Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 378, 2010 г.

П. В. Ягодовский

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ КОММУТАТИВНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ГРУПП

Введение

Многозначные группы возникли в начале 1990-х годов в работах В. М. Бухштабера как прямое и правильное обобщение понятия обычной группы на случай, когда результатом произведения пары элементов является не один элемент, а целый набор. Из прочих подобных обобщений многозначные группы выделяются, во-первых, дополнительным условием *постоянства значности* – количество элементов, получающихся в результате произведения пары элементов, с учётом кратности одинаково для всех пар сомножителей – и, во-вторых, тем, что результатом произведения элементов является именно набор, а не формальная линейная комбинация элементов группы. Быстро выяснилась естественность понятия многозначной группы, и были установлены связи теории таких групп с рядом других разделов математики.

В первую очередь речь идёт, конечно, о теории обычных групп. Структуры многозначных групп возникают, например, 1) на множестве двойных смежных классов обычной группы по подгруппе (так называемые бикосетные группы); 2) на множестве орбит группы автоморфизмов обычной группы (так называемые косетные группы); 3) на множестве характеров обычной группы (группы характеров). Проблема распознавания групп, являющиеся косетными, бикосетными или группами характеров, является центральной для теории многозначных групп, см. [3–6, 7, 120, 19–21].

Затем выяснилась важная связь теории многозначных групп с алгебраической комбинаторикой. Как оказалось, каждая комбинаторная алгебра (т.е. C-алгебра с неотрицательными рациональными структурными константами) может быть путём перенормирования

Ключевые слова: многозначные группы, косетные и бикосетные группы, инволютивные многозначные группы, однопорожденные многозначные группы, ассоциативные схемы, C-алгебры, двойственные C-алгебры, двойственные многозначные группы.

элементов выделенного базиса превращена в групповую алгебру некоторой многозначной группы. Алгебры смежности ассоциативных схем являются комбинаторными; таким образом, каждой ассоциативной схеме можно сопоставить многозначную группу. Такие многозначные группы в настоящей работе названы AS-группами. Известная проблема характеризации C-алгебр, являющихся алгебрами смежности ассоциативных схем, "отзывается" в теории многозначных групп проблемой распознавания AS-групп, которая является обобщением проблемы распознавания косетных групп, см. [1, 4, 12]. Гомоморфизмы прямого типа, используемые при изучении косетных и бикосетных групп, являются, в определённой степени, аналогами конструкции расширений ассоциативных схем, см. [17, 24].

Ещё одна область математики, с которой теория многозначных групп находится в тесной связи, – это теория симметрических графов. Конструкция представления многозначной группы на симметрическом графе позволила, с одной стороны, дать описание общей структуры множества однопорождённых бикосетных многозначных групп с эрмитовым образующим, а с другой, подойти к решению задачи о возможности существования симметрического графа с данным локальным устройством, см. [22–24].

Одной из первых мотиваций изучения многозначных групп была связь с теорией интегрируемых многозначных динамических систем с дискретным временем. Первый пример такой динамической системы приведён в работе [8]. Позднее было дано чёткое определение интегрируемости динамической системы и доказана интегрируемость широкого класса систем с помощью бикосетных групп, см. [11, 25]. Новые результаты, касающиеся применения многозначных групп в теории интегрируемых динамических систем, см. в [13–16].

В работе [2] дан обзор алгебраических обобщений понятия обычной группы, имеющих в основном комбинаторное происхождение. Такие обобщения имеют вид алгебр с выделенными базисами, некоторые из них удовлетворяют условию постоянства значности или эквивалентным ему условиям. В работе предложено ещё одно обобщение (именуемое "основной структурой"), включающее в себя большинство прочих обобщений как частные случаи – в том числе и C-алгебры и групповые алгебры инволютивных многозначных групп, а также более общие объекты – табличные алгебры. В ней собран целый ряд результатов, которые в своё время были получены для отдельных обобщений, но которые на самом деле справедливы и в более общем случае.

“Основная структура”, с позиции автора работы [2], – это результат абстрактизации наборов симметрий для высокосимметричных комбинаторных конфигураций, подобно тому, как обычная группа – результат абстрактизации наборов симметрий для геометрических пространств.

Наша позиция несколько иная, для нас многозначная группа – это объект с особенностью, в то время как обычная группа – объект без особенности. Следует или разрешить особенность или найти препятствие к её разрешению. Примерами разрешения особенности для многозначной группы является распознавание её как косетной группы для некоторой обычной группы и её группы автоморфизмов, или как бикосетной группы, или как группы характеров, и т.д. – т.е. сведение этой многозначной группы тем или иным способом к группам обычным. Всякий раз при этом групповая алгебра многозначной группы оказывается вложенной в групповую алгебру подходящей обычной группы; более того, это вложение может быть продолжено и на двойственный объект.

Последнее обстоятельство тесно связывает нашу проблему “разрешения особенности многозначной группы” с известной проблемой дилатации коумножений в алгебраической комбинаторике, см. [12]. В самом деле, пару двойственных групп, конечно, можно рассматривать как объект с умножением и коумножением, а задачу о “разрешении особенности” – как задачу о вложении (дилатации) такого объекта в “хороший” объект, т.е. в обычную группу.

В обзоре [2] (см. теорему 3.28) приведён важный результат Ксу (Xu), Сандера (Sunder) и Вилдбергера (Wildberger), согласно которому стандартная табличная алгебра имеет неприводимое представление в линейном пространстве максимальной размерности тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре смежности некоторой ассоциативной схемы. Этот результат, конечно, содержит необходимое и достаточное условие на алгебры смежности, однако, с нашей точки зрения, проблема характеризации алгебр смежности ассоциативных схем ещё отнюдь не закрыта: определить для данной C-алгебры, есть ли у неё необходимое неприводимое представление, ничуть не проще, чем проверить наличие соответствующей ассоциативной схемы.

Также в этом обзоре рассмотрен частный случай проблемы характеризации косетных групп и показано, что данная алгебра $\mathcal{A}$ является групповой алгеброй косетной группы какой-либо абелевой группы по данной группе автоморфизмов H, если существует эпиморфизм из некоторого универсального объекта (построенного по H) на $\mathcal{A}$ (теорема 4.5). Ещё в этой работе содержится ряд классификационных результатов, касающихся табличных алгебр с одним образующим малой степени, и рассмотрена обобщенная двойственность Кавады.

Истоком для настоящей работы фактически явилась работа [9], в которой пара двойственных (в смысле нашего определения) многозначных групп была использована для изучения обобщённого KW-преобразования.

Конструкция двойственности для конечных коммутативных многозначных групп, которая описана в настоящей работе, позволяет продвинуться в изучении проблемы распознавания косетных групп. Оставляя подробное изложение этого вопроса до последующих публикаций, отметим, что группы, двойственные к “хорошим” группам, сами должны быть достаточно “хорошими”.

Первый параграф статьи содержит основные определения и важнейшие конструкции теории многозначных групп, а также необходимые определения из алгебраической комбинаторики.

Во втором параграфе излагается основная конструкция двойственности. Основой конструкции является невырожденная квадратная матрица P (собственная матрица), которой естественным образом сопоставлены две взаимно двойственные алгебры $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$, обладающие выделенными базисами. Связь теории многозначных групп с алгебраической комбинаторикой позволяет доказать, что для любой конечной коммутативной многозначной группы с инволюцией существует собственная матрица P, такая, что алгебра $\mathrm{A}(P)$ является её групповой алгеброй. Затем подробно рассматривается случай, когда алгебра $\mathrm{A}(P)$ является C-алгеброй, групповой алгеброй обычной группы, групповой алгеброй косет-группы и группы характеров. В конце параграфа устанавливается, что матрица P по сути является таблицей характеров алгебры $\mathrm{A}(P)$, а потому определена однозначно с точностью до перестановки столбцов. Для двойственной алгебры $\mathrm{A}^*(P)$ таблицей характеров является транспонированная матрица ${}^tP$.

В третьем параграфе показано, что условие постоянства значности для алгебры $\mathrm{A}(P)$ эквивалентно вхождению единицы алгебры $\mathrm{A}^*(P)$ в её выделенный базис. Это результат, на наш взгляд, даёт правильный и исчерпывающий ответ на вопрос о естественности условия постоянства значности в теории многозначных групп. Также в этом параграфе вводится категория псевдогрупповых алгебр – основная рабочая категория в дальнейшем изложении. Групповые алгебры коммутативных многозначных групп с инволюцией являются псевдогрупповыми алгебрами с положительными и рациональными структурными константами в выделенном базисе.

В четвёртом параграфе доказано, что если алгебра $\mathrm{A}(P)$ является псевдогрупповой, то и двойственная к ней алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ – тоже псевдогрупповая, а также получено полное описание собственных матриц P, у которых алгебры $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$ — псевдогрупповые.

В пятом параграфе введено понятие двойственных многозначных групп: две группы двойственны, если их групповые алгебры являются алгебрами $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$ для одной собственной матрицы P. К сожалению, не всякая многозначная группа имеет двойственную в смысле этого определения. Существуют примеры, в которых алгебра $\mathrm{A}(P)$ является групповой алгеброй многозначной группы, а у псевдогрупповой алгебры $\mathrm{A}^*(P)$ имеются иррациональные коэффициенты, т.е. никакой многозначной группе она не соответствует. Однако можно доказать, что некоторые "хорошие" многозначные группы обязательно имеют двойственные. Главным результатом этого параграфа является теорема, согласно которой двойственным многозначным группам соответствуют двойственные по Каваде–Дельсарту коммутативные C-алгебры.

В шестом параграфе предложен простой необходимый признак для однопорождённых групп характеров, опирающийся на теорию двойственности.

В седьмом параграфе подробно рассмотрен случай многозначных групп порядка три. Здесь рассмотрено многообразие структурных констант коммутативных ассоциативных трёхмерных алгебр с единицей, удовлетворяющих условию постоянства значности, и предложена его параметризация. Многозначным группам отвечает некоторое дискретное множество на этом многообразии. Отображение, сопоставляющее группе её двойственную, или, более общо, сопоставляющее алгебре $\mathrm{A}(P)$ алгебру $\mathrm{A}^*(P)$, порождает отображение из некоторого открытого подмножества в этом многообразии в себя. Основным результатом параграфа являются явные формулы для этого отображения в предложенной параметризации.

Часть результатов этой работы была анонсирована в заметке [26].

Автор выражает свою глубокую благодарность чл.-корр. РАН проф. В. М. Бухштаберу за многолетнее внимание и поддержку в работе, а также д. ф.-м. н. С. А. Евдокимову и И. Н. Пономаренко за

предоставленные библиографические материалы.

1. Основные определения

1.1 Многозначные группы и их важнейшие конструкции

Определение 1.1. *Множество M называется n-значной группой или, короче, n-группой (где $n \in \mathbb{N}$), если зафиксировано умножение*

$$\mu : M \times M \to (M)^n$$

со значением в n-ой симметрической степени $(M)^n$ множества M, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Ассоциативность: для любых элементов x, y, z группы M справедливо равенство

$$(\mu)^n(\mu(x,y),z) = (\mu)^n(x,\mu(y,z)).$$

Здесь через $(\mu)^n(\mu(x,y),z)$ обозначен элемент $(\mu(t_1,z),\dots,\mu(t_n,z)) \in ((M)^n)^n \subset (M)^{n^2}$, где $\mu(x,y) = (t_1,\dots,t_n)$. Аналогичное обозначение использовано в правой части равенства. Условие состоит в совпадении полученных элементов множества $(M)^{n^2}$.

2. Условие двусторонней единицы: существует элемент $e \in M$, называемый единицей, такой, что для всех $x \in M$ имеет место равенство $\mu(e,x) = \mu(x,e) = (x,\dots,x)$.

3. Условие двустороннего обратного: для любого $x \in M$ существует (хотя бы один) элемент $x^* \in M$, называемый обратным, такой, что множества $\mu(x,x^*)$ и $\mu(x^*,x)$ содержат в себе единицу e.

В частности, обычные группы согласно этому определению являются 1-группами; n-значные группы с $n > 1$ называются *многозначными группами.* Пусть $C^z_{x,y}$ равно числу вхождений элемента z в $\mu(x,y)$; константы такого вида называются *кратностями* группы M. Число n называется *значностью* группы.

Определение 1.2. *Алгебра $\mathbb{C}(M)$ над $\mathbb{C}$ с выделенным базисом, элементы которого отождествляются с элементами n-группы M, и со структурными константами $c^z_{x,y} = (1/n)C^z_{x,y}$ (где $C^z_{x,y}$ — кратности группы M) называется групповой алгеброй n-группы M. Групповые алгебры многозначных групп удовлетворяют условию постоянства значности:*

$$\sum_z c^z_{x,y} = 1 \quad \text{для всех } x \text{ и } y.$$

Структурные константы групповой алгебры $\mathbb{C}(M)$ n-значной группы, представленные в виде несократимых дробей, имеют своими знаменателями делители числа n.

Групповые алгебры n-значных групп также называются *n-групповыми алгебрами.*

Определение 1.3. (1) *n-Группа называется коммутативной, если для любых $x, y \in M$ имеет место равенство $\mu(x, y) = \mu(y, x)$.*

(2) *n-Группа называется инволютивной, если для каждого её элемента x существует только один обратный x^*, а антилинейное продолжение инволюции $x \mapsto x^*$ на групповую алгебру $\mathbb{C}(M)$ является антиавтоморфизмом, т.е. $(\lambda xy)^* = \overline{\lambda} y^* x^*$. В этой ситуации, конечно, всегда верно равенство $(x^*)^* = x$. Элемент x инволютивной группы называется эрмитовым, если $x^* = x$.*

(3) *Мощностью элемента x n-значной инволютивной группы M называется число $m(x) = n/C^e_{x,x^*}$.*

(4) *n-Значная группа M называется диагональю m-значной группы M', если существует такая биекция между множествами их элементов, что кратности группы M' равны соответствующим им при этой биекции кратностям группы M, умноженным на (m/n).*

(5) *Две многозначные группы называются изоморфными, если существует такая биекция между множествами их элементов, что кратности одной группы равны соответствующим им при этой биекции кратностям другой группы.*

Отметим, что если многозначная группа M является диагональю группы M', то групповые алгебры $\mathbb{C}(M)$ и $\mathbb{C}(M')$ изоморфны как алгебры с выделенными базисами.

Пусть дана (обычная) конечная группа G и её группа автоморфизмов $H \subset \mathrm{Aut}(G)$. Обозначим через $h[g]$ результат применения к $g \in G$ автоморфизма $h \in H$. Рассмотрим множество G/H орбит действия группы H на множестве элементов группы G. Оказывается, *в этой ситуации на G/H возникает структура многозначной группы, значность которой равна порядку группы H.* Действительно, если даны две орбиты

$$x_1 = \{h[g_1] \mid h \in H\} \quad \text{и} \quad x_2 = \{h'[g_2] \mid h' \in H\},$$

то, учитывая равенство

$$h[g_1] \cdot h'[g_2] = h[g_1 \cdot (h^{-1}h')[g_2]] = h[g_1 \cdot h''[g_2]],$$

произведение $\mu(x_1, x_2)$ естественно определить как

$$\begin{aligned}&(\{h[g_1 \cdot h''_1[g_2]] \mid h \in H\}, \{h[g_1 \cdot h''_2[g_2]] \mid h \in H\}, \dots,\\ &\{h[g_1 \cdot h''_{|H|}[g_2]] \mid h \in H\}).\end{aligned}$$

Здесь $h''_1, h''_2, \dots, h''_{|H|}$ – множество элементов группы H. Легко видеть, что это произведение удовлетворяет всем условием, налагаемым на умножение в многозначных группах.

Определение 1.4. *n-Группа M называется косетной, если существуют конечная (обычная) группа G и её группа автоморфизмов $H \subset \mathrm{Aut}(G)$, такие, что группа M или изоморфна группе G/H или является её диагональю. В такой ситуации будем говорить, что пара групп (G, H), $H \subset \mathrm{Aut}(G)$, задаёт на M косет-структуру.*

Заметим, что многозначная группа может обладать единственной косет-структурой, может иметь их несколько или не иметь их вовсе.

Предложение 1.5. *Косет-группа $G\backslash G$, где группа G действует на себе сопряжениями, коммутативна.*

Доказательство. Выберем произвольную пару элементов x, y косет-группы $G\backslash G$, и пусть

$$\{g[g_0]\}_{g \in G} = \{g\, g_0 g^{-1}\}_{g \in G} \quad \text{и} \quad \{g'[g_1]\}_{g' \in G} = \{g' g_1 {g'}^{-1}\}_{g' \in G}$$

– орбиты (классы сопряжённых элементов группы G), отвечающие этим элементам. Поскольку

$$\begin{aligned} g[g_0 \cdot g'[g_1]] &= g\, g_0 (g' g_1 {g'}^{-1}) g^{-1} \\ &= (g\, g_0 g') g_1 (({g'}^{-1} g_0^{-1}) g_0 (g_0 g'))({g'}^{-1}\, g_0^{-1} g^{-1}) \\ &= g'' g_1 (g''' g_0 {g'''}^{-1}) {g''}^{-1} = g''[g_1 \cdot g'''[g_0]], \end{aligned}$$

имеет место равенство $\mu(x, y) = \mu(y, x)$. □

Далее, пусть дана (обычная) конечная группа G с конечным числом элементов и её подгруппа $H \subset G$. Рассмотрим множество $H\backslash G/H$ двойных смежных классов группы G по подгруппе H. Оказывается, *в этой ситуации на $H\backslash G/H$ возникает структура многозначной группы, значность которой равна порядку группы H.* Действительно, если даны два смежных класса $x_1 = \{h_1 g h_2 | h_1, h_2 \in H\}$ и $x_2 = \{h_3 g' h_4 | h_3, h_4 \in H\}$, то, учитывая равенство

$$(h_1 g h_2) \cdot (h_3 g' h_4) = h_1 g (h_2 h_3) g' h_4 = h_1 g h' g' h_4,$$

произведение $\mu(x_1, x_2)$ естественно определить как

$$(\{h_1 g h_1' g' h_4 | h_1, h_4 \in H\}, \{h_1 g h_2' g' h_4 | h_1, h_4 \in H\}, \ldots,$$
$$\{h_1 g h_{|H|}' g' h_4 | h_1, h_4 \in H\}).$$

Здесь $h_1', h_2', \ldots, h_{|H|}'$ – множество элементов группы H. Легко видеть, что это произведение также удовлетворяет всем условием, налагаемым на умножение в многозначных группах.

Определение 1.6. *n-Группа M называется бикосетной, если существуют конечная (обычная) группа G и её подгруппа $H \subset G$, такие, что группа M или изоморфна группе $H \diagdown G \diagup H$ или является её диагональю. В такой ситуации будем говорить, что пара групп (G, H), $H \subset G$, задаёт на M бикосет-структуру.*

Предложение 1.7. *Для коммутативности бикосетной группы $H \diagdown G \diagup H$ достаточно, чтобы подгруппа H содержала коммутант группы G.*

Доказательство. Группа $H \diagdown G \diagup H$ будет коммутативной, если для любых $g_1, g_2 \in G$ и любого $h_0 \in H$ существуют такие $h_1, h_2, h_3 \in H$, что выполняется равенство

$$h_1 g_1 h_0 g_2 h_2 = g_2 h_3 g_1.$$

Покажем, что h_3 можно подобрать при любых значениях h_1 и h_2 из H. Действительно, искомое равенство можно переписать в виде

$$\left(h_2^{-1} g_2^{-1} h_0^{-1}\right)(h_0 h_1 g_1)(h_0 g_2 h_2)\left(g_1^{-1} h_1^{-1} h_0^{-1}\right) = h_2^{-1} h_3 h_1^{-1} h_0.$$

Левая часть представляет собой коммутатор элементов $h_0 g_2 h_2$ и $g_1^{-1} h_1^{-1} h_0^{-1}$, по условию принадлежащий группе H. Следовательно, и правая часть $h_2^{-1} h_3 h_1^{-1} h_0 = h$ принадлежит H. Но тогда $h_3 = h_2 h\, h_0^{-1} h_1 \in H$. $\square$

Предложение 1.8. *Косетность влечёт за собой бикосетность.*

Действительно, пусть $M \approx G \diagup H$ – косетная группа. Обозначим через G' полупрямое произведение групп G и H, построенное по действию H на G. Тогда, как легко проверить, $M \approx H \diagdown G' \diagup H$.

Пусть дана (обычная) конечная группа G и разбиение $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ множества её элементов на непересекающиеся подмножества: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i$, причём $T_1 = \{e\}$. Рассмотрим групповую алгебру $\mathbb{C}(G)$ группы G и для каждого i определим элемент $t_i \in \mathbb{C}(G)$ равенством

$$t_i = \frac{1}{|T_i|} \sum_{g \in T_i} g.$$

Пусть для любых $i, j = 1, 2, \ldots, m$ произведение $t_i \cdot t_j$ представимо в виде линейной комбинации элементов $t_1, t_2, \ldots, t_m$:

$$t_i \cdot t_j = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k t_k.$$

Очевидно, что константы c_{ij}^k – неотрицательные рациональные числа и $\sum k = 1^m c_{ij}^k = 1$. В таком случае элементы $t_1, t_2, \ldots, t_m$ порождают в $\mathbb{C}(G)$ подалгебру, которая, очевидно, *является групповой алгеброй многозначной группы*. Эту группу будем обозначать через T_G. Её множеством элементов является $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$, а её значность равна НОК$\{|T_1|, |T_2|, \ldots, |T_n|\}$.

Определение 1.9. *Инволютивная n-группа M называется слабокосетной, если существуют конечная (обычная) группа G и разбиение её множества элементов T, которые порождают группу T_G, причём группа T_G или изоморфна группе M или является её диагональю. В этом случае будем говорить, что пара (G, T) определяет на M слабокосетную структуру.*

Отметим, что каждая косетная группа является вместе с тем и слабокосетной группой, у которой множества T_i представляют собой орбиты действия группы автоморфизмов $H \subset \mathrm{Aut}(G)$.

Далее, пусть дана (обычная) группа G, и пусть G^* – множество характеров её неприводимых представлений. Пусть $d = |G^*|$. Для $i, j, k = 1, 2, \ldots, d$ определим число t_{ij}^k как коэффициент, с которым k-е неприводимое представление входит в разложение тензорного произведения i-го и j-го неприводимых представлений в сумму неприводимых представлений. Очевидно, что $t_{ij}^k \in \mathbb{Z}$, $t_{ij}^k \geqslant 0$. Обозначим через n_i размерность i-го неприводимого представления. Рассмотрим множество чисел $\frac{n_k}{n_i n_j} t_{ij}^k$, и пусть n – наименьшее общее кратное знаменателей этих чисел, представленных в виде несократимых дробей. Для произвольных элементов $c_i, c_j \in G^*$ определим произведение $\mu(c_i, c_j)$ так: пусть кратность элемента c_k в этом произведении равна $\frac{nn_k}{n_i n_j} t_{ij}^k$. Можно проверить, что это произведение удовлетворяет условиям на умножение в n-группе.

Определение 1.10. *n-Группа M называется группой характеров, если существует конечная (обычная) группа G, такая, что группа M или изоморфна группе G^* или является её диагональю.*

Отметим, что если G – абелева группа, то группа её характеров G^* является 1-группой, изоморфной группе G.

Лемма 1.11 (о мощности)**.** 1. *Мощность элемента a бикосетной группы $M \approx H \diagdown G \diagup H$ равна количеству элементов в множестве $\pi^{-1}(a)$, где $\pi : H \diagdown G \to M$ – естественная проекция из множества левых смежных классов группы G по подгруппе H в множество двойных смежных классов.*

2. *Мощность элемента a слабокосетной группы $M \approx T_G$ равна количеству элементов в множестве $\pi^{-1}(a)$, где $\pi : G \to T$ – естественная проекция.*

3. *Мощность элемента c группы характеров группы $M \approx G^*$ равна квадрату размерности неприводимого представления группы G, отвечающего характеру c.*

Доказательство. 1. Рассмотрим групповую алгебру $\mathbb{C}(M)$ группы M как подалгебру групповой алгебры $\mathbb{C}(G)$ группы G. Элемент a выделенного базиса, соответствующий двойному смежному классу HgH, представим в виде $(1/|H|) \sum\limits_{h,h' \in H} hgh'$. Распишем произведение $a \cdot a^*$ как

$$\left(\frac{1}{|H|} \sum_{h,h' \in H} hgh' \right) \cdot \left(\frac{1}{|H|} \sum_{h'',h''' \in H} h'' g^{-1} h''' \right).$$

После раскрытия скобок мы получим сумму, в которую все элементы подгруппы H входят с кратностью $K_g = \{h \in H \mid \exists h' \colon gh = h'g\}$. Таким образом, $m(a) = |H|/|K_g|$. С другой стороны, очевидно, что $|H|/|K_g|$ есть число различных смежных классов $Hgh \in H \diagdown G$, которые при проекции π^* переходят в HgH.

2. Рассмотрим множества T_i и $T_{i'}$, соответствующие элементам a и a^*. Так как группа M инволютивна по определению слабокосетной группы, для каждого $g \in T_i$ элемент g^{-1} будет принадлежать $T_{i'}$

и наоборот. В частности, это означает, что $|T_i| = |T_{i'}|$. Тогда произведение элементов t_i и $t_{i'}$ групповой алгебры $\mathbb{C}(M)$, отвечающих элементам a и a^*, имеет вид

$$\begin{aligned}
t_i \cdot t_{i'} &= \left(\frac{1}{|T_i|}\sum_{g\in T_i} g\right)\cdot\left(\frac{1}{|T_{i'}|}\sum_{g'\in T_{i'}} g'\right)\\
&= \left(\frac{1}{|T_i|}\sum_{g\in T_i} g\right)\cdot\left(\frac{1}{|T_{i'}|}\sum_{g\in T_i} g^{-1}\right)\\
&= \frac{1}{|T_i|}\frac{1}{|T_{i'}|}|T_i|e + \cdots (\text{слагаемые без } e)\\
&= \frac{1}{|T_i|}e + \cdots (\text{слагаемые без } e).
\end{aligned}$$

Следовательно, кратность единицы в произведении $a \cdot a^*$ равна $n/|T_i|$ (здесь n — значность группы M), откуда получаем, что $m(a) = |T_i|$.

3. Пусть c и c' – характеры двух неприводимых представлений ρ и ρ' группы G, а c_1 – характер тривиального представления (т.е. единица группы G^*). Характер тензорного произведения представлений $\rho\otimes\rho'$, как известно, задается формулой $c_\otimes(g) = c(g)\cdot c'(g)$ для любого $g \in G$. Рассмотрим обычное полулинейное произведение в линейном пространстве функций на группе G:

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{f(g)}\cdot h(g).$$

Тогда для произведения характеров имеем

$$\langle c, c'\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \ c = c',\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Коэффициент, с которым тривиальное представление входит в разложение представления $\rho\otimes\rho'$ в сумму неприводимых, равен $\langle c_1, c_\otimes\rangle$. Вычислим это произведение:

$$\begin{aligned}
\langle c_1, c_\otimes\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{c_1(g)}\cdot c_\otimes(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} c_\otimes(g)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} c(g)\cdot c'(g) = \langle \overline{c}, c'\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, два элемента c и c' группы G^* (т.е. два характера группы G) будут обратными тогда и только тогда, когда $c' = \overline{c}$. Итак, в группе G^* каждый элемент имеет единственный обратный. Очевидно, что в этом случае инволюция будет являться антилинейным автоморфизмом, и, следовательно, группа G^* является инволютивной. Это означает, что её элементы имеют корректно определённые мощности.

Вычислим мощность произвольного элемента c_i с обратным $c_{i'}$. Из приведённой выше выкладки видно, что $t^1_{ii'} = 1$. Так как $n_i = n_{i'}$ и $n_1 = 1$, имеем $C^1_{ii'} = n/n_i^2$. Отсюда вытекает, что $m(c_i) = n_i^2$. □

Предложение 1.12. *Мощность элемента a косетной группы G/H равна длине соответствующей ему орбиты действия на G группы H.*

Утверждение предложения вытекает из пункта (1) леммы 1.11, предложения 1.8 и того очевидного факта, что существует взаимно однозначное соответствие между смежными классами группы G' по подгруппе H и элементами группы G. Здесь G' – группа, построенная в доказательстве предложения 1.8.

Следствие 1.13. *Мощности элементов косетных, слабокосетных, бикосетных групп являются натуральными числами. Мощности элементов групп характеров являются квадратами целых чисел.*

1.2. Элементы алгебраической комбинаторики

Ниже все определения даны только для конечномерного случая.

Определение 1.14. *Пусть $\mathcal{V}$ – конечное множество и r_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, – подмножества в $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, обладающие следующими свойствами:*

(1) $r_1 = \{(x, x) | x \in \mathcal{V}\}$;

(2) $\mathcal{V} \times \mathcal{V} = r_1 \cup r_2 \cup \cdots \cup r_d$, $r_i \cap r_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$;

(3) ${}^t r_i = r_{i'}$ *для некоторого* $i' \in \{1, 2, \ldots, d\}$,
где ${}^t r_i = \{(x, y) | (y, x) \in r_i\}$;

(4) *для любых* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, d\}$ *число элементов* $z \in Z$, *таких, что* $(x, z) \in r_i$, $(z, y) \in r_j$ *и* $(x, y) \in r_k$, *является константой, которая обозначается* t^k_{ij}.

Такая конфигурация $(\mathcal{V}, \mathcal{R})$, где $\mathcal{R} = \{r_i\}_{i \in \{1,2,\ldots,d\}}$, называется схемой отношений или ассоциативной схемой с базисными отношениями $\mathcal{R}$.

Существует более общее определение ассоциативной схемы, см., например, работу [17]. В терминологии этой работы ассоциативные схемы, удовлетворяющие условиям определения 1.14, называются *однородными*.

Определение 1.15. *Для данной ассоциативной схемы $(\mathcal{V}, \mathcal{R})$ матрица A_i порядка $|\mathcal{V}|$, строки и столбцы которой занумерованы элементами из $\mathcal{V}$, называется i-й матрицей смежности, если её матричный элемент $(A_i)_{xy}$ равен 1, если $(x, y) \in r_i$, и 0 в противном случае.*

Условия на отношения r_i в определении ассоциативной схемы эквивалентны следующим условиям на матрицы смежности:

(1) A_1 — единичная матрица;

(2) сумма $\sum\limits_{i=1}^{d} A_i$ равна матрице, каждый элемент которой равен 1;

(3) ${}^tA_i = A_{i'}$ для некоторого $i' \in \{1, 2, \ldots, d\}$, где ${}^tA_i$ – матрица, транспонированная к A_i;

(4) $A_i A_j = \sum\limits_{k=1}^{d} t_{ij}^k A_k$ для всех i, j.

Таким образом, матрицы смежности порождают подалгебру в $M_{|\mathcal{V}|}(\mathbb{C})$ – алгебре всех матриц порядка $|\mathcal{V}|$ над $\mathbb{C}$. Она называется *алгеброй смежности* или *алгеброй Боуза–Меснера* данной ассоциативной схемы.

Определение 1.16. *Алгебра $\mathcal{C}$ над $\mathbb{C}$ с выделенным базисом c_1, c_2, $\ldots$, c_d, где c_1 – единичный элемент, называется C-алгеброй, если выполнены следующие условия:*

(1) *$p_{ij}^k \in \mathbb{R}$ для всех i, j и k, где p_{ij}^k – структурные константы, т.е. $c_i \times c_j = \sum\limits_{k=0}^{d} t_{ij}^k c_k$;*

(2) *существует такая подстановка $i \to i'$ $(i = 0, 1, \ldots, d)$ второго порядка, что линейное отображение, переводящее c_i в $c_{i'}$, является антилинейным автоморфизмом алгебры;*

(3) *$t_{ij}^1 = \delta_{ij'} \kappa_i$, где $\kappa_i > 0$ для всех i, j;*

(4) *отображение $c_i \to \kappa_i$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ является линейным представлением алгебры $\mathcal{C}$.*

Определение 1.17. *C-алгебра называется комбинаторной, если структурные константы t_{ij}^k относительно выделенного базиса являются неотрицательными рациональными числами.*

Отметим, что каждая алгебра смежности ассоциативной схемы является комбинаторной алгеброй с целыми структурными константами.

Понятие комбинаторной алгебры введено в работе [4], в которой была доказана эквивалентность между категориями групповых алгебр конечных инволютивных многозначных групп и конечномерных комбинаторных алгебр. Оказывается, если у групповой алгебры $\mathbb{C}(M)$ некоторой инволютивной многозначной группы M перенормировать элементы выделенного базиса $x_1, x_2, \ldots, x_d$ по формулам

$$c_i = m(x_i)x_i \tag{1}$$

(здесь $m(x_i)$ – мощность элемента многозначной группы, соответствующего элементу x_i), то эта алгебра с выделенным базисом $c_1, c_2, \ldots, c_d$ будет комбинаторной алгеброй, которую мы будем обозначать $\mathcal{C}(M)$. Обратно, если у комбинаторной алгебры перенормировать элементы выделенного базиса $c_1, c_2, \ldots, c_d$ по формулам

$$x_i = \frac{1}{\kappa_i} c_i, \tag{2}$$

то эта алгебра с выделенным базисом $x_1, x_2, \ldots, x_d$ будет представлять собой групповую алгебру инволютивной многозначной группы, причём $m(x_i) = \kappa_i$.

Тот факт, что алгебры смежности ассоциативных схем представляют собой комбинаторные алгебры с целыми неотрицательными структурными константами, позволяет дать следующее определение.

1.18 Определение. *Инволютивная многозначная группа называется AS-группой, если комбинаторная алгебра, полученная из её групповой алгебры перенормировкой базиса по формулам* (1), *является алгеброй смежности некоторой ассоциативной схемы.*

Предложение 1.19. *Каждая слабокосетная группа является AS-группой.*

Доказательство. Пусть $M \approx T_G$ – слабокосетная группа. Рассмотрим левое регулярное представление группы G. Обозначим через A_g

матрицу, задающую действие элемента $g \in G$ в этом представлении. Пусть

$$A_i = \sum_{g \in T_i} A_g.$$

Как несложно проверить, набор матриц A_i, $i = 1, 2, \ldots, |M|$, удовлетворяет всем условиям на матрицы смежности ассоциативной схемы, и, таким образом, группа M является AS-группой. □

Предложение 1.20. *Мощности элементов AS-группы являются натуральными числами.*

Действительно, нетрудно заметить, что мощность $m(x_i)$ элемента AS-группы равна в соответствующей C-алгебре коэффициенту κ_i. Последний же равен числу единиц в произвольной строке матрицы смежности A_i.

Ниже будут рассматриваться исключительно *коммутативные* ассоциативные схемы, алгебры смежности которых коммутативны.

2. Алгебры A(P) и A*(P)

Пусть $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ – некоторая матрица, в которой элемент, стоящий в i-й строке на j-м месте, будет обозначаться через $p_i(j)$. (Обозначения в настоящей работе в основном согласованы с обозначениями в книге [1].) Основная конструкция будет заключаться в сопоставлении матрице P пары двойственных коммутативных алгебр $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$, для которых матрицы P и ${}^tP$ соответственно будут таблицами характеров.

Для построения этих алгебр обозначим через x_i, $i = 1, \ldots, n$, вектор-строку, составляющую i-ю строку матрицы P, а через f_j, $j = 1, \ldots, n$, вектор-столбец, составляющий j-й столбец этой матрицы.

В качестве линейного пространства алгебры $\mathrm{A}(P)$ возьмём пространство формальных линейных комбинаций символов $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Произведение в алгебре $\mathrm{A}(P)$ достаточно определить на базисных элементах. Для пары таких элементов x_s и x_t рассмотрим адамарово (покомпонентное) произведение соответствующих им векторов-строк; его результат представляет собой вектор-строку, которую в силу невырожденности матрицы P можно разложить по базису, состоящему из строк матрицы P. Пусть p^r_{st} – коэффициент при r-й строке матрицы P в этом разложении. Тогда положим произведение элементов x_s и x_t равным $\sum\limits_{r=1}^{n} p_{st}^r x_r$.

Алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ определяется аналогично. Её линейное пространство представляет собой пространство формальных линейных произведений символов $f_1, \ldots, f_n$, а произведение определяется через адамарово произведение столбцов матрицы P.

Нетрудно видеть, что определённые таким образом умножения в $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$ превращают их в ассоциативные коммутативные алгебры с единицами, причём

$$\mathrm{A}({}^tP) \cong \mathrm{A}^*(P). \tag{3}$$

Последнее обстоятельство позволяет назвать алгебру $\mathrm{A}^*(P)$ *двойственной* по отношению к алгебре $\mathrm{A}(P)$.

Наборы элементов $x_1, \ldots, x_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ соответственно являются базисами алгебр $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$. Эти базисы мы будем называть *выделенными.* Матрицу P будем называть *собственной матрицей алгебры* $\mathrm{A}(P)$. В работе [12] прямой аналог матрицы P назван матрицей *квазихарактеров*.

Пример 2.21. Пусть A – коммутативная C-алгебра с выделенным базисом $x_1, \ldots, x_n$. Как показано в книге [1], эта алгебра имеет ровно n неприводимых представлений и все они одномерны: $\Delta_j : x_i \to p_i(j)$, $j = 1, \ldots, n$; регулярное представление алгебры A представляет собой прямую сумму этих представлений. Следовательно, существует базис линейного пространства A, в котором для каждого $i = 1, \ldots, n$ матрица M_i, задающая действие элемента x_i выделенного базиса алгебры A в регулярном представлении этой алгебры, является диагональной:

$$M_i = \mathrm{diag}(p_i(1), p_i(2), \ldots, p_i(n)).$$

Это означает, что $A \cong \mathrm{A}(P)$, где P – матрица, у которой в i-й строке на j-м месте стоит число $p_i(j)$.

Поскольку групповая алгебра любой конечной инволютивной многозначной группы может быть перенормировкой базиса по формулам (1) превращена в комбинаторную алгебру (частный случай C-алгебры), она также представима в виде $\mathrm{A}(P)$ для подходящей матрицы P.

В дальнейшем важную роль будут играть следующие частные случаи этого примера.

1. Пусть G – абелева группа. Обозначим через P таблицу характеров этой группы: строки матрицы P занумерованы элементами группы G, а столбцы – характерами неприводимых представлений этой группы. Каждый элемент матрицы P равен значению соответствующего характера на соответствующем элементе группы G. В этом случае алгебры $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$ изоморфны групповой алгебре группы G (двойственность Понтрягина).

2. Далее, пусть $H \subset \mathrm{Aut}(G)$, где G — абелева группа. Рассмотрим косет-группу G/H. Её групповая алгебра $\mathbb{C}(G/H)$ является стационарной относительно действия H подалгеброй в $\mathbb{C}(G)$. Пусть x – элемент группы G/H, отвечающий орбите действия H на G, проходящей через элемент g группы G. Тогда x (рассматриваемый как элемент выделенного базиса алгебры $\mathbb{C}(G/H)$) может быть выражен через элементы G:

$$x = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h(g),$$

где $h(g)$ – результат применения к g автоморфизма h. Пусть M_x — матрица, задающая действие элемента x в регулярном представлении алгебры $\mathbb{C}(G)$ в базисе, согласованном с разложением этого представления в прямую сумму неприводимых представлений. Пусть также M_g – матрица, задающая действие элемента $g \in G$ в том же представлении и в том же базисе. Матрицы M_x и M_g являются диагональными. Легко видеть, что M_x выражается через матрицы M_g по формуле

$$M_x = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} M_{h(g)}.$$

Составим матрицу P_1, строки которой суть главные диагонали матриц M_x для всех $x \in G/H$.

Вложение алгебр $\mathbb{C}(G/H) \subset \mathbb{C}(G)$ позволяет ограничивать представления группы G на группу G/H. Поскольку у G/H различных одномерных представлений меньше, чем у G, ограничения некоторых различных одномерных представлений группы G оказываются одинаковыми представлениями группы G/H. Таким образом, у матрицы P_1 имеются повторяющиеся столбцы. После удаления повторов получится квадратная матрица P', и, очевидно, $\mathbb{C}(G/H) \cong \mathrm{A}(P')$.

3. Пусть G – неабелева группа. Рассмотрим косет-группу G/G, подразумевая, что G действует на себе сопряжениями. В силу предложения 1.5 она коммутативна. Более того, элементы алгебры $\mathbb{C}(G/G)$,

естественным путём вложенной в алгебру $\mathbb{C}(G)$, коммутируют со всеми элементами алгебры $\mathbb{C}(G)$. Действительно, пусть $x \in \mathbb{C}(G/G)$ и $g \in G$. Элемент x можно представить в виде

$$x = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (g')^{-1} \, g_0 \, g'. \tag{4}$$

Тогда

$$x \cdot g = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (g')^{-1} \, g_0 \, g' \cdot g = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g \cdot (g' \, g)^{-1} \, g_0 \, (g' \, g) = g \cdot x.$$

Рассмотрим регулярное представление группы G. Пусть M_g, $g \in G$, – матрицы, задающие действие элементов группы G в этом представлении, в базисе, согласованном с разложением этого представления в сумму неприводимых. Они являются блочно-диагональными, каждому неприводимому представлению группы G отвечает отдельный блок. Произвольный элемент x группы G/G (отвечающий орбите, проходящей через g_0) можно выразить через элементы группы G по формуле (4). Матрицу M_x, задающую действие элемента x, можно вычислить по формуле

$$M_x = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} M_{(g')^{-1} \, g_0 \, g'}. \tag{5}$$

Как сумма блочно-диагональных матриц, она также является блочно-диагональной, но поскольку она коммутирует со всеми матрицами M_g, каждый её блок представляет собой скалярную матрицу. Таким образом, каждое *неприводимое представление группы G при ограничении на G/G переходит в прямую сумму изоморфных представлений группы G/G*. Далее, *изоморфные неприводимые представления группы G при ограничении на G/G переходят в изоморфные представления группы G/G*, поскольку соответствующие этим представлениям суммы блоков матриц M_g в формуле (5) будут отличаться лишь порядком слагаемых. Наконец, поскольку количества различных представлений у групп G/G и G равны числу классов сопряжённых элементов в G и, следовательно, совпадают, *разные представления группы G при ограничении на G/G переходят в прямые суммы разных представлений группы G/G*. Из формулы (5) видно, что след каждого блока матрицы M_x, отвечающего неприводимому представлению группы G, равен следу соответствующего блока матрицы M_{g_0}, т.е. значению характера этого представления на смежном классе, отвечающем элементу x. Но так как блок матрицы M_x сам представляет собой скалярную матрицу, каждый элемент его главной диагонали равен значению характера этого представления, делённому на его размерность.

Пусть P – матрица, строки которой занумерованы классами сопряжённых элементов группы G, столбцы – характерами неприводимых представлений этой группы, а каждый матричный элемент равен значению соответствующего характера на элементах соответствующего класса сопряжённых элементов, делённому на размерность отвечающего этому характеру линейного неприводимого представления группы G. В этом случае получается, что $\mathbb{C}(G/G) \cong \mathrm{A}(P)$.

4. Далее, для неабелевой группы G рассмотрим множество характеров её неприводимых представлений G^*. На этом множестве имеется структура многозначной группы – группы характеров группы G. Рассмотрим групповую алгебру $\mathbb{C}(G^*)$ этой многозначной группы. Произведение двух элементов выделенного базиса алгебры $\mathbb{C}(G^*)$ задаётся формулой

$$c_i \cdot c_j = \sum_{k=1}^{d} \frac{n_k}{n_i n_j} p_{ij}^k c_k,$$

которая заменой $C_i = n_i c_i$ превращается в формулу разложения тензорного произведения неприводимых представлений в сумму неприводимых. Легко видеть, что алгебра $\mathbb{C}(G^*)$ с выделенным базисом $C_1, C_2, \ldots, C_d$ есть алгебра $\mathrm{A}({}^tP')$, где P' – матрица, строки которой занумерованы классами сопряжённых элементов группы G, столбцы – характерами неприводимых представлений этой группы, а каждый матричный элемент равен значению соответствующего характера на элементах соответствующего класса сопряжённых элементов. Отсюда следует, что алгебра $\mathbb{C}(G^*)$ с выделенным базисом $c_1, c_2, \ldots, c_d$ – это алгебра $\mathrm{A}({}^tP) = \mathrm{A}^*(P)$, где P – матрица, построенная в п. 3 настоящего примера.

Далее, для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим через B_i матрицу, в j-й строке на k-м месте которой находится p_{ij}^k – структурная константа алгебры $\mathrm{A}(P)$. Рассмотрим продолжение сопоставления $x_i \to B_i$ до гомоморфизма линейного пространства алгебры $\mathrm{A}(P)$ на линейное подпространство $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ всех матриц размера $n \times n$

над полем $\mathbb{C}$, порожденное матрицами B_i. Обозначим его через ϕ. Рассуждения, аналогичные проведенным в §5 книги [1] для C-алгебр, дают следующие предложения 2.22 и 2.23, а также следствие 2.24.

Предложение 2.22. *Линейное подпространство* $\mathfrak{B}$ *алгебры* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *является подалгеброй, а гомоморфизм линейных пространств* ϕ *является изоморфизмом алгебр.*

Из определения операции произведения в алгебре $\mathrm{A}(P)$ следует, что для всех $i, j = 1, \ldots, n$

$$p_i(m)\, p_j(m) = \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^k p_k(m) \quad \text{для всех} \quad m = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Это означает, что *для всех* $m = 1, \ldots, n$ *соответствие* $x_i \to p_i(m)$ *определяет одномерное представление алгебры* $\mathrm{A}(p)$. Равенства (6) можно переписать в матричном виде:

$$B_i f_m = p_i(m) f_m,$$

т.е. для *любых* i *и* m *вектор-столбец* f_m *является собственным вектором матрицы* B_i, *отвечающим собственному числу* $p_i(m)$.

Следовательно, B_i можно выразить в виде

$$B_i = \sum_{m=1}^{n} p_i(m) F_m,$$

где для каждого $m = 1, \ldots, n$ через F_m обозначена матрица проектирования на линейное подпространство, натянутое на вектор f_m. Пусть Q – обратная к P матрица, в s-й строке на t-м месте которой расположен элемент $q_s(t)$. Тогда имеем

$$F_m = \sum_{i=1}^{n} q_m(i) B_i.$$

Это равенство означает, что матрицы F_m принадлежат матричной алгебре $\mathfrak{B} \cong \mathrm{A}(P)$. Таким образом, мы получаем следующее предложение.

Предложение 2.23. *В алгебре* $\mathrm{A}(P)$ *имеется базис* $e_1, \dots, e_n$, *состоящий из идемпотентов, являющихся прообразами при изоморфизме* ϕ *матриц* $F_1, \dots, F_n$. *Этот базис связан с выделенным базисом формулами*

$$x_i = \sum_m p_i(m) e_m, \qquad e_m = \sum_i q_m(i) x_i. \tag{7}$$

Таким образом, для любой допустимой матрицы P алгебра $\mathrm{A}(P)$ изоморфна $\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}$ (в этой сумме n слагаемых). Однако разные матрицы P одинакового размера приводят к алгебрам, отличающимся своими выделенными базисами.

Из предложения 2.23 мы получаем такое следствие.

Следствие 2.24. *Любое линейное представление алгебры* $\mathrm{A}(P)$ *является прямой суммой одномерных представлений вида* $\Delta_j : x_i \to p_i(j)$.

3. Условие постоянства значности и двойственность

Имеет место следующее простое предложение, важное для теории многозначных групп.

Предложение 3.25. *Следующие три условия эквивалентны:*

(1) *алгебра* $\mathrm{A}(P)$ *имеет единицу среди элементов своего выделенного базиса*;

(2) *алгебра* $\mathrm{A}^*(P)$ *удовлетворяет условию постоянства значности (для любого* r *имеет место равенство* $\sum\limits_{r=1}^{n} p^r_{st} = 1$);

(3) *одна из строк матрицы* P *состоит только из единиц.*

Доказательство предложения.

(1) $\to$ (3). Предположим, что элемент x_k выделенного базиса алгебры $\mathrm{A}(P)$ является единицей. Докажем, что тогда k-я строка матрицы P состоит из одних единиц. Рассмотрим равенство $x_k x_k = x_k$. Оно эквивалентно системе $p_k(j)\, p_k(j) = p_k(j)$ при $j = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что первая строка состоит лишь из нулей и единиц. Предположим, что на j-м месте в первой строке встретился ноль. Тогда, в силу невырожденности матрицы P, для некоторого i имеем $p_i(j) \neq 0$. Но тогда из равенства $x_k x_i = x_i$ следует, что $p_k(j)\, p_i(j) = p_i(j)$, а это противоречит равенству элемента $p_k(j)$ нулю.

(3) $\to$ (1). Если некоторая строка матрицы P состоит из одних единиц, то адамарово произведение этой строки на любую строку

будет равно последней, т.е. соответствующий элемент выделенного базиса алгебры $\mathrm{A}(P)$ является единицей.

(1) $\to$ (2). Пусть в выделенном базисе алгебры $\mathrm{A}(P)$ элемент x_i является единицей. Тогда по доказанному i-я строка матрицы P состоит только из единиц. Но это означает, что алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ имеет линейное одномерное представление, при котором каждый элемент её выделенного базиса f_j переходит в число $P_i(j) = 1$, т.е. $1 \cdot 1 = \sum_{r=1}^{n} p_{st}^r 1$.

(2) $\to$ (3). Если алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ удовлетворяет условию постоянства значности, то она имеет представление, при котором каждый элемент её выделенного базиса f_j переходит в 1. Но согласно результатам предыдущего параграфа (применённым к алгебре $\mathrm{A}^*(P)$), каждое одномерное представление этой алгебры имеет вид $f_j \to p_i(j)$. Следовательно, найдётся такое i, что для всех j выполнено равенство $p_i(j) = 1$. $\square$

В дальнейшем важную роль будет играть понятие инволютивной алгебры.

Определение 3.26. *Коммутативная алгебра $\mathfrak{A}$ с выделенным базисом $x_1, \ldots, x_n$ называется инволютивной, если*

(1) *среди элементов её выделенного базиса имеется единица;*

(2) *для любого $i = 1, \ldots, n$ существует, причём единственный, индекс $j \in 1, \ldots, n$, такой, что при разложении произведения $x_i x_j$ по выделенному базису коэффициент при единице отличен от нуля (такой j мы будем обозначать через i');*

(3) *антилинейное преобразование алгебры, продолжающее соответствие $x_i \to x_{i'}$, является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$.*

Элементы x_i и $x_{i'}$ называются взаимно обратными в групповом смысле.

В инволютивных алгебрах $\mathrm{A}(P)$ с единицей x_1 коэффициент $p_{ii'}^1 = p_{i'i}^1$ мы будем, следуя [1], обозначать через k_i.

Определение 3.27. *Инволютивную алгебру назовём псевдогрупповой, если*

(1) *все её структурные константы p_{ij}^k – действительные числа, причём для всех допустимых i число k_i больше нуля;*

(2) *она удовлетворяет условию постоянства значности (т.е.* $\sum\limits_k p_{ij}^k = 1$ *для всех допустимых значений* i *и* j*).*

В частности, главный предмет нашего дальнейшего изучения – групповые алгебры коммутативных инволютивных многозначных групп – являются псевдогрупповыми алгебрами, структурные константы которых – неотрицательные рациональные числа.

В терминологии работы [2] псевдогрупповые алгебры соответствуют транзитивным RBA-алгебрам, т.е. RBA-алгебрам, у которых степенное отображение равно единице на всех элементах выделенного базиса. Невырожденная билинейная форма

$$\langle x_s, x_t \rangle = k_s \delta_{s't}$$

на псевдогрупповой алгебре или, более общо, на RBA-алгебре превращает её во фробениусову алгебру, см. [2].

4. Собственные матрицы псевдогрупповых алгебр

Лемма 4.28. *Алгебра* $\mathrm{A}(P)$ *является инволютивной с единицей* x_1*, причём для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *числа* k_i *действительны и положительны, тогда и только тогда, когда существуют такие диагональные матрицы* D_1 *и* D_2 *с действительными положительными элементами на своих главных диагоналях, что матрица* $\widehat{P} = D_1 P D_2$ *является унитарной, отличается от матрицы* $\overline{\widehat{P}}$ *лишь перестановкой строк и имеет в качестве элементов первой строки только действительные положительные числа. При этом*

$$D_1 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k_n}}\right), \qquad D_2 = \mathrm{diag}(\sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_n}),$$

где m_i *есть* i*-й элемент в первом столбце матрицы* $Q = P^{-1}$*.*

Схема доказательства. Существование для алгебры $\mathrm{A}(P)$, обладающей указанными свойствами, диагональных матриц D_1 и D_2 может быть доказано с помощью рассуждений, аналогичных проведённым в §2.5 монографии [1] для C-алгебр. Здесь же отметим, что в основе этих рассуждений лежат два соотношения ортогональности

$$\sum_i \frac{1}{k_i} p_i(l) \overline{p_i(j)} = \delta_{lj} \frac{1}{m_l}, \tag{8}$$

$$\sum_t p_i(t) \overline{p_j(t)} m_t = \delta_{ij} k_i, \tag{9}$$

а также соотношение

$$\overline{p_i(j)} = p_{i'}(j). \tag{10}$$

Опишем теперь обратную конструкцию.

Пусть $\widehat{P}$ – произвольная унитарная матрица, отличающаяся от матрицы $\overline{\widehat{P}}$ перестановкой строк (пусть j' – номер строки, которая при сопряжении меняется местами с j-й строкой), у которой первая строка состоит из действительных положительных чисел. Пусть для $j = 1, \ldots, n$ коэффициент m'_j равен квадрату элемента, стоящего в первой строке матрицы $\widehat{P}$ на j-м месте, а $\{k'_j\}$ – произвольный набор действительных положительных чисел, удовлетворяющий условиям $k'_1 = 1$ и $k'_{j'} = k'_j$.

Определим тогда матрицу P следующим образом:

$$P = \operatorname{diag}(\sqrt{k'_1}, \ldots, \sqrt{k'_n}) \cdot \widehat{P} \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{m'_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{m'_n}}\right). \tag{11}$$

У этой матрицы первая строка будет состоять из единиц; следовательно, в соответствующей алгебре $\mathrm{A}(P)$ элемент x_1 является единицей. Кроме того, очевидно, что матрицы P и $\overline{P}$ отличаются перестановкой строк, из чего вытекает, что антилинейное преобразование $x_j \to x_{j'}$ является автоморфизмом алгебры $\mathrm{A}(P)$.

Рассмотрим матрицу $Q = P^{-1}$:

$$Q = \operatorname{diag}(\sqrt{m'_1}, \ldots, \sqrt{m'_n}) \cdot {}^t\overline{\widehat{P}} \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{k'_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k'_n}}\right). \tag{12}$$

Из этой формулы вытекает, что в первом столбце матрицы Q стоят коэффициенты m'_i. Следовательно, $m'_i = q_i(1) = m_i$ для всех допустимых i.

Затем, рассмотрев алгебру $\mathrm{A}(P)$, можно заметить, что каждый элемент её выделенного базиса имеет единственный в групповом смысле обратный (причём взаимно обратными оказываются элементы, для которых соответствующие строки матрицы P отличаются комплексным сопряжением) и что $k_i = k'_i > 0$. □

Будем обозначать через k^*_s и m^*_t параметры алгебры $\mathrm{A}^*(P)$, аналогичные параметрам k_s и m_t алгебры $\mathrm{A}(P)$.

Лемма 4.29. *Если алгебра* $\mathrm{A}(P)$ *является инволютивной и удовлетворяет условию постоянства значности, причём для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *числа* k_i *действительные и положительные, то алгебра* $\mathrm{A}^*(P)$ *также инволютивна и удовлетворяет условию постоянства значности, причём для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *числа* k_i^* *действительные и положительные.*

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathrm{A}(P)$, как инволютивная алгебра, имеет единицу среди элементов своего выделенного базиса и удовлетворяет условию постоянства значности, мы видим, что согласно предложению 3.25 двойственная к ней алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ также имеет единицу среди элементов своего выделенного базиса и удовлетворяет условию постоянства значности. Без ограничения общности можно считать, что x_1 и f_1 – единицы алгебр $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$. Тогда получается, что первый столбец матрицы $\widehat{P}$ состоит только из действительных положительных чисел.

Далее, поскольку у алгебры $\mathrm{A}(P)$ антилинейная инволюция $\mathrm{A}(P) \to \mathrm{A}(P)$, $x = \sum\limits_i \alpha_i x_i \mapsto x' = \sum\limits_i \overline{\alpha}_i x_{i'}$, является автоморфизмом алгебры, она определяет некоторую (тривиальную или имеющую второй порядок) перестановку на множестве идемпотентов алгебры $\mathrm{A}(P)$. Последнее означает, что при этой инволюции переставляются одномерные неприводимые представления, рассматриваемые как прямые слагаемые регулярного представления этой алгебры. Иначе говоря, переставляются столбцы матрицы P, которые как раз и отвечают за эти представления. Таким образом, матрица P отличается от матрицы $\overline{P}$ лишь перестановкой столбцов. Очевидно, этим же свойством обладает и матрица $\widehat{P} = D_1 P D_2$, где D_1 и D_2 – диагональные матрицы из леммы 4.28. Применив эту лемму к матрице ${}^t\widehat{P}$, получаем, что алгебра $\mathrm{A}({}^tP) = \mathrm{A}^*(P)$ инволютивна и удовлетворяет условию постоянства значности, причём для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ числа k_i^* действительные и положительные. □

Леммы 4.29 и 4.28 позволяют установить связь между параметрами алгебр $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P) \cong \mathrm{A}({}^tP)$. Действительно, элемент первой строки матрицы $\widehat{P}$, стоящий на i-м месте при $1 \le i \le n$, равен $\sqrt{m_i}$ (так как k_1 всегда равен 1, поскольку x_1 – единица), а элемент первого столбца, стоящий на j-м месте при $1 < j \le n$, равен $\sqrt{m_1}/\sqrt{k_j}$. Действуя аналогично, мы получаем аналогичные выражения для элементов первой строки и первого столбца той же матрицы $\widehat{P}$ через k_s^* и m_t^*. В итоге имеем равенства

$$m_1^* = m_1, \quad m_i^* = \frac{m_1}{k_i}, \quad k_j^* = \frac{m_1}{m_j}. \tag{13}$$

Далее, имеет место следующая лемма.

Лемма 4.30. *Если алгебра* $\mathrm{A}(P)$ *является инволютивной и удовлетворяет условию постоянства значности, причём для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *числа* k_i *действительные и положительные, то все её структурные константы – действительные числа, т.е. она является псевдогрупповой алгеброй.*

Идеи доказательства этого предложения позаимствованы из §2.5 монографии [1].

Доказательство. Рассмотрим произведение пары элементов алгебры $\mathrm{A}(P)$:

$$\begin{aligned} x_i x_j &= \left(\sum_l p_i(l) e_l\right)\left(\sum_m p_j(m) e_m\right) \\ &= \sum_l p_i(l) p_j(l) e_l = \sum_{l,s} p_i(l) p_j(l) q_l(s) x_s \end{aligned}$$

(здесь $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – состоящий из идемпотентов базис алгебры $\mathrm{A}(P)$, см. предложение 2.23). С другой стороны,

$$x_i x_j = \sum_s p_{ij}^s x_s.$$

В итоге мы получаем равенство

$$p_{ij}^s = \sum_l p_i(l) p_j(l) q_l(s). \tag{14}$$

Коэффициент $q_l(s)$ есть матричный элемент матрицы Q, находящийся в l-й строке на s-м месте. Формулы (11) и (12) позволяют выразить этот коэффициент через соответствующий матричный элемент матрицы P:

$$q_l(s) = \frac{m_l \overline{p_s(l)}}{k_s} = \frac{m_1 \overline{p_s(l)}}{k_l^* k_s}$$

(в последнем равенстве использована формула (13)). В итоге формула (14) приобретает вид

$$p_{ij}^s = \frac{m_1}{k_s} \sum_l p_i(l) p_j(l) \frac{\overline{p_s(l)}}{k_l^*}. \tag{15}$$

Как было показано в доказательстве леммы 4.28, матрица P отличается от матрицы $\overline{P}$ перестановкой столбцов. Кроме того, конечно, $k_l^* = k_{l'}^*$. Таким образом, имеем

$$\overline{p_{ij}^s} = \frac{m_1}{k_s} \sum_l \overline{p_i(l)}\ \overline{p_j(l)} \frac{p_s(l)}{k_l^*} = \frac{m_1}{k_s} \sum_l p_i(l') p_j(l') \frac{\overline{p_s(l')}}{k_{l'}^*}.$$

Последняя сумма может быть превращена в сумму из правой части формулы (15) перестановкой слагаемых. Таким образом, $\overline{p_{ij}^s} = p_{ij}^s$. $\square$

Из лемм 4.29, 4.28 и 4.30 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.31. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *алгебра* $\mathrm{A}(P)$ *является псевдогрупповой с единицей* x_1, *причём единичный столбец матрицы* P *является первым;*

(2) *алгебра* $\mathrm{A}^*(P)$ *является псевдогрупповой с единицей* f_1, *причём единичная строка матрицы* P *является первой;*

(3) *существуют такие диагональные матрицы* D_1 *и* D_2 *с действительными положительными элементами на своих главных диагоналях, что матрица* $\widehat{P} = D_1 P D_2$ *является унитарной, отличается от матрицы* $\overline{\widehat{P}}$ *лишь перестановкой строк и имеет в качестве элементов первой строки и первого столбца только действительные положительные числа;*

(4) *существуют такие диагональные матрицы* D_1 *и* D_2 *с действительными положительными элементами на своих главных диагоналях, что матрица* $\widehat{P} = D_1 P D_2$ *является унитарной, отличается от матрицы* $\overline{\widehat{P}}$ *лишь перестановкой столбцов и имеет в качестве элементов первой строки и первого столбца только действительные положительные числа.*

При этом

$$D_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k_n}}\right), \qquad D_2 = \operatorname{diag}(\sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_n}),$$

где m_i *есть* i*-й элемент в первом столбце матрицы* $Q = P^{-1}$.

5. Двойственность у многозначных групп и C-алгебр

Выше было уже отмечено (см. пример 2.21), что групповая алгебра $\mathbb{C}(M)$ произвольной коммутативной инволютивной многозначной группы M представима в виде $\mathrm{A}(P)$ для подходящей собственной матрицы P. Это обстоятельство позволяет дать следующее определение.

Определение 5.32. *Две коммутативные инволютивные многозначные группы M и M^* называются двойственными, если их групповые алгебры двойственны, т.е. если $\mathbb{C}(M) \cong \mathrm{A}(P)$, то $\mathbb{C}(M^*) \cong \mathrm{A}^*(P)$.*

Согласно этому определению, обычная абелева группа двойственна сама себе. Многозначная группа M^*, двойственная к данной многозначной группе M, может как быть ей изоморфной (если матрицу P можно, переставив надлежащим образом столбцы, превратить в симметрическую), так и не быть ей изоморфной. Отметим, что далеко не у каждой многозначной группы вообще имеется двойственная многозначная группа.

Формулы (1), связывающие элементы выделенного базиса групповой алгебры $A(P)$=$\mathbb{C}(M)$ инволютивной многозначной группы M и элементы соответствующей ей комбинаторной алгебры $\mathcal{C}(M)$, в обозначениях настоящего раздела принимают вид

$$c_i = \frac{1}{k_i} x_i. \tag{16}$$

Заметим, что это преобразование можно применить не только в случае, когда $A(P)$ – групповая алгебра инволютивной многозначной группы, но и в более общем случае, когда $A(P)$ – лишь псевдогрупповая алгебра. В результате замены выделенного базиса преобразованием (16), как несложно убедиться, получится C-алгебра, не являющаяся, вообще говоря, комбинаторной. Эту C-алгебру мы будем обозначать $\mathcal{C}(P)$.

В результате умножение в алгебре $\mathcal{C}(P)$ будет задаваться формулами

$$c_s c_t = \sum_r t^r_{st} c_r, \quad \text{где} \quad t^r_{st} = \frac{k_r}{k_s k_t} p^r_{st}, \tag{17}$$

а коэффициенты p^r_{st} – структурные константы алгебры $\mathrm{A}(P)$ в её исходном базисе. При этом аналогами констант $k_i = p^1_{ii'}$ будут константы $t^1_{ii'}$ ($x_1 = c_1$ – единица), которые вычисляются так:

$$t^1_{ii'} = \frac{k_1}{k_i k_{i'}} p^1_{ii'} = \frac{1}{k_i^2} k_i = \frac{1}{k_i}. \tag{18}$$

Из формулы (17) вытекает, что

$$\mathcal{C}(P) \cong \mathrm{A}\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_n}\right) \cdot P\right).$$

Но так как

$$P = \operatorname{diag}\left(\sqrt{k_1}, \dots, \sqrt{k_n}\right) \cdot \widehat{P} \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)$$

(см. теорему 4.3), в итоге имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P) \cong \mathrm{A}\Bigg(&\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k_n}}\right) \\ &\times \widehat{P} \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_m}}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{19}$$

Далее, в книге [1] описана двойственность Кавады–Дельсарта для C-алгебр. Если исходная C-алгебра имеет собственную матрицу P', то двойственная по Каваде–Дельсарту к ней имеет в качестве собственной матрицу $N \cdot (P')^{-1}$, где N – число, равное сумме $\sum_i t^1_{ii'}$. В нашем случае алгебра $\mathcal{C}^*(P)$, двойственная к алгебре $\mathcal{C}(P)$, будет иметь вид

$$\mathcal{C}^*(P) \cong \mathrm{A}\left(\left(\sum_i \frac{1}{k_i}\right) \cdot \left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_n}\right) \cdot P\right)^{-1}\right)$$

$$\cong \mathrm{A}\left(\left(\sum_i \frac{1}{k_i}\right) \cdot \operatorname{diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_n}) \cdot \widehat{P}^{-1} \cdot \operatorname{diag}\left(\sqrt{k_1}, \dots, \sqrt{k_n}\right)\right).$$

Из первого соотношения ортогональности (см. (8)) в случае $l = j = 1$ имеем

$$\sum_i \frac{1}{k_i} = \frac{1}{m_1},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}^*(P) \\ &\cong \mathrm{A}\left(\frac{1}{m_1} \cdot \operatorname{diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_n}) \cdot \widehat{P}^{-1} \cdot \operatorname{diag}\left(\sqrt{k_1}, \dots, \sqrt{k_n}\right)\right). \end{aligned} \tag{20}$$

К построению двойственной C-алгебры можно подойти с другой стороны.

А именно, рассмотрим псевдогрупповую алгебру $\mathrm{A}^*(P) \cong \mathrm{A}({}^tP)$, двойственную по отношению к алгебре $\mathrm{A}(P)$. Выписав формулы, аналогичные формуле (19), получаем вид C-алгебры $\mathcal{C}^*(P)$:

$$\mathcal{C}^*(P) \cong \mathrm{A}\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1^*}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k_n^*}}\right) \cdot {}^t\widehat{P} \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1^*}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_n^*}}\right)\right)$$

$$\cong \mathrm{A}\left(\frac{1}{m_1} \cdot \operatorname{diag}\left(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_n}\right) \cdot {}^t\widehat{P} \cdot \operatorname{diag}\left(\sqrt{k_1}, \dots, \sqrt{k_n}\right)\right).$$

Сравнивая последнюю формулу с выражением (20) и учитывая, что в рассматриваемом случае, когда алгебры $\mathrm{A}(P)$ и $\mathrm{A}^*(P)$ – псевдогрупповые, матрицы $\widehat{P}^{-1} = {}^t\overline{\widehat{P}}$ и ${}^t\widehat{P}$ отличаются друг от друга лишь перестановкой столбцов, мы видим, что алгебры $\mathcal{C}^*(M)$ и $\mathcal{C}(M^*)$ могут отличаться лишь порядком элементов в выделенных базисах. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 5.33. *Двойственным псевдогрупповым алгебрам* $\mathrm{A}(P)$ *и* $\mathrm{A}^*(P)$ *отвечают двойственные (по Каваде–Дельсарту) коммутативные* C*-алгебры* $\mathcal{C}(P)$ *и* $\mathcal{C}^*(P)$*. В частности, двойственным коммутативным инволютивным многозначным группам отвечают двойственные (по Каваде–Дельсарту) коммутативные комбинаторные алгебры.*

Заметим, что эта теорема позволяет получить ещё одно доказательство эквивалентности условий (1) и (2) теоремы 4.31: если $\mathrm{A}(P)$ является псевдогрупповой алгеброй, то можно перенормировать элементы её выделенного базиса и получить соответствующую C-алгебру $\mathcal{C}(P)$, при этом двойственной к ней будет C-алгебра $\mathcal{C}^*(P)$, у которой можно перенормировать элементы выделенного базиса и получить алгебру $\mathrm{A}^*(P)$ – тоже псевдогрупповую.

Далее, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.34. *Алгебра* $\mathrm{A}^*(P)$*, двойственная к групповой алгебре* $\mathrm{A}(P) = \mathbb{C}(M)$ *многозначной AS-группы* M*, является псевдогрупповой алгеброй с действительными неотрицательными структурными константами, причём числа* $1/k_i^*$ *являются натуральными.*

Доказательство. Алгебра $\mathrm{A}(P)$ является групповой алгеброй коммутативной многозначной группы, поэтому, согласно теореме 4.31, алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ является псевдогрупповой. Далее, пусть $(\mathcal{V},\mathcal{R})$ – коммутативная ассоциативная схема, отвечающая AS-группе M, а $\mathcal{C}(\mathcal{V},\mathcal{R})$ – её алгебра смежности. Структурные константы q_{ij}^k C-алгебры $\mathcal{C}^*(\mathcal{V},\mathcal{R})$, двойственной (по Каваде–Дельсарту) к алгебре $\mathcal{C}(\mathcal{V},\mathcal{R})$, суть параметры Крейна последней. Согласно условию Крейна, параметры Крейна являются неотрицательными действительными числами. Поскольку алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ отличается от $\mathcal{C}^*(\mathcal{V},\mathcal{R})$ лишь нормировкой элементов выделенного базиса с положительными нормирующими множителями, её структурные константы – неотрицательные действительные числа. Наконец, коэффициенты $q_{ii'}^1$ равны размерностям собственных подпространств матриц смежности, а следовательно, являются натуральными. Остаётся лишь провести выкладку, аналогичную (18), и выяснить, что $q_{ii'}^1 = 1/k_i^*$. $\square$

К сожалению, параметры Крейна алгебры смежности ассоциативной схемы могут быть иррациональными. Поэтому существуют такие AS-группы M, что у алгебр $\mathbb{C}^*(M)$, двойственных к их групповым алгебрам $\mathbb{C}(M)$, некоторые структурные константы иррациональны. Следовательно, для таких AS-групп M алгебры $\mathbb{C}^*(M)$ не будут групповыми алгебрами каких-либо многозначных групп, т.е. такие группы M не имеют двойственных групп.

Однако для некоторых классов многозначных групп можно утверждать существование двойственных групп.

Лемма 5.35. *Пусть G – неабелева группа и $\mathrm{A}(P)$ – групповая алгебра косет-группы G/G, где подразумевается, что группа G действует на себе сопряжениями. Тогда алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ есть групповая алгебра коммутативной многозначной группы – группы характеров группы G.*

Доказательство данной леммы фактически содержится в пунктах 3 и 4 примера 2.21.

Лемма 5.36. *Если $\mathrm{A}(P)$ – групповая алгебра косет-группы G/H, где G – абелева группа, то $\mathrm{A}^*(P)$ – тоже групповая алгебра косет-группы.*

Доказательство. Так как G коммутативна, группа автоморфизмов H, действуя на группе G, вместе с тем действует и на характерах этой группы, т.е. H оказывается группой автоморфизмов группы характеров G^*. Итак, многозначная группа, двойственная к G/H, представляет собой косет-группу группы характеров G^*/H. $\square$

В данной работе всюду предполагается, что элементы многозначных групп, а также элементы выделенных базисов алгебр занумерованы. Это обстоятельство требует сделать следующее замечание.

Замечание 5.37. У произвольной алгебры с выделенным базисом, которая представима в виде $\mathrm{A}(P)$, собственная матрица P определена с точностью до перестановки столбцов. Это означает, что и двойственная алгебра $\mathrm{A}^*(P)$ определена с точностью до перенумерации элементов выделенного базиса.

В случае псевдогрупповых алгебр этот произвол ограничен соглашением, что единица имеет номер 1.

6. Применение двойственности для изучения однопорождённых многозначных групп и C-алгебр

В работе [10] дано следующее определение однопорождённой многозначной группы и предложена конструкция таких групп, опирающаяся на классическую теорему Бернсайда.

Определение 6.38. *Многозначная группа M называется однопорождённой, если у неё имеется такой элемент a, что любой элемент $b \in M$ содержится в некоторой степени элемента a:*

$$\mu(a, \mu(a, \dots \mu(a, \mu(a, a)) \dots)).$$

Элемент a в таком случае называется образующим группы M.

Теорема 6.39 (Теорема Бернсайда)**.** *Пусть ρ – точное неприводимое представление конечной группы G. Тогда любое её неприводимое представление содержится разложении некоторой степени $\rho^k = \rho \otimes \dots \otimes \rho$ в сумму неприводимых.*

Таким образом, как замечено в [10], если конечная группа G имеет точное неприводимое представление ρ, то группа характеров G^* будет однопорождённой, а характер представления ρ – её образующим.

В свою очередь отметим, что в силу леммы 5.35 многозначная группа, двойственная к G^*, является косетной группой $G/\!/G$. Это обстоятельство даёт необходимый признак однопорождённых многозначных групп, построенных с помощью конструкции из работы [10].

Пример 6.40. 1. Группа характеров $(S_3)^*$. Её групповая алгебра задаётся формулами

$$e \cdot e = e, \qquad e \cdot a = a \cdot e = a, \qquad e \cdot b = b \cdot e = b,$$
$$a \cdot a = e, \qquad a \cdot b = b \cdot a = d, \qquad b \cdot b = \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b,$$

а собственная матрица имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

У этой группы элемент b является образующим. Он соответствует характеру двумерного точного неприводимого представления группы S_3. Групповая алгебра двойственной косет-группы S_3 / S_3 задаётся уравнениями

$$e \cdot e = e, \qquad e \cdot a = a \cdot e = a, \qquad e \cdot b = b \cdot e = b,$$
$$a \cdot a = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}a, \qquad a \cdot b = b \cdot a = d, \qquad b \cdot b = \frac{1}{3}e + \frac{2}{3}a.$$

Этот пример подробно обсуждается в работе [9].

2. Рассмотрим группу, групповая алгебра которой задаётся формулами

$$e \cdot e = e, \qquad e \cdot a = a \cdot e = a, \qquad e \cdot b = b \cdot e = b,$$
$$a \cdot a = e, \qquad a \cdot b = b \cdot a = d, \qquad b \cdot b = \frac{1}{9}e + \frac{1}{9}a + \frac{7}{9}b;$$

её собственная матрица имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}.$$

У этой группы элемент b является образующим. Мощности элементов этой группы $m(e)$=$m(a) = 1$, $m(b) = 9$ являются квадратами целых чисел – как это и должно быть у групп характеров согласно следствию 1.13.

Рассмотрим теперь групповую алгебру двойственной группы:

$$
\begin{aligned}
&e\cdot e=e, && e\cdot a=a\cdot e=a, && e\cdot b=b\cdot e=b,\\
&a\cdot a=\frac{2}{9}e+\frac{7}{9}a, && a\cdot b=b\cdot a=d, && b\cdot b=\frac{2}{11}e+\frac{9}{11}a.
\end{aligned}
$$

Мощности элементов этой группы $m(e)$=1, $m(a)=\frac{9}{2}$, $m(b)=\frac{11}{2}$ не целые числа, а следовательно, эта группа в силу следствия 1.13 не является косетной. Таким образом, исходная группа – не группа характеров.

3. Рассмотрим группу, групповая алгебра которой задаётся формулами

$$
\begin{aligned}
&e\cdot e=e, && e\cdot a=a\cdot e=a, && e\cdot b=b\cdot e=b,\\
&a\cdot a=\frac{1}{4}e+\frac{3}{4}b, && a\cdot b=b\cdot a=\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b, && b\cdot b=\frac{1}{4}e+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b;
\end{aligned}
$$

её собственная матрица имеет вид

$$
P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{\sqrt{13}}{8}-\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{13}}{8}-\frac{3}{8}\\ 1 & \frac{\sqrt{13}}{8}+\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{13}}{8}+\frac{3}{8}\end{pmatrix}.
$$

У этой группы элемент b является образующим. Необходимое условие для группы характеров из следствия 1.13 выполнено. Однако эта группа не является группой характеров, поскольку алгебра $\mathrm{A}({}^tP)=\mathrm{A}^*(P)$ имеет иррациональные структурные константы, а следовательно, не является групповой алгеброй многозначной группы.

7. Многозначные группы порядка три

7.1. Многообразия структур ассоциативных алгебр

Пусть S – множество, одним из элементов которого является e, и пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство формальных линейных комбинаций элементов множества S. Рассмотрим *линейное пространство структурных констрант* $V\cong\mathbb{R}^{|S|^3}$ с координатами $c_{i,j}^k$, где $i,j,k\in S$. Каждому набору индексов $i,j,k,r\in S$ сопоставим отображение $f_{ijk}^r\colon V\to\mathbb{R}$, определённое формулой

$$
\Bigl(\sum_{p\in S}c_{i,j}^p c_{p,k}^r-\sum_{t\in S}c_{i,t}^r c_{j,k}^t\Bigr), \tag{21}
$$

и пусть $F\colon V \to \mathbb{R}^{|S|^4}$ – отображение с компонентами f^r_{ijk}. *Многообразием $M^{|S|}_{\mathrm{ass}}$ структур ассоциативных алгебр на $\mathcal{L}$ с единицей e и фиксированным базисом S* называется сечение алгебраического многообразия $F^{-1}(0)$ гиперплоскостями $c^k_{i,e} = \delta^k_i$, $c^k_{e,j} = \delta^k_j$, где $i,j,k \in S$. Многообразие структур ассоциативных алгебр $M^{|S|}_{\mathrm{ass}}$ имеет естественное вложение в V. Каждой его точке с координатами $\{c^k_{i,j}\}_{i,j,k\in S}$ естественно сопоставляется структура ассоциативной алгебры на $\mathcal{L}$ с единицей e и умножением $i*j = \sum\limits_{k\in S} c^k_{i,j}k$, и, наоборот, каждой структуре ассоциативной алгебры на $\mathcal{L}$ с единицей e можно сопоставить точку на многообразии $M^{|S|}_{\mathrm{ass}}$.

На $M^{|S|}_{\mathrm{ass}}$ имеется действие группы GL. Орбиты этого действия в случае $|S| \leqslant 5$ изучены (результаты и библиографию см. в [18]).

Сечение многообразия $M^{|S|}_{\mathrm{ass}}$ гиперплоскостями $c^k_{i,j} - c^k_{j,j} = 0, i,j,k \in S$, называется *многообразием структур коммутативных ассоциативных алгебр на $\mathcal{L}$ с единицей e* и обозначается $M^{|S|}_{\mathrm{ass,com}}$.

Рассмотрим теперь гиперплоскости $\sum\limits_{k\in S} c^k_{i,j} = 1$, $i,j,k \in S$. Сечения этими гиперплоскостями многообразий $M^{|S|}_{\mathrm{ass}}$ и $M^{|S|}_{\mathrm{ass,com}}$ будем обозначать через $\widetilde{M}^{|S|}_{\mathrm{ass}}$ и $\widetilde{M}^{|S|}_{\mathrm{ass,com}}$ соответственно и называть *многообразиями алгебр, удовлетворяющих условию постоянства значности.*

Точки, отвечающие структурам групповых алгебр многозначных групп на $\mathcal{L}$, образуют некоторое дискретное множество на многообразии $\widetilde{M}^{|N|}_{\mathrm{ass}}$.

7.2. Многообразия трёхмерных алгебр

Пусть $S = \{a,b,e\}$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 7.41. *Пусть дана ассоциативная алгебра размерности 3 с выделенным базисом a,b,e (где e – единица), и пусть $\{c^k_{i,j}\}$ – её структурные константы относительно этого базиса. Если выполнены условия*

$$(1) \qquad c^k_{ij} \geqslant 0 \text{ для любых } i,j,k \in \{a,b,e\},$$
$$(2) \qquad c^e_{aa}\cdot c^e_{bb} + c^e_{ab} > 0,$$

то эта алгебра коммутативна.

Доказательство. В начале предположим, что $c^b_{aa} \neq 0$ (или $c^a_{bb} \neq 0$ – тогда переименуем базисные элементы). Рассмотрим условие ассоциативности $(a*a)*a = a*(a*a)$. Условие равенства коэффициентов при a имеет вид

$$c_{aa}^a c_{aa}^a + c_{aa}^b c_{ba}^a + c_{aa}^e c_{ea}^a = c_{aa}^a c_{aa}^a + c_{ab}^a c_{aa}^b + c_{ae}^a c_{aa}^e.$$

Тогда, учитывая, что $c_{ie}^k = c_{ei}^k = \delta_i^k$, получаем $c_{ba}^a = c_{ab}^a$. Аналогично из равенства коэффициентов при b имеем

$$c_{aa}^a c_{aa}^b + c_{aa}^b c_{ba}^b + c_{aa}^e c_{ea}^b = c_{aa}^b c_{aa}^a + c_{ab}^b c_{aa}^b + c_{ae}^b c_{aa}^e,$$

откуда следует, что $c_{ab}^b = c_{ba}^b$. Точно так же доказывается, что $c_{ab}^e = c_{ba}^e$.

Осталось рассмотреть случай $c_{aa}^b = c_{bb}^a = 0$. Из условия равенства коэффициентов при a в уравнении $a*(a*b) = (a*a)*b$ получаем

$$c_{aa}^a c_{ab}^a + c_{ab}^a c_{ab}^b + c_{ea}^a c_{ab}^e = c_{aa}^a c_{ab}^a + c_{aa}^b c_{bb}^a + c_{aa}^e c_{eb}^a,$$

откуда вытекает равенство $c_{ab}^a c_{ab}^b + c_{ab}^e = 0$, из которого (т.к. структурные константы неотрицательны) следует, что $c_{ab}^e = 0$. Аналогично можно доказать, что $c_{ba}^e = 0$. Но тогда в силу условия (2) коэффициенты c_{aa}^e и c_{bb}^e должны быть отличны от нуля. Условие равенства коэффициентов при e в уравнении $(a*b)*a = a*(b*a)$ имеет вид

$$c_{ab}^a c_{aa}^e + c_{ab}^b c_{ba}^e + c_{ab}^e c_{ea}^e = c_{aa}^e c_{ba}^a + c_{ab}^e c_{ba}^b + c_{ae}^e c_{ba}^e,$$

т.е.

$$c_{ab}^a c_{aa}^e = c_{aa}^e c_{ba}^a,$$

откуда получаем, что $c_{ab}^a = c_{ba}^a$. Аналогично можно показать, что $c_{ab}^b = c_{ba}^b$. □

Таким образом, все многозначные группы порядка 3 коммутативны.

Рассмотрим следующую таблицу

$$e*e = e, \quad e*a = a, \quad e*b = b,$$

$$a*a = Ae + Ba + Cb,$$
$$a*b = De + Ea + Fb,$$
$$b*b = Ge + Ha + Ib.$$

Как нетрудно установить, уравнения ассоциативности этой таблицы могут быть записаны в следующем виде:

$$D = CH - FE,$$
$$A = EC + FF - BF - CI,$$
$$G = EE + FH - HB - IE.$$

Следовательно, $M^3_{\mathrm{ass,com}}$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^6$ с координатами B, C, E, F, H и I. Этот факт известен в математическом фольклоре.

Лемма 7.42. *Многообразие* $\widetilde{M}^3_{\mathrm{ass,com}}$ *гомеоморфно пространству* $S^1 \times \mathbb{R}^3/(S^1 \times \{0\})$. *Соответствующая параметризация задается следующей таблицей:*

$$e * e = e, \quad e * a = a, \quad e * b = b,$$

$$\begin{aligned}
a * a &= (2 + YU + X(-2W - U))a + (-Y(U + W) - X(U + W))b \\
&\quad + (-1 + YW + X(3W + 2U))e, \\
a * b &= (1 + Y(W + V) + X(W + V))a + (1 + Y(U + W) \\
&\quad - X(U + W))b + (-1 - Y(2W + V + U) + X(U - V))e, \\
b * b &= (-Y(W + V) + X(W + V))a + (2 + YV + X(2W + V))b \\
&\quad + (-1 + YW - X(3W + 2V))e,
\end{aligned}$$

где $(X : Y; U, V, W) \in \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}^3 \cong S^1 \times \mathbb{R}^3$.

Доказательство этой леммы громоздко и носит технический характер.

Предложение 7.43. *В точках многообразия* $\widetilde{M}^3_{\mathrm{ass,com}}$, *соответствующих групповым алгебрам многозначных групп, параметр* Y *не равен нулю.*

Доказательство. Пусть $Y = 0$. Тогда имеем

$$a * a = (2 + X(-2W - U))a + (-X(U + W))b + (-1 + X(3W + 2U))e,$$

$$a * b = (1 + X(W + V))a + (1 - X(U + W))b + (-1 + X(U - V))e,$$

$$b * b = X(W + V)a + (2 + X(2W + V))b + (-1 - X(3W + 2V))e.$$

Коэффициенты c^a_{bb} c^a_{ab} должны быть неотрицательными и не превосходить единицу:

$$X(W + V) \geq 0, \quad 1 + X(W + V) \leq 1.$$

Тогда $X(W + V) = 0$ и $c^a_{ab} = 1$. Значит, $c^a_{ab} = 0$, т.е. $X(U + W) = 1$. Из последнего равенства вытекает отрицательность коэффициента $c^b_{aa} = -X(U + W)$. $\square$

Таким образом, при изучении многозначных групп можно полагать, что $Y = 1$.

Предложение 7.44. *В точках многообразия $\widetilde{M}^3_{\mathrm{ass,com}}$, соответствующих групповым алгебрам многозначных групп, при выполнении равенства $Y = 1$ параметр X не равен ± 1.*

Доказательство. Пусть $Y = 1$ и $X = 1$. Тогда имеем

$$a * b = (1 + 2W + 2V)a + b + (-1 - 2W - 2V)e,$$

откуда вытекает, что

$$c^e_{ab} = -1 - 2W - 2V = 0.$$

Но в таком случае

$$c^e_{bb} = (-1 - 2W - 2V) = 0,$$

т.е. элемент b не имеет обратного, что невозможно. Аналогично доказывается невозможность равенства $X = -1$. □

Предложение 7.45. *В точках многообразия $\widetilde{M}^3_{\mathrm{ass,com}}$, соответствующих групповым алгебрам многозначных групп, значения параметров X, U, V, W – рациональные числа.*

Доказательство. В случае $Y = 1$ формулы леммы 7.42 имеют вид

$$\begin{aligned} a * a &= (2 + U + X(-2W - U))a + (-U - W - X(U + W))b \\ &\qquad + (-1 + W + X(3W + 2U))e, \\ a * b &= (1 + W + V + X(W + V))a + (1 + U + W - X(U + W))b \\ &\qquad + (-1 - 2W - V - U + X(U - V))e, \\ b * b &= (-W - V + X(W + V))a + (2 + V + X(2W + V))b \\ &\qquad + (-1 + W - X(3W + 2V))e. \end{aligned}$$

Тогда, пользуясь рациональностью структурных констант у групповых алгебр многозначных групп, из равенства

$$c^a_{ab} + c^b_{ab} - c^a_{aa} - c^b_{bb} = 2(W - 1)$$

получаем, что W рационально. Аналогично из равенств

$$c^a_{aa} + c^b_{bb} - c^b_{aa} - c^a_{bb} = 4 + 2U + 2V + 2W,$$

$$c^a_{ab} - c^b_{ab} + c^b_{aa} - c^a_{bb} = 2V - 2U$$

вытекает рациональность U и V.

Рассмотрим теперь параметр X. Если коэффициенты при X в выражениях для структурных констант алгебры ($-2W - U$, $U + W$, $3W + 2U$, ...) не все равны нулю, то X рационально. Все коэффициенты равны нулю только при $U = W = V = 0$. Но в этом случае некоторые структурные константы будут отрицательными. □

7.3. Q-однородные многозначные группы

Пусть $\mathcal{L}$ – трёхмерное линейное пространство с выделенным базисом e, a, b. Рассмотрим линейное преобразование

$$Q\colon L \to L\colon \quad Q(e) = e, \quad Q(a) = b, \quad Q(b) = a.$$

Это преобразование индуцирует естественный гомеоморфизм многообразия $\widetilde{M}^3_{\mathrm{ass,com}}$ на себя, который мы будем также обозначать через Q. Используя параметризацию леммы 7.42, действие гомеоморфизма Q можно описать формулой

$$(X : Y; U, V, W) \xrightarrow{Q} (-X : Y; V, U, W). \tag{22}$$

Назовём многозначную группу M порядка три Q-*однородной*, если её групповая алгебра $\mathbb{C}(M)$ неподвижна относительно преобразования Q.

Лемма 7.46. *Q-однородные группы являются самодвойственными: $M^* = M$.*

Доказательство. Рассмотрим собственную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p_{22} & p_{23} \\ 1 & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Перестановка элементов a и b (в других обозначениях – перенумерация её неединичных элементов x_2 и x_3) приводит к перестановке второго и третьего столбцов матрицы P. Из условий Q-однородности многозначной группы с одной стороны и невырожденности матрицы P с другой вытекает, что $p_{22} = p_{33}$ и $p_{23} = p_{32}$. Но в таком случае $P^t = P$ и, следовательно, $M^* = M$. □

В частности, инволютивные группы с нетривиальной инволюцией

$$a^* = b, \quad b^* = a$$

являются Q-однородными, а следовательно, и самодвойственными.

Пример 7.47. Групповая алгебра Q-однородной многозначной группы с тривиальной инволюцией ($a^* = a$, $b^* = b$):

$$a * a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}e, \quad a * b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \quad b * b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}e.$$

Отметим, что список самодвойственных многозначных групп не исчерпывается Q-однородными группами. Действительно, в обозначениях доказательства леммы 7.46 для самодвойственности достаточно выполнения только одного из равенств $p_{22} = p_{33}$ и $p_{23} = p_{32}$, а не их обоих одновременно.

7.4. Общие формулы двойственности для групп порядка три

Пусть $\mathrm{A}(P) \cong \mathbb{C}(M)$ – групповая алгебра многозначной группы M порядка три. Выразим матричные элементы матриц M_a и M_b, задающих действие элементов a и b выделенного базиса алгебры $\mathrm{A}(P)$ в регулярном представлении, через параметры X, $Y = 1$, U, V, W и выпишем их характеристические уравнения:

$$\det(M_a - \lambda E) = (1-\lambda)\,p_a, \quad \det(M_b - \lambda E) = (1-\lambda)\,p_b,$$

где p_a и p_b – квадратичные выражения. Дискриминанты p_a и p_b оказываются равными

$$(X-1)^2(-3\,W^2 - 4\,U\,W - 4\,V\,W - 4\,V\,U)$$

и

$$(X+1)^2(-3\,W^2 - 4\,U\,W - 4\,V\,W - 4\,V\,U).$$

Пусть

$$r = \sqrt{-3\,W^2 - 4\,U\,W - 4\,V\,W - 4\,V\,U},$$

откуда вытекает, что

$$V = -\frac{4\,U\,W + 3\,W^2 + r^2}{4(U+W)}. \tag{23}$$

Отметим, что при равенстве r нулю у собственной матрицы P оказывается, что $p_{22} = p_{23}$ и $p_{32} = p_{33}$, т.е. матрица P – вырожденная. Поэтому для точек многообразия $\widetilde{M}^3_{\mathrm{ass,com}}$, соответствующих групповым алгебрам многозначных групп, $r \neq 0$.

Существуют примеры многозначных групп порядка три, у которых $U + W = 0$, а потому выражение (23) для параметра V у некоторых групп не имеет смысла. К таким группам следует применить Q-преобразование. Для преобразованных групп выражение, аналогичное формуле (23), будет осмысленным, поскольку, как несложно убедиться, рассмотрев коэффициент c^e_{ab}, для многозначной группы не могут одновременно выполняться равенства $U + W = 0$ и $V + W = 0$.

Равенство (23) позволяет через параметры X, U, V, W и r выразить матричные элементы p_{22}, p_{23}, p_{32}, p_{33} матрицы P, а затем и структурные константы алгебры $\mathrm{A}^*(P)$. Таким образом, удаётся установить связь между параметрами алгебры $\mathrm{A}(P)$ и параметрами алгебры $\mathrm{A}^*(P)$ (последняя может быть групповой алгеброй многозначной группы или не быть таковой). Правда, получающиеся формулы двойственности

$$(X:1;U,V,W)\xrightarrow{*}(X^*:1;U^*,V^*,W^*)$$

не удается записать в какой-либо естественной форме. Ниже эти формулы приведены в относительно компактном виде, но при этом, к сожалению, присутствующая в них симметрия оказывается скрытой:

$$\begin{aligned}
X^* &= \frac{1}{r}\,(U - V - X\,U - X\,V - 3\,X\,W)\,,\\
U^* &= -\frac{1}{3\,X\,W - 2\,U + 2\,X\,U + r\,X + r - W}\\
&\quad\times\bigl(5\,U\,X\,W + r\,X\,U - U\,W - r\,U + 6\,X\,W^2 + 2\,r\,X\,W\\
&\quad + 2\,X\,V\,W + 2\,X\,V\,U + 2\,V\,W + 2\,V\,U\bigr),\\
V^* &= -\frac{1}{-3\,X\,W + 2\,U - 2\,X\,U + r\,X + r + W}\\
&\quad\times\bigl(-5\,U\,X\,W + r\,X\,U + U\,W - r\,U - 6\,X\,W^2\\
&\quad + 2\,r\,X\,W - 2\,X\,V\,W - 2\,X\,V\,U - 2\,V\,W - 2\,V\,U\bigr),\\
W^* &= W.
\end{aligned}$$

Громоздкие знаменатели в выражениях для U^* и V^* являются множителями в выражении для определителя собственной матрицы P, а потому у многозначных групп они отличны от нуля.

Отметим, что на самом деле конструкция двойственности для групп порядка три устанавливает связь лишь между *парами алгебр* $\mathrm{A}(P)$, $Q(\mathrm{A}(P))$ и $\mathrm{A}^*(P)$, $Q(\mathrm{A}^*(P))$, отличающихся нумерацией неединичных элементов выделенного базиса, см. замечание 5.37.

Литература

1. Э. Баннаи, Т. Ито, *Алгебраическая комбинаторика. Схемы и отношения.* Мир, М., 1987.
2. H. I. Blau, *Table algebras.* — European J. Combin. **30** (2009), 1426–1455.

3. В. М. Бухштабер, *Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы.* — Успехи мат. наук **45** (1990), No. 3, 185–186.
4. В. М. Бухштабер, А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *Комбинаторные алгебры и многозначные группы.* — Функц. анал. и его прил. **30** (1996), No. 3, 12–18.
5. В. М. Бухштабер, Е. Г. Рисс, *Многозначные группы и n-алгебры Хопфа.* — Успехи мат наук **51** (1996), No. 4, 149–150.
6. V. M Buchstaber, E. G. Rees, *Multivalued groups, their representations and Hopf algebras.* — Transform. Groups **2** (1997), No. 4, 325–349.
7. V. M Buchstaber, E. G. Rees, *Multivalued groups, n-Hopf algebras and n-ring homomorphisms.* In: Lie groups and Lie Algebras, Kluwer Acad. Publ. (1998), pp. 85–107.
8. V. M. Buchshtaber, A. P. Veselov, *Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups.* — Internat. Math. Res. Notices **8** (1996), 381–400.
9. V. M Buchstaber, M. I. Monastyrsky, *Generalized Kramers–Wannier duality for spin systems with noncommutative symmetry.* — J. Phys. A, **36** (2003), No. 28, 7679–7692.
10. V. M Buchstaber, *n-Valued groups: theory and applications.* — Moscow Math. J. **6** (2006), No. 1, 57–84.
11. В. М. Бухштабер, А. А. Гайфуллин, *Представления m-значных групп на триангуляциях многообразий.* — Успехи мат. наук **61** (2006), No. 3, 171–172.
12. А. М Вершик, *Двойственность Крейна, позитивные* 2*-алгебры и дилатация коумножений.* — Функц. анал. и его прил. **41** (2007), No. 2, 24–43.
13. В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе.* НИЦ РХД, Ижевск, 2010.
14. V. Dragovic, *Multi-valued hyperelliptic continued fractions of generalized Halphen type.* — Internat. Math. Res. Notices (2009), No. 10, 1891–1932.
15. V. Dragovic, *Geometrization and Generalization of the Kowalevski top.* — Comm. Math. Phys. (2010), `arXiv:0912.3027`.
16. V. Dragovic, *Marden theorem and Poncelet–Darboux curves*, `arXiv:0812.4829v1`.
17. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *Permutation group approach to association schemes.* — European J. Combin. **30** (2009), 1456–1446.
18. G. Mazzola, *The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five.* — Manuscripta Math. **27** (1979), 81–101.
19. П. В. Ягодовский, *Деформации многозначных групп.* — Успехи мат. наук **52** (1997), No. 3, 179–180.
20. П. В. Ягодовский, *Однородные деформации дискретных групп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 330–335.
21. П. В. Ягодовский, *Линейная деформация дискретных групп и конструкции многозначных групп.* — Изв. РАН, сер. мат. **64** (2000), No. 5, 197–224.
22. П. В. Ягодовский, *Представления многозначных групп на графах.* — Успехи мат. наук **57** (2002), No. 1, 143–144.
23. П. В. Ягодовский, *Бикосетные группы и симметрические графы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **292** (2002), 161–174.

24. П. В. Ягодовский, *σ-Расширения многозначных групп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **325** (2005), 225–242.
25. А. А Гайфуллин, П. В. Ягодовский, *Об интегрируемости m-значных динамик при помощи однопорождённых m-значных групп.* — Успехи мат. наук **62** (2007), No. 1, 201–202.
26. П. В. Ягодовский, *Двойственные многозначные группы.* — Успехи мат. наук **64** (2009), No. 5, 183–184.

Yagodovsky P. V. Duality in the theory of finite commutative multivalued groups.

The purpose of this paper is to construct a duality theory for finite commutative multivalued groups and to demonstrate its connection with the classical duality in the theory of ordinary groups and the Kawada–Delsarte duality in algebraic combinatorics. We study in detail the case of multivalued groups of order three, construct a parameterization of the set of these groups, and obtain explicit formulas for the duality. In future, we plan to use this duality in the study of the coset problem.

Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации,
Ленинградский пр., д. 49,
125993 Москва, Россия

E-mail: korczak@list.ru

Поступило 20 июля 2010 г.