, \qquad \lim_{\nu\to\infty} v_{sl} = 0. \tag{18}$$

Зависимость $u_{sl}$, $v_{sl}$ от координаты слоя $\nu = pn$ и условия (18) связаны с локализацией волны Рэлея вблизи поверхности $\Sigma$ – "погранслойное" свойство.

Подставим разложения (17) в систему уравнений (14) и приравняем все коэффициенты при различных степенях $\frac{1}{p}$ нулю. В результате получим рекуррентную последовательность систем уравнений.

Первая система уравнений:

$$\begin{cases} (N_0^1(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0))^\alpha & := -\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2 u_{0i} - \rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2 v_{0i} \\ & +c^{\alpha jkl}Q_jQ_lu_{0k}\sqrt{G} + D^{\alpha jkl}Q_jQ_lv_{0k}\sqrt{G} = 0, \\ (N_0^2(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0))^\alpha & := -\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2 u_{0i} - \rho_2^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2 v_{0i} \\ & +C^{\alpha jkl}Q_jQ_lv_{0k}\sqrt{G} + D^{kl\alpha j}Q_jQ_lu_{0k}\sqrt{G} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Здесь $Q_j$ – следующие операторы:

$$Q_j = \begin{cases} \theta_j, & j = 1,2, \\ -i\dfrac{\partial}{\partial\nu}, & j = 3. \end{cases} \tag{20}$$

Очевидно, операторы $Q_j$ перестановочны: $Q_jQ_l = Q_lQ_j$.

Подразумевается, что коэффициенты $\rho_1^{i\alpha},\ldots,c^{ijkl}$ в системе уравнений (19) вычислены на поверхности $\Sigma$, т.е. $n=0$ для этих коэффициентов.

Если подставить разложения (17) в граничные условия (15), (16), то нетрудно получить, что в первом приближении

$$\left[c^{i3kl}Q_lu_{0k} + D^{i3kl}Q_lv_{0k}\right]|_{\nu=0} = 0, \tag{21}$$

$$\left[C^{i3kl}Q_lv_{0k} + D^{kli3}Q_lu_{0k}\right]|_{\nu=0} = 0. \tag{22}$$

Уравнения (19), (20) и условия (18), (21), (22) определяют самосопряженную краевую задачу на полуоси $0 \le \nu < +\infty$, если $q^1, q^2$ и $t$ фиксированы. Пара векторов $(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0) = (u_{0i}, v_{0i})$ играет роль собственной функции, соответствующей собственному значению $\theta_t^2$. Полагаем, что собственное значение имеет кратность, равную единице. Домножим первое уравнение в (19) на $\overline{u}_{0\alpha}$, а второе – на $\overline{v}_{0\alpha}$, и просуммируем полученные выражения по $\alpha$, после чего сложим равенства.

Результат интегрирования по $\nu$ этих равенств – формула:

$$\begin{aligned} &\theta_t^2 \int\limits_0^{+\infty} \Big(\rho_1^{i\alpha}u_{0i}\overline{u_{0\alpha}} + \rho_{12}^{i\alpha}\left(v_{0i}\overline{u_{0\alpha}} + u_{0i}\overline{v_{0\alpha}}\right) + \rho_2^{i\alpha}v_{0i}\overline{v_{0\alpha}}\Big) \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \Big(c^{\alpha jkl}Q_lu_{0k}\overline{Q_ju_{0\alpha}} + D^{\alpha jkl}Q_lv_{0k}\overline{Q_ju_{0\alpha}} \\ &+ C^{\alpha jkl}Q_lv_{0k}\overline{Q_jv_{0\alpha}} + D^{kl\alpha j}Q_lu_{0k}\overline{Q_jv_{0\alpha}}\Big)d\nu. \end{aligned} \tag{23}$$

Следствие соотношения (23) – положительность $\theta_t^2$. Из двух значений $\theta_t$ традиционно выбираем отрицательное. Уравнение

$$-\theta_t = -\theta_t(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2) := H(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2)$$

или

$$\theta_t + H(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2) = 0 \tag{24}$$

является классическим уравнением Гамильтона–Якоби.

Каноническая система для уравнения (24) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dq^j}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_j} = V^j, \quad \frac{d\theta_0}{ds} = 0, \\ &\frac{d\theta_j}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \quad j = 1, 2, \quad \theta_0 = \theta_t, \end{aligned} \tag{25}$$

Выражения $V^j = \frac{\partial H}{\partial \theta_j}$ составляют контравариантные компоненты групповой скорости в координатной системе $q^1, q^2$ на поверхности $\Sigma$. Уравнения (25) – дифференциальные уравнения вдоль пространственно-временных лучей, соответствующих волнам Рэлея.

## 4. Уравнения переноса для волн Рэлея

Пусть $(\mathbf{u}_{00}, \mathbf{v}_{00}) = (u_{00k}(q^1, q^2, \nu), v_{00k}(q^1, q^2, \nu))$ – отличное от нуля фиксированное решение краевой задачи (18)–(22). Рассматривается невырожденный случай, так что любое другое решение задачи (18)–(22) пропорционально $(\mathbf{u}_{00}, \mathbf{v}_{00})$:

$$(u_{0k}, v_{0k}) = (\chi_0(q^1, q^2, t) u_{00k}(q^1, q^2, \nu), \chi_0(q^1, q^2, t) v_{00k}(q^1, q^2, \nu)) \tag{26}$$

Множитель $\chi_0(q^1, q^2, t)$ называется комплексной интенсивностью волны Рэлея. Функция $\chi_0(q^1, q^2, t)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению в частных производных. Приравняем члены порядка $p$ в левой части системы уравнений (14) к нулю:

$$\begin{aligned} (N_0^1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + N_1^1(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0))^\alpha &:= -\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2 u_{1i} - \rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2 v_{1i} \\ &+ c^{\alpha jkl} Q_j Q_l u_{1k}\sqrt{G} + D^{\alpha jkl} Q_j Q_l v_{1k}\sqrt{G} - 2\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \frac{\partial u_{0i}}{\partial t} \\ -\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_{tt} u_{0i} - 2\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \frac{\partial v_{0i}}{\partial t} &- \rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_{tt} v_{0i} - i\nu\theta_t^2 \frac{\partial}{\partial n}(\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}) u_{0i} \end{aligned}$$

$$-i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G})v_{0i}+(c^{ijkl}Q_ku_{0l}+D^{ijkl}Q_kv_{0l})\sqrt{G}\Gamma^{\alpha}_{ij}$$

$$-(c^{\alpha jkl}Q_ju_{0r}+D^{\alpha jkl}Q_jv_{0r})\sqrt{G}\Gamma^{r}_{kl}+Q_ku_{0l}\frac{\partial}{\partial q^j}(c^{\alpha jkl}\sqrt{G})$$

$$+Q_kv_{0l}\frac{\partial}{\partial q^j}(D^{\alpha jkl}\sqrt{G})+i\nu\frac{\partial}{\partial n}(c^{\alpha jkl}\sqrt{G})Q_jQ_ku_{0l}$$

$$+i\nu\frac{\partial}{\partial n}(D^{\alpha jkl}\sqrt{G})Q_jQ_kv_{0l}+c^{\alpha jk'l}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{k'}}+D^{\alpha jk'l}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{k'}}$$

$$+c^{\alpha j'kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{j'}}+D^{\alpha j'kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{j'}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}c^{\alpha j'k'l}u_{0l}$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}D^{\alpha j'k'l}v_{0l}=0\quad j',k'=1,2,\quad i,j,k,l,r=1,2,3,$$

$$(N_0^2(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)+N_1^2(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0))^{\alpha}:=-\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2u_{1i}-\rho_2^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t^2v_{1i}$$

$$+C^{\alpha jkl}Q_jQ_lv_{1k}\sqrt{G}+D^{kl\alpha j}Q_jQ_lu_{1k}\sqrt{G}-2\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t\frac{\partial u_{0i}}{\partial t}$$

$$-\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_{tt}u_{0i}-2\rho_2^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t\frac{\partial v_{0i}}{\partial t}-\rho_2^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_{tt}v_{0i}--i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G})u_{0i}$$

$$-i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho_2^{i\alpha}\sqrt{G})v_{0i}+(C^{ijkl}Q_kv_{0l}+D^{klij}Q_ku_{0l})\sqrt{G}\Gamma^{\alpha}_{ij}$$

$$-(C^{\alpha jkl}Q_jv_{0r}+D^{kl\alpha j}Q_ju_{0r})\sqrt{G}\Gamma^{r}_{kl}+Q_kv_{0l}\frac{\partial}{\partial q^j}(C^{\alpha jkl}\sqrt{G})$$

$$+Q_ku_{0l}\frac{\partial}{\partial q^j}(D^{\alpha jkl}\sqrt{G})+i\nu\frac{\partial}{\partial n}(C^{\alpha jkl}\sqrt{G})Q_jQ_kv_{0l}$$

$$+i\nu\frac{\partial}{\partial n}(D^{kl\alpha j}\sqrt{G})Q_jQ_ku_{0l}+C^{\alpha jk'l}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{k'}}+D^{k'l\alpha j}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{k'}}$$

$$+C^{\alpha j'kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{j'}}+D^{kl\alpha j'}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{j'}}+\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}C^{\alpha j'k'l}v_{0l}$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}D^{k'l\alpha j'}u_{0l}=0\quad j',k'=1,2,\quad i,j,k,l,r=1,2,3, \tag{27}$$

где коэффициенты $\rho_1^{i\alpha},\rho_2^{i\alpha},\rho_{12}^{i\alpha},\sqrt{G}\dots$ взяты на поверхности $\Sigma$, т.е. при $n=0$.

Граничные условия (15),(16) и условие (18) условия приводят к тому, что коэффициенты порядка $O(1)(p \to \infty)$ в левых частях выражений (15), (16) должны быть равны нулю.

Получаем:

$$\Big[c^{i3kl}(Q_l u_{1k} - \Gamma^r_{kl} u_{0r}) + c^{i3kl'} \frac{\partial u_{0k}}{\partial q^{l'}} + D^{i3kl}(Q_l v_{1k} - \Gamma^r_{kl} v_{0r}) + D^{i3kl'} \frac{\partial v_{0k}}{\partial q^{l'}}\Big]_{n=0} = 0, \tag{28}$$

$$\Big[C^{i3kl}(Q_l v_{1k} - \Gamma^r_{kl} v_{0r}) + C^{i3kl'} \frac{\partial v_{0k}}{\partial q^{l'}} + D^{kli3}(Q_l u_{1k} - \Gamma^r_{kl} u_{0r}) + D^{kl'i3} \frac{\partial u_{0k}}{\partial q^{l'}}\Big]_{n=0} = 0. \tag{29}$$

Уравнения (27) и условия (18), (28)б (29) могут рассматриваться в качестве краевой задачи на полуоси $0 \le \nu < +\infty$ для пары векторов $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$. Соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение $(\mathbf{u}_{00}, \mathbf{v}_{00})$. Для того, чтобы получить необходимое и достаточное условие разрешимости краевой задачи для $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$, рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \Big[(N_0^1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + N_1^1(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0))\mathbf{u}_{00} + (N_0^2(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + N_1^2(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0))\mathbf{v}_{00}\Big] d\nu = 0, \tag{30}$$

$$\mathbf{u}_0 = \chi_0(q^1, q^2, t)\mathbf{u}_{00} = \big|\chi_0(q^1, q^2, t)\big| e^{i\mu(q^1, q^2, t)} \mathbf{u}_{00}, \tag{31}$$

$$\mathbf{v}_0 = \chi_0(q^1, q^2, t)\mathbf{v}_{00} = \big|\chi_0(q^1, q^2, t)\big| e^{i\mu(q^1, q^2, t)} \mathbf{v}_{00}. \tag{32}$$

Здесь скалярное произведение определяется соотношением

$$(\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2) := \sum_{j=1}^{3} \psi_1^j \overline{\psi}_{2j}, \tag{33}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Интегрирование по частям приводит нас к следующему условию разрешимости:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{+\infty} \big(N_1^1(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0)\mathbf{u}_{00} + N_1^2(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0)\mathbf{v}_{00}\big)\, d\nu \\
&\quad + i\Gamma^r_{kl}(c^{\alpha 3kl}u_{0r}\overline{u_{00\alpha}}\sqrt{G} + D^{\alpha 3kl}v_{0r}\overline{u_{00\alpha}}\sqrt{G})|_{\nu=0} \\
&\quad + i\Gamma^r_{kl}(C^{\alpha 3kl}v_{0r}\overline{v_{00\alpha}}\sqrt{G} + D^{kl\alpha 3}u_{0r}\overline{v_{00\alpha}}\sqrt{G})|_{\nu=0} \\
&\quad - i(c^{\alpha 3kl'}\frac{\partial u_{0k}}{\partial q^{l'}}\sqrt{G}\overline{u_{00\alpha}} + D^{\alpha 3kl'}\frac{\partial v_{0k}}{\partial q^{l'}}\overline{u_{00\alpha}}\sqrt{G})|_{\nu=0} \\
&\quad - i(C^{\alpha 3kl'}\frac{\partial v_{0k}}{\partial q^{l'}}\sqrt{G}\overline{v_{00\alpha}} + D^{kl'\alpha 3}\frac{\partial u_{0k}}{\partial q^{l'}}\sqrt{G}\overline{v_{00\alpha}})|_{\nu=0} = 0, \\
&\qquad \mathbf{u}_0 = \chi_0\mathbf{u}_{00}, \quad \mathbf{v}_0 = \chi_0\mathbf{v}_{00}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных для $\chi_0$ (34) (см. формулы (27)) – искомое “уравнение переноса для волн Рэлея”.

Решая уравнение (34), получаем

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{01} + \chi_1(q^1,q^2,t)\mathbf{u}_{00}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{01} + \chi_1(q^1,q^2,t)\mathbf{v}_{00}, \tag{35}$$

где $(\mathbf{u}_{01},\mathbf{v}_{01})$ – произвольное фиксированное решение краевой задачи для $(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)$. Дифференциальное уравнение для $\chi_1(q^1,q^2,t)$ может быть получено из условия разрешимости краевой задачи для $(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)$. Далее итерируем для $(\mathbf{u}_s,\mathbf{v}_s)$, $s = 2,3,\ldots$.

## 5. Формулы усреднения. Первое гидроэнергетическое равенство

В целях получения явной формулы для $\chi_0$ будем использовать методику усреднения функций, предложенную Уиземом [3]. Если $f(t)$ – $T$-периодическая функция ($T > 0$), заданная на оси $-\infty < t < +\infty$, то усреднением $\langle f\rangle$ функции $f$ называется интеграл

$$\langle f\rangle_T := \frac{1}{T}\int\limits_\alpha^{T+\alpha} f(t)dt, \tag{36}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$ – любое вещественное число. Пусть $a$, $b \in \mathbb{C}$, $\omega > 0$, тогда справедлива формула

$$\left\langle \mathrm{Re}(ae^{-i\omega t})\,\mathrm{Re}(be^{-i\omega t})\right\rangle_T = \frac{1}{2}Re(a\overline{b}), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{37}$$

Рассмотрим также выражения $a_1 e^{ip\theta(t)}$ и $a_2 e^{ip\theta(t)}$, где $a_j(t)$ – гладкие комплекснозначные функции переменной $t$, $\theta(t)$ – вещественнозначная функция и $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$. Пусть $p \to +\infty$, тогда в малой окрестности фиксированной точки $t^{'}$ будет выполнено:

$$a_j(t)e^{ip\theta(t)} \approx a_j(t^{'})e^{ip\theta(t^{'})}e^{ip\frac{d\theta(t^{'})}{dt}(t-t^{'})}, \quad j = 1, 2.$$

Вторая экспонента в правой части равенства является периодической функцией с периодом $T = \frac{2\pi}{p\left|\frac{d\theta}{dt}\right|}$. Очевидно, что

$$\left\langle \mathrm{Re}(a_1(t^{'})e^{ip\theta(t^{'})}e^{ip\frac{d\theta(t^{'})}{dt}(t-t^{'})})\,\mathrm{Re}(a_2(t^{'})e^{ip\theta(t^{'})}e^{ip\frac{d\theta(t^{'})}{dt}(t-t^{'})})\right\rangle_T = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(a_1(t^{'})\overline{a_2(t^{'})}). \tag{38}$$

Введем обозначение согласно формуле (38)

$$\left\langle \mathrm{Re}(a_1 e^{ip\theta(t)})\,\mathrm{Re}(a_2 e^{ip\theta(t)})\right\rangle_T := \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(a_1\overline{a_2}). \tag{39}$$

Напомним, что физический смысл имеют вещественные части от комплекснозначных "смещений". Сейчас мы получим некоторые важные для дальнейших вычислений формулы, используя уже вещественные смещения.

Обратимся к энергетическому тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E} + \mathrm{div}\,\mathbf{S} = 0, \tag{40}$$

где $\mathcal{E}$ – плотность энергии среды Био (см. (12), (13))

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho_1^{i\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_2^{i\alpha}\frac{\partial U_i}{\partial t}\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + \rho_{12}^{i\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}\\ + \frac{1}{2}c^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}C^{ijkl}E_{ij}E_{kl} + D^{ijkl}\varepsilon_{ij}E_{kl},\end{aligned} \tag{41}$$

$\mathbf{S} = (S^j)$ – вектор потока энергии. Его компоненты в произвольной системе координат

$$\begin{aligned} S^j &= -\sigma^{ij}\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Sigma^{ij}\frac{\partial U_i}{\partial t} \\ &= -(c^{ijkl}\varepsilon_{kl} + D^{ijkl}E_{kl})\frac{\partial u_i}{\partial t} - (C^{ijkl}E_{kl} + D^{klij}\varepsilon_{kl})\frac{\partial U_i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{42}$$

Вместо $u_i, U_i$ подставим в (42), (12), (13) вещественные части главных членов ПВЛ-разложений (17) $\mathrm{Re}(e^{ip\theta(q^1,q^2,t)}u_{0i})$, $\mathrm{Re}(e^{ip\theta(q^1,q^2,t)}v_{0i})$, после чего в полученных выражениях для $S^j$, $W_k$, $W_p$ ограничимся старшими членами при $p \to +\infty$. Функции $S^j$, $W_k$, $W_p$ будут периодическими по $t$, $q^1$, $q^2$. Усредняя их по этим переменным с помощью формулы (39) и интегрируя по $\nu$, приходим к формулам для главных частей усреднений:

$$\int_0^{+\infty}\langle W_k\rangle d\nu = \frac{p}{4}\theta_t^2\int_0^{+\infty}(\rho_1^{i\alpha}u_{0i}\overline{u_{0\alpha}}+\rho_{12}^{i\alpha}(u_{0i}\overline{v_{0\alpha}}+v_{0i}\overline{u_{0\alpha}})+\rho_2^{i\alpha}v_{0i}\overline{v_{0\alpha}})d\nu, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\langle W_p\rangle d\nu = \frac{p}{4}\int_0^{+\infty}\big(&c^{ijkl}Q_iu_{0j}\overline{Q_ku_{0l}} + D^{ijkl}Q_iv_{0j}\overline{Q_ku_{0l}} \\ &+ C^{ijkl}Q_iv_{0j}\overline{Q_kv_{0l}} + D^{klij}Q_iu_{0j}\overline{Q_kv_{0l}}\big)d\nu, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\left\langle S^j\right\rangle d\nu = -\frac{p}{2}\theta_t\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}\,\big(&c^{\alpha jkl}u_{0\alpha}\overline{Q_ku_{0l}} + D^{\alpha jkl}v_{0\alpha}\overline{Q_ku_{0l}} \\ &+ C^{\alpha jkl}v_{0\alpha}\overline{Q_kv_{0l}} + D^{kl\alpha j}u_{0\alpha}\overline{Q_kv_{0l}})d\nu, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{45}$$

Учитывая уравнение (23), нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{+\infty}\langle L\rangle\, d\nu \equiv \int_0^{+\infty}(\langle W_k\rangle - \langle W_p\rangle)d\nu = 0. \tag{46}$$

Равенство (46) является аналогом известной в механике теоремой вириала. Дифференцируя (46) по $\theta_j$, $j = 1, 2$ и используя (24)–(25), (43)–(46), получаем соотношение, которое естественно назвать *первым гидроэнергетическим равенством*

$$\mathbf{V}\int_0^{+\infty}\langle\mathcal{E}\rangle\, d\nu = \int_0^{+\infty}\langle\mathbf{S}\rangle\, d\nu. \tag{47}$$

Здесь $\mathbf{V} = (V^1, V^2)$ – вектор групповой скорости волны Рэлея, $\mathbf{S} = (S^1, S^2)$ – вектор потока энергии.

## 6. Уравнение для $\chi_0(q^1, q^2, t)$

Вернемся к соотношениям (27)–(34) и преобразуем их. Левая часть уравнения (34) содержит интегралы

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{+\infty} i\nu \frac{\partial}{\partial n}(c^{\alpha jkl}\sqrt{G})(Q_j Q_k u_{0l})\overline{u_{00\alpha}}d\nu,\\ \int\limits_0^{+\infty} i\nu \frac{\partial}{\partial n}(D^{\alpha jkl}\sqrt{G})(Q_j Q_k v_{0l})\overline{u_{00\alpha}}d\nu,\end{gathered}\tag{48}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{+\infty} i\nu \frac{\partial}{\partial n}(C^{\alpha jkl}\sqrt{G})(Q_j Q_k v_{0l})\overline{v_{00\alpha}}d\nu,\\ \int\limits_0^{+\infty} i\nu \frac{\partial}{\partial n}(D^{kl\alpha j}\sqrt{G})(Q_j Q_k u_{0l})\overline{v_{00\alpha}}d\nu.\end{gathered}\tag{49}$$

Для дальнейших рассмотрений удобно перенести оператор $Q_j$ с $Q_k u_{0l}(Q_k v_{0l})$ на $\overline{u_{00\alpha}}(\overline{v_{00\alpha}})$. Для этого проинтегрируем по частям интегралы (48)–(49) для $j = 3$, т.е. $Q_3 = -i\frac{\partial}{\partial \nu}$. Интегралы

$$-\int\limits_0^{+\infty} Q_k u_{0l}\frac{\partial}{\partial n}(c^{\alpha 3kl}\sqrt{G})\overline{u_{00\alpha}}d\nu, \quad -\int\limits_0^{+\infty} Q_k v_{0l}\frac{\partial}{\partial n}(D^{\alpha 3kl}\sqrt{G})\overline{u_{00\alpha}}d\nu,$$

$$-\int\limits_0^{+\infty} Q_k v_{0l}\frac{\partial}{\partial n}(C^{\alpha 3kl}\sqrt{G})\overline{v_{00\alpha}}d\nu, \quad -\int\limits_0^{+\infty} Q_k u_{0l}\frac{\partial}{\partial n}(D^{kl\alpha 3}\sqrt{G})\overline{v_{00\alpha}}d\nu$$

сократятся.

Также перенесем оператор $Q_j$ с $u_{0r}(v_{0r})$ на $\overline{u_{00\alpha}}(\overline{v_{00\alpha}})$ в интегралах

$$\begin{gathered}-\int\limits_0^{+\infty} c^{\alpha jkl}\sqrt{G}\Gamma^r_{kl}Q_j u_{0r}\overline{u_{00\alpha}}d\nu,\\ -\int\limits_0^{+\infty} D^{\alpha jkl}\sqrt{G}\Gamma^r_{kl}Q_j v_{0r}\overline{u_{00\alpha}}d\nu,\end{gathered}\tag{50}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_0^{+\infty} C^{\alpha jkl}\sqrt{G}\Gamma^r_{kl}Q_j v_{0r}\overline{v_{00\alpha}}d\nu,\\
&-\int\limits_0^{+\infty} D^{kl\alpha j}\sqrt{G}\Gamma^r_{kl}Q_j u_{0r}\overline{v_{00\alpha}}d\nu.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

И здесь интегрируем по частям интегралы (50)–(51) для $j=3$. Внеинтегральные члены сокращаются с членами

$$
\begin{aligned}
&i\Gamma^r_{kl}(c^{\alpha 3kl}u_{0r}\overline{u}_{00\alpha}\sqrt{G}+D^{\alpha 3kl}v_{0r}\overline{u}_{00\alpha}\sqrt{G})|_{\nu=0}\\
&+i\Gamma^r_{kl}(C^{\alpha 3kl}v_{0r}\overline{v}_{00\alpha}\sqrt{G}+D^{kl\alpha 3}u_{0r}\overline{v}_{00\alpha}\sqrt{G})|_{\nu=0}.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Аналогично переносим оператор $Q_j$ на $\overline{u_{00\alpha}}(\overline{v_{00\alpha}})$ в интегралах

$$
\int\limits_0^{+\infty} c^{\alpha jk'l}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{u_{00\alpha}}d\nu,\quad \int\limits_0^{+\infty} D^{\alpha jk'l}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{u_{00\alpha}}d\nu,
\tag{53}
$$

$$
\int\limits_0^{+\infty} C^{\alpha jk'l}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{v_{00\alpha}}d\nu,\quad \int\limits_0^{+\infty} D^{k'l\alpha j}\sqrt{G}Q_j\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{v_{00\alpha}}d\nu.
\tag{54}
$$

Опять-таки интегрируем по частям для $j=3$. Внеинтегральные члены сокращаются с членами

$$
\begin{aligned}
&-i\left(c^{\alpha 3kl'}\frac{\partial u_{0k}}{\partial q^{l'}}\sqrt{G}\overline{u_{00\alpha}}+D^{\alpha 3kl'}\frac{\partial v_{0k}}{\partial q^{l'}}\overline{u_{00\alpha}}\sqrt{G}\right)\Big|_{\nu=0}\\
&-i\left(C^{\alpha 3kl'}\frac{\partial v_{0k}}{\partial q^{l'}}\sqrt{G}\overline{v_{00\alpha}}+D^{kl'\alpha 3}\frac{\partial u_{0k}}{\partial q^{l'}}\sqrt{G}\overline{v_{00\alpha}}\right)\Big|_{\nu=0},
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Учитывая эти результаты, получаем формулу

$$
\int\limits_0^{+\infty}\Bigg[\Big(-2\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t\frac{\partial u_{0i}}{\partial t}-\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_{tt}u_{0i}-2\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t\frac{\partial v_{0i}}{\partial t}-\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_{tt}v_{0i}\Big)\overline{u_{00\alpha}}
$$

$$
-i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G})u_{0i}\overline{u_{00\alpha}}-i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G})v_{0i}\overline{u_{00\alpha}}+(c^{ijkl}Q_k u_{0l}
$$

$$+D^{ijkl}Q_k v_{0l})\sqrt{G}\Gamma^{\alpha}_{ij}\overline{u_{00\alpha}} - (c^{\alpha jkl}u_{0r} + D^{\alpha jkl}v_{0r})\sqrt{G}\Gamma^{r}_{kl}\overline{Q_j u_{00\alpha}}$$

$$+Q_k u_{0l}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(c^{\alpha j' kl}\sqrt{G})\overline{u_{00\alpha}} + Q_k v_{0l}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(D^{\alpha j' kl}\sqrt{G})\,\overline{u_{00\alpha}}$$

$$+i\nu\frac{\partial}{\partial n}(c^{\alpha jkl}\sqrt{G})Q_k u_{0l}\overline{Q_j u_{00\alpha}} + i\nu\frac{\partial}{\partial n}(D^{\alpha jkl}\sqrt{G})Q_k v_{0l}\overline{Q_j u_{00\alpha}}$$

$$+c^{\alpha jk' l}\sqrt{G}\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j u_{00\alpha}} + D^{\alpha jk' l}\sqrt{G}\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j u_{00\alpha}} + c^{\alpha j' kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{j'}}\overline{u_{00\alpha}}$$

$$+D^{\alpha j' kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{j'}}\overline{u_{00\alpha}} + \frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}c^{\alpha j' k' l}u_{0l}\overline{u_{00\alpha}}$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}D^{\alpha j' k' l}v_{0l}\overline{u_{00\alpha}} + (-2\rho^{i\alpha}_{12}\sqrt{G}\theta_t\frac{\partial u_{0i}}{\partial t} - \rho^{i\alpha}_{12}\sqrt{G}\theta_{tt}u_{0i}$$

$$-2\rho^{i\alpha}_{2}\sqrt{G}\theta_t\frac{\partial v_{0i}}{\partial t} - \rho^{i\alpha}_{2}\sqrt{G}\theta_{tt}v_{0i})\overline{v_{00\alpha}} - -i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho^{i\alpha}_{12}\sqrt{G})u_{0i}\overline{v_{00\alpha}}$$

$$-i\nu\theta_t^2\frac{\partial}{\partial n}(\rho^{i\alpha}_{2}\sqrt{G})v_{0i}\overline{v_{00\alpha}} + (C^{ijkl}Q_k v_{0l} + D^{klij}Q_k u_{0l})\sqrt{G}\Gamma^{\alpha}_{ij}\overline{v_{00\alpha}}$$

$$-(C^{\alpha jkl}v_{0r} + D^{kl\alpha j}u_{0r})\sqrt{G}\Gamma^{r}_{kl}\overline{Q_j v_{00\alpha}} + Q_k v_{0l}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(C^{\alpha j' kl}\sqrt{G})\overline{v_{00\alpha}}$$

$$+Q_k u_{0l}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}(D^{kl\alpha j'}\sqrt{G})\overline{v_{00\alpha}} + i\nu\frac{\partial}{\partial n}(C^{\alpha jkl}\sqrt{G})Q_k v_{0l}\overline{Q_j v_{00\alpha}}$$

$$+i\nu\frac{\partial}{\partial n}(D^{kl\alpha j}\sqrt{G})Q_k u_{0l}\overline{Q_j v_{00\alpha}} + C^{\alpha jk' l}\sqrt{G}\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j v_{00\alpha}}$$

$$+D^{k' l\alpha j}\sqrt{G}\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j v_{00\alpha}} + C^{\alpha j' kl}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial v_{0l}}{\partial q^{j'}}\overline{v_{00\alpha}}$$

$$+D^{kl\alpha j'}\sqrt{G}Q_k\frac{\partial u_{0l}}{\partial q^{j'}}\overline{v_{00\alpha}} + \frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}C^{\alpha j' k' l}v_{0l}\overline{v_{00\alpha}}$$

$$+\frac{\partial^2\theta}{\partial q^{j'}\partial q^{k'}}\sqrt{G}D^{k' l\alpha j'}u_{0l}\overline{v_{00\alpha}}\Bigg]d\nu = 0, \tag{56}$$

$$j', k' = 1, 2, \quad \alpha, i, j, k, l, r = 1, 2, 3.$$

После подстановки $u_{0i} = \chi_0(q^1, q^2, t)u_{00i}$, $v_{0i} = \chi_0(q^1, q^2, t)v_{00i}$ в (56) получим линейное уравнение в частных производных для $\chi_0$. Несложные вычисления приводят к соотношению

$$
\begin{aligned}
&- 2\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} u_{00i}\overline{u_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu - 2\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} v_{00i}\overline{u_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu\\
&- 2\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} u_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu - 2\rho_2^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} v_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu\\
&+ 2c^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} u_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}d\nu\\
&+ 2D^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} u_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}d\nu\\
&+ 2C^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} v_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}d\nu\\
&+ 2D^{kl\alpha j'}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} v_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}d\nu + \Xi\chi_0 = 0.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Здесь $\Xi$ – постоянная, не зависящая от $\chi_0$. Выражения

$$
\begin{aligned}
&- 2\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} u_{00i}\overline{u_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu - 2\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} v_{00i}\overline{u_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu\\
&- 2\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} u_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu - 2\rho_2^{i\alpha}\sqrt{G}\theta_t \int\limits_0^{+\infty} v_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}d\nu,
\end{aligned}
\tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
&2c^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} u_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\,\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}\,d\nu\\
&+2D^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} u_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\,\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}\,d\nu\\
&+2C^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} v_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\,\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}\,d\nu\\
&+2D^{kl\alpha j'}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty} v_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\,\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}\,d\nu
\end{aligned}
\tag{59}
$$

после домножения на $(-\frac{p}{4})\frac{\theta_t}{\sqrt{G}}\,|\chi_0|^2$ записываются в виде

$$
\int\limits_0^{+\infty}\langle\mathcal{E}\rangle\,d\nu,\qquad \int\limits_0^{+\infty}\langle S^j\rangle\,d\nu. \tag{60}
$$

Первое гидроэнергетическое равенство (47) дает возможность представить уравнение (57) как

$$
\int\limits_0^{+\infty}\langle\mathcal{E}_{00}\rangle\left[\frac{\partial\chi_0}{\partial t}+V^{j'}\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}\right]d\nu+\left(-\frac{p}{4}\right)\frac{\theta_t}{\sqrt{G}}\Xi\chi_0=0, \tag{61}
$$

где $\langle\mathcal{E}_{00}\rangle$ – усреднение плотности энергии при условии замены $(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0)$ на $(\mathbf{u}_{00},\mathbf{v}_{00})$. Выражение

$$
\left[\frac{\partial\chi_0}{\partial t}+V^{j'}\frac{\partial\chi_0}{\partial q^{j'}}\right] \tag{62}
$$

является производной $\frac{\partial\chi_0}{\partial s}$ вдоль пространственно–временного луча, если параметр на луче – время. После деления уравнения (61) на $\int\limits_0^{+\infty}\langle\mathcal{E}_{00}\rangle\,d\nu$ и, вводя обозначение $K:=\left(-\frac{p}{4}\right)\frac{\theta_t}{\sqrt{G}}\Xi$, получим уравнение переноса для волны Рэлея в виде

$$
\frac{\partial\chi_0}{\partial s}+K\chi_0=0. \tag{63}
$$

Уравнение (63) – линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для $\chi_0$ вдоль пространственно–временного луча.

Подставим выражение $|\chi_0|\,e^{i\mu}$ в (56) или (63) вместо $\chi_0$ (здесь $\mu$ – вещественнозначная функция, являющаяся аргументом $\chi_0$) и сократим множитель $e^{i\mu}$. Если домножить это соотношение на $|\chi_0|$ и приравнять вещественную часть левой части полученного равенства к нулю, то после громоздких вычислений получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{+\infty} 2\theta_t(\rho_1^{i\alpha}u_{00i}\overline{u_{00\alpha}}+\rho_{12}^{i\alpha}v_{00i}\overline{u_{00\alpha}}+\rho_{12}^{i\alpha}u_{00i}\overline{v_{00\alpha}}+\rho_2^{i\alpha}v_{00i}\overline{v_{00\alpha}})d\nu$$

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}\int\limits_0^{+\infty}\Big[c^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}(Q_k u_{00l}\overline{u_{00\alpha}})+D^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}(Q_k v_{00l}\overline{u_{00\alpha}})$$

$$+C^{\alpha j' kl}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}(Q_k v_{00l}\overline{v_{00\alpha}})+D^{kl\alpha j'}\sqrt{G}\,\mathrm{Re}(Q_k u_{00l}\overline{v_{00\alpha}})\Big]\,d\nu=0. \quad (64)$$

Приравнивая мнимую часть левой части (56) или (63) к нулю, получим

$$\frac{\partial\mu}{\partial s}\int\limits_0^{+\infty}\big[(2\rho_1^{i\alpha}\theta_t)u_{00i}\overline{u_{00\alpha}}+(2\rho_{12}^{i\alpha}\theta_t)v_{00i}\overline{u_{00\alpha}}$$

$$+(2\rho_{12}^{i\alpha}\theta_t)u_{00i}\overline{v_{00\alpha}}+(2\rho_2^{i\alpha}\theta_t)v_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\big]d\nu$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\left[(2\rho_1^{i\alpha}\theta_t)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial u_{00i}}{\partial t}\overline{u_{00\alpha}}\right)+(2\rho_{12}^{i\alpha}\theta_t)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial v_{00i}}{\partial t}\overline{u_{00\alpha}}\right)\right.$$

$$\left.+(2\rho_{12}^{i\alpha}\theta_t)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial u_{00i}}{\partial t}\overline{v_{00\alpha}}\right)+(2\rho_2^{i\alpha}\theta_t)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial v_{00i}}{\partial t}\overline{v_{00\alpha}}\right)\right]d\nu$$

$$-\int\limits_0^{+\infty}\left[c^{\alpha jk' l}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j u_{00\alpha}}\right)+D^{\alpha jk' l}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j u_{00\alpha}}\right)\right.$$

$$\left.+\,C^{\alpha jk' l}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j v_{00\alpha}}\right)+D^{k' l\alpha j}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j v_{00\alpha}}\right)\right]d\nu$$

$$
-\int_0^{+\infty}\left[c^{\alpha j' kl}\,\mathrm{Im}\left(Q_k\frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{u_{00\alpha}}\right)+D^{\alpha j' kl}\,\mathrm{Im}\left(Q_k\frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{u_{00\alpha}}\right)\right.
$$

$$
\left.+\,C^{\alpha j' kl}\,\mathrm{Im}\left(Q_k\frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{v_{00\alpha}}\right)+D^{kl\alpha j'}\,\mathrm{Im}\left(Q_k\frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{v_{00\alpha}}\right)\right]d\nu
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{G}}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\rho_1^{i\alpha}\sqrt{G}\right)\theta_t^2\nu u_{00i}\overline{u_{00\alpha}}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\right)\theta_t^2\nu v_{00i}\overline{u_{00\alpha}}\right.
$$

$$
\left.+\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\rho_{12}^{i\alpha}\sqrt{G}\right)\theta_t^2\nu u_{00i}\overline{v_{00\alpha}}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\rho_2^{i\alpha}\sqrt{G}\right)\theta_t^2\nu v_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\right]d\nu
$$

$$
+\int_0^{+\infty}\left[2c^{ijkl}\Gamma_{ij}^{\alpha}\,\mathrm{Im}\left(u_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\right)+2D^{ijkl}\Gamma_{ij}^{\alpha}\,\mathrm{Im}\left(v_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\right)\right.
$$

$$
\left.+2C^{ijkl}\Gamma_{ij}^{\alpha}\,\mathrm{Im}\left(v_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\right)+2D^{klij}\Gamma_{ij}^{\alpha}\,\mathrm{Im}\left(u_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\right)\right]d\nu
$$

$$
-\frac{1}{\sqrt{G}}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n}(c^{ijkl}\sqrt{G})\nu Q_i u_{00j}\overline{Q_k u_{00l}}+\frac{\partial}{\partial n}(D^{ijkl}\sqrt{G})\nu Q_i v_{00j}\overline{Q_k u_{00l}}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial}{\partial n}(C^{ijkl}\sqrt{G})\nu Q_i v_{00j}\overline{Q_k v_{00l}}+\frac{\partial}{\partial n}(D^{klij}\sqrt{G})\nu Q_i u_{00j}\overline{Q_k v_{00l}}\right]d\nu=0. \qquad (65)
$$

## 7. Второе гидроэнергетическое равенство

Обратимся к уравнению (57). После домножения (57) на $p/2$ с учетом формул (43)–(47) приходим к соотношению

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta_t}\int_0^{+\infty}\langle\mathcal{E}\rangle\,d\nu\right)+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial q^{j'}}\left(V^{j'}\sqrt{G}\frac{1}{\theta_t}\int_0^{+\infty}\langle\mathcal{E}\rangle\,d\nu\right)=0. \qquad (66)
$$

Здесь $V^{j'}$ – компоненты групповой скорости в системе координат $q^1, q^2$. Из канонической системы (25) следует, что $\frac{1}{\theta_t}=\mathrm{const}$ вдоль пространственно-временного луча $t=s$, $q^{j'}=q^{j'}(s)$, $j'=1,2$, поэтому

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\theta_t}+\left(\mathbf{V},\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\theta_t}\right)\right)\equiv\frac{d}{ds}\frac{1}{\theta_t}=0, \qquad (67)
$$

а значит $\frac{1}{\theta_t}$ можно “вычеркнуть” из формулы (66) и она принимает вид гидродинамического уравнения неразрывности для энергетической “жидкости” с плотностью $\int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E} \rangle \, d\nu$, текущей с групповой скоростью $\boldsymbol{V}$ волны Рэлея вдоль поверхности $\Sigma$ пористой среды Био:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E} \rangle \, d\nu\right) + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^{j'}}\left(V^{j'} \sqrt{G} \int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E} \rangle \, d\nu\right) = 0. \qquad (68)$$

Равенство будем называть *вторым гидроэнергетическим равенством.* Чтобы получить явную формулу для $|\chi_0|$, которая является следствием уравнения (68), представим равенство (68) в лагранжевых координатах $a^1$, $a^2$, $s$ (см. [4, гл. 1]). В нашем случае это уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial s}\left(J \int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E} \rangle \, d\nu\right) = 0, \quad J = \frac{D(q^1, q^2, t)}{D(a^1, a^2, s)} = \frac{D(q^1, q^2)}{D(a^1, a^2)}. \qquad (69)$$

Следующее равенство есть следствие уравнения (69)

$$\left(J \int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E} \rangle \, d\nu\right)_M = \left(J \int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E} \rangle \, d\nu\right)_{M_0}, \qquad (70)$$

где $M_0 = (a^1, a^2, 0)$ – начальная точка ($t = 0$) пространственно-временного луча и $M = (a^1, a^2, s)$ – точка на том же луче, соответствующая $t = s$. Пусть $\chi_0$ – комплексная интенсивность волны Рэлея, тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \rangle \, d\nu = |\chi_0|^2 \int\limits_0^{+\infty} \langle \mathcal{E}(\mathbf{u}_{00}, \mathbf{v}_{00}) \rangle \, d\nu. \qquad (71)$$

Из формул (69)–(70) получаем

$$|\chi_0(M)| = \frac{\varphi_0(a^1, a^2)}{\sqrt{J e_0}}, \qquad (72)$$

$$\begin{aligned} e_0 = \int\limits_0^{+\infty} (\rho_1^{i\alpha} u_{00i}(M) \overline{u_{00\alpha}(M)} + \rho_{12}^{i\alpha} (u_{00i}(M) \overline{v_{00\alpha}(M)} \\ + v_{00i}(M) \overline{u_{00\alpha}(M)}) + \rho_2^{i\alpha} v_{00i}(M) \overline{v_{00\alpha}(M)}) d\nu. \end{aligned} \qquad (73)$$

Функция $\varphi_0(a^1, a^2)$ зависит только от пространственно–временного луча.

Соотношения (72)–(73) представляют собой искомое “явное” выражение для $|\chi_0|$.

## 8. О фазе Берри

Формулу для фазового множителя $e^{i\mu} = \frac{\chi_0}{|\chi_0|}$ получим из равенства (65):

$$e^{iV} = e^{iV}|_{s=0} \exp\left(\int\limits_0^s \left(-\gamma \int\limits_0^{+\infty} \left[2\rho_1^{i\alpha} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial u_{00i}}{\partial t}\overline{u_{00\alpha}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\rho_{12}^{i\alpha} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial v_{00i}}{\partial t}\overline{u_{00\alpha}} + \frac{\partial u_{00i}}{\partial t}\overline{v_{00\alpha}}\right) + 2\rho_2^{i\alpha} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial v_{00i}}{\partial t}\overline{v_{00\alpha}}\right)\right] d\nu\right) ds\right)$$

$$\times \exp\left(\int\limits_0^s \left(\gamma \int\limits_0^{+\infty} \left[c^{\alpha j k' l} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j u_{00\alpha}}\right) + D^{\alpha j k' l} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j u_{00\alpha}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(C^{\alpha j k' l} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j v_{00\alpha}}\right) + D^{k' l \alpha j} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{k'}}\overline{Q_j v_{00\alpha}}\right)\right] d\nu\right) ds\right)$$

$$\times \exp\left(\int\limits_0^s \left(\gamma \int\limits_0^{+\infty} \left[c^{\alpha j' kl} \operatorname{Im}\left(Q_k \frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{u_{00\alpha}}\right) + D^{\alpha j' kl} \operatorname{Im}\left(Q_k \frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{u_{00\alpha}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+C^{\alpha j' kl} \operatorname{Im}\left(Q_k \frac{\partial v_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{v_{00\alpha}}\right) + D^{kl\alpha j'} \operatorname{Im}\left(Q_k \frac{\partial u_{00l}}{\partial q^{j'}}\overline{v_{00\alpha}}\right)\right] d\nu\right) ds\right)$$

$$\times \exp\left(i\int\limits_0^s \beta_1 \frac{\partial}{\partial n} ln\sqrt{G} ds\right) \exp\left(i\int\limits_0^s \beta_\alpha^{ij}\Gamma_{ij}^\alpha ds\right) \exp\left(i\int\limits_0^s \beta_{i\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial n}\rho_1^{i\alpha} ds\right)$$

$$\times \exp\left(i\int\limits_0^s \beta_{i\alpha}^{12} \frac{\partial}{\partial n}\rho_{12}^{i\alpha} ds\right) \exp\left(i\int\limits_0^s \beta_{i\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial n}\rho_2^{i\alpha} ds\right)$$

$$\times \exp\left(i\int\limits_0^s \beta_{ijkl}^1 \frac{\partial}{\partial n} c^{ijkl} ds\right) \exp\left(i\int\limits_0^s \beta_{ijkl}^2 \frac{\partial}{\partial n} D^{ijkl} ds\right)$$

$$\times \exp\left(i\int\limits_0^s \beta^3_{ijkl}\frac{\partial}{\partial n}D^{klij}ds\right)\exp\left(i\int\limits_0^s \beta^4_{ijkl}\frac{\partial}{\partial n}C^{ijkl}ds\right), \qquad (74)$$

где

$$\beta_1=\gamma\Big(-\int\limits_0^{+\infty}\big[\rho_1^{i\alpha}\theta_t^2\nu u_{00i}\overline{u_{00\alpha}}+\rho_{12}^{i\alpha}\theta_t^2\nu\big(v_{00i}\overline{u_{00\alpha}}+u_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\big)$$

$$+\rho_2^{i\alpha}\theta_t^2\nu v_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\big]d\nu+c^{\alpha jkl}\int\limits_0^{+\infty}\nu Q_\alpha u_{00j}\overline{Q_k u_{00l}}d\nu$$

$$+D^{\alpha jkl}\int\limits_0^{+\infty}\nu Q_\alpha v_{00j}\overline{Q_k u_{00l}}d\nu+D^{kl\alpha j}\int\limits_0^{+\infty}\nu Q_\alpha u_{00j}\overline{Q_k v_{00l}}d\nu$$

$$+C^{\alpha jkl}\int\limits_0^{+\infty}\nu Q_\alpha v_{00j}\overline{Q_k v_{00l}}d\nu\Big), \qquad (75)$$

$$\beta^1_{i\alpha}=\gamma\int\limits_0^{+\infty}\theta_t^2\nu u_{00i}\overline{u_{00\alpha}}d\nu, \qquad (76)$$

$$\beta^{12}_{i\alpha}=\gamma\int\limits_0^{+\infty}\theta_t^2\nu\left(v_{00i}\overline{u_{00\alpha}}+u_{00i}\overline{v_{00\alpha}}\right)d\nu, \qquad (77)$$

$$\beta^2_{i\alpha}=\gamma\int\limits_0^{+\infty}\theta_t^2\nu v_{00i}\overline{v_{00\alpha}}d\nu, \qquad (78)$$

$$\beta^{ij}_\alpha=2\gamma\Big(c^{ijkl}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left(u_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\right)d\nu+D^{ijkl}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left(v_{00\alpha}\overline{Q_k u_{00l}}\right)d\nu$$

$$+D^{klij}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left(u_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\right)d\nu+C^{ijkl}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left(v_{00\alpha}\overline{Q_k v_{00l}}\right)d\nu\Big), \qquad (79)$$

$$\beta^1_{\alpha jkl} = \gamma \int\limits_0^{+\infty} \nu Q_\alpha u_{00j} \overline{Q_k u_{00l}} d\nu, \tag{80}$$

$$\beta^2_{\alpha jkl} = \gamma \int\limits_0^{+\infty} \nu Q_\alpha v_{00j} \overline{Q_k u_{00l}} d\nu, \tag{81}$$

$$\beta^3_{\alpha jkl} = \gamma \int\limits_0^{+\infty} \nu Q_\alpha u_{00j} \overline{Q_k v_{00l}} d\nu, \tag{82}$$

$$\beta^4_{\alpha jkl} = \gamma \int\limits_0^{+\infty} \nu Q_\alpha v_{00j} \overline{Q_k v_{00l}} d\nu, \tag{83}$$

где

$$\gamma = -\frac{1}{2\theta_t e_0}. \tag{84}$$

Множители в формуле (74), содержащие $\frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{G}$, $\dfrac{\partial}{\partial n}\rho_1^{i\alpha}$, $\dfrac{\partial}{\partial n}\rho_{12}^{i\alpha}$, $\dfrac{\partial}{\partial n}\rho_2^{i\alpha}$, $\Gamma^\alpha_{ij}$, показывают влияние кривизны поверхности $\Sigma$ на фазовый множитель $e^{i\mu}$, а семь последних множителей – влияние величин $\dfrac{\partial}{\partial n}\rho^1_{i\alpha}$, $\dfrac{\partial}{\partial n}c^{ijkl}, \ldots$. Напомним, что значения всех коэффициентов в формулах (74)–(84) берутся на поверхности $\Sigma$, т.е. при $n = 0$. Аргумент $\mu$ фазового множителя $e^{i\mu}$ – фаза Берри волны Рэлея.

Суммируя результаты работы, получаем искомое выражение для векторов смещений в упругой и жидкой фазах $\mathbf{u}$, $\mathbf{U}$ волны Рэлея в первом приближении:

$$\mathbf{u} = \chi_0 \mathbf{u}_{00}, \ \mathbf{U} = \chi_0 \mathbf{v}_{00}, \tag{85}$$

где $\chi_0 = |\chi_0|\, e^{i\mu}$; модуль $|\chi_0|$ и фазовый множитель $e^{i\mu}$ комплексной интенсивности $\chi_0$ находятся по формулам (72)–(73), (74)–(84) соответственно. Заметим, что формула (85) остается верной в произвольной системе координат. Пара векторов $(\mathbf{u}_{00}, \mathbf{v}_{00})$ определяется с точностью до скалярного множителя. Пара векторов $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$ не зависит от этого множителя, а значит, анализируя формулу для $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$ в подходящей системе координат, нетрудно получить $|\chi_0|$ и $e^{i\mu}$.

## Литература

1. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *A new approach to the problem of the Rayleigh wave propagation along the boundary of a nonhomogeneous elastic body.* — Wave Motion **40** (2004), 209–223.
2. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* Наука, СПб, 2001.
3. G. B. Whithem, *Linear and Nonlinear Waves.* Wiley, New York, 1975.
4. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Е. М. Розе, *Теоретическая гидромеханика. Часть 1* М., 1963.

Zavorokhin G. L. On the Rayleigh wave propagation along the boundary of an inhomogeneous anisotropic porous Biot medium.

The Rayleigh wave propagation along the traction-free boundary of an inhomogeneous anisotropic fluid-saturated porous solid (a Biot medium) is considered. Analytic expressions for the amplitude and the Berry phase of this oscillation are obtained. These analytic expressions are valid for the arbitrary shape of the porous solid.

С.-Петербургский государственный университет, Университетский пр., д. 28, Петродворец, 198504
Санкт-Петербург, Россия

*E-mail*: germanzavorokhin@rambler.ru

Поступило 12 октября 2010 г.