Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 378, 2010 г.

А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов

АСИМПТОТИКА МАСШТАБИРОВАННОЙ ЭНТРОПИИ АВТОМОРФИЗМА ПАСКАЛЯ

Введение

Автоморфизм Паскаля, введенный в работе [2], является примером адического преобразования (нестационарного) марковского компакта путей в графе Паскаля. Напомним определение адического сдвига (см. [2, 3]).

Пусть Y_n – конечные множества ("множества вершин n-го уровня"), $Y = \prod_{n=0}^{\infty} Y_n$ – пространство последовательностей $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$, $y_n \in Y_n$. Рассмотрим граф Γ, множеством вершин которого служит объединение всех Y_n, а каждое из ребер соединяет некоторые вершины соседних уровней (такие графы Γ называют также диаграммами Браттели [7]).

С помощью графа Γ выделяется подмножество Y_Γ последовательностей $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих следующему условию: каждая пара (y_n, y_{n+1}), $n = 0, 1, 2, \ldots$, состоит из концов какого-то ребра. Это множество Y_Γ называется пространством путей графа Γ.

Если множества Y_n линейно упорядочены, то на Y_Γ возникает лексикографический порядок (сравнимыми оказываются пути, совпадающие начиная с некоторого места). *Адическое преобразование* пространства Y_Γ определяется как преобразование следования относительного этого линейного порядка. При этом преобразование и обратное к нему определены на множестве путей, на которых порядок изоморфен естественному порядку на $\mathbb{Z}$. Пространство Y_Γ, снабженное слабой топологией, является компактным пространством (марковским компактом).

Можно рассматривать и другие отношения порядка на классах попарно сравнимых путей, см. [10]. В случае графа Паскаля Y_n есть множество $\{0, \ldots, n\}$ с естественным порядком, а путь в графе Па-

Ключевые слова: автоморфизм Паскаля, масштабирующая последовательность, энтропия.

скаля – это произвольная последовательность $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию, что $y_{n+1} - y_n$ равняется нулю или единице (*допустимая последовательность*). Автоморфизм Паскаля определяется так. Образ произвольной точки y из множества Y_Γ (скажем, $y = (0,1,2,2,2,2,3,4,\dots))$ есть точка $\widetilde{y}$ из этого множества, которая является следующей относительно лексикографического порядка "слева направо" допустимой последовательностью; в нашем случае $\widetilde{y} = (0,0,0,1,2,3,3,4,\dots)$.

Удобнее перейти к другим координатам $x_n = 1 - y_{n+1} + y_n$, $n = 0,1,2,\dots$. При этом множеству Y_Γ будет соответствовать множество всех двоичных последовательностей $X = \prod\limits_0^\infty \{0,1\}$. Тогда в приведенном выше примере речь идет о точке $x = (0,0,1,1,1,0,0,\dots)$ и ее образе $Tx = \widetilde{x} = (1,1,0,0,0,1,0,\dots)$.

В этом новом представлении автоморфизм Паскаля задается формулой
$$T(0^n 1^m 10\dots) = 1^m 0^n 01\dots$$
(мы опускаем запятые между элементами последовательностей, если это не приводит к недоразумению).

Из теоремы де Финетти и того факта, что орбиты автоморфизма Паскаля совпадают с орбитой группы S_∞ финитных подстановок, следует, что для автоморфизма Паскаля множество инвариантных мер исчерпывается бернуллиевскими мерами, см. [12].

Автоморфизм Паскаля и обратный к нему корректно определены для всех последовательностей с бесконечным числом нулей и единиц.

Цель настоящей заметки состоит в оценке энтропийного роста автоморфизма Паскаля.

А. М. Вершиком в статье [4] предложен новый подход к энтропийной теории, позволяющий, в частности, различать автоморфизмы с нулевой энтропией по Колмогорову–Синаю. А именно, в [5] введено понятие роста масштабированной энтропии. Применение определения масштабированной энтропии к последовательности усредненных (полу)метрик $\overline{\rho}_N(x,y) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\rho(T^i x, T^i y)$ позволяет характеризовать автоморфизмы с дискретным спектром [14] как такие автоморфизмы, для которых масштабирующая последовательность ограничена. Оценка роста энтропии усредненных (полу)метрик пока отсутствует, и вопрос о дискретности или недискретности спектра автоморфизма Паскаля остается открытым.

Однако в настоящей работе дается оценка роста энтропии автоморфизма Паскаля для последовательности sup-полуметрик $\widetilde{\rho}_T^N = \sup\limits_{i\in\{0,\dots,N-1\}} \rho_{T^i}$.

Методика получения нашей оценки, возможно, применима и к случаю последовательности усредненных метрик.

Авторы выражают свою признательность А. М. Вершику за стимулирующие обсуждения.

§1. Основные определения и формулировка основного результата

Автоморфизм Паскаля определяется формулой

$$T : X \setminus X' \to X, \quad T(0^n 1^m 10\dots) = 1^m 0^n 01\dots, \quad n \geq 0, \quad m > 0;$$

здесь $X = \prod\limits_1^\infty \{0,1\}$ и через X' мы обозначаем множество $\{x \in X : \exists j \in \mathbb{N} :\ x_i = \text{const при } i \geq j\}$.

Через μ_p мы будем обозначать бернуллиевскую меру на X с множителями $(p, 1-p)$.

Очевидно, что $\mu_p X' = 0$. На множестве $\widetilde{X} = X \setminus X'$ степень T^n автоморфизма T определена для любого n.

Для двоичного слова $\omega \in \prod\limits_{i=1}^n \{0,1\}$ определим символом $[\omega] = [\omega_1, \dots, \omega_n]$ соответствующий ему цилиндр $\{x \in X : x_1 \dots x_n = \omega_1 \dots \omega_n\}$.

Утверждение. *Разбиение* $\alpha = \{[0],[1]\}$ *пространства* $\widetilde{X}$ *является образующим для автоморфизма Паскаля.*

Доказательство этого утверждения не вызывает затруднений, см., например, [9].

Определение масштабирующей последовательности для sup-**метрики** [14].

ε-Энтропией пространства X с мерой μ и полуметрикой ρ называется величина $H(\rho,\mu,\varepsilon) = \inf\limits_{\nu}\{H(\nu) : k_\rho(\mu,\nu) < \varepsilon\}$, где ν – дискретная мера, H – энтропия дискретной меры, а $k_\rho(\mu_1,\mu_2) = \inf\limits_{\Psi} \iint\limits_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}} \rho(x,y)\, d\Psi(x,y)$ – расстояние Канторовича–Рубинштейна между мерами μ_1 и μ_2.

Sup-*полуметрики* задаются формулой

$$\widetilde{\rho}_T^{\,N}(x,y)=\sup_{0\le i\le N-1}\rho(T^i x,T^i y).$$

Масштабирующей последовательностью называется такая вещественная последовательность $c_N=c_N(\rho,T)$, что

$$0<\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_N\frac{H(\widetilde{\rho}_T^N,\mu,\varepsilon)}{c_N}\le\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_N\frac{H(\widetilde{\rho}_T^N,\mu,\varepsilon)}{c_N}<\infty.$$

Это частный вид общего определения, данного в [14].

Для полуметрики ρ на пространстве $\widetilde{X}$, согласованной с разбиением $\alpha=\{[0],[1]\}$, и автоморфизма Паскаля T выполнено неравенство (см. лемму 1)

$$c_N\ge\ln\widetilde{K}(N,\varepsilon),$$

где $\widetilde{K}(N,\varepsilon)$ – мощность минимальной ε-сети (полу)метрики, определяемой по супремум-разбиению $\alpha^N=\vee_{i=0}^{N-1}T^{-i}(\alpha)$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть α – разбиение пространства $\widetilde{X}$ на два цилиндра $[0]$ и $[1]$, $\alpha^N=\vee_{i=0}^{N-1}T^{-i}(\alpha)$. Тогда существуют такие $N_0\in\mathbb{N}$, $\varepsilon_0>0$, множества U_N, $N\in\mathbb{N}$, и константа $c>0$, что*

(1) *множества U_N измеримы относительно α^N;*

(2) *$\mu_p(U_N)>c>0$ для любого $N>N_0$;*

(3) *для масштабирующей последовательности справедлива оценка*

$$c_N\ge\ln\widetilde{K}(N,\varepsilon)\ge\ln(N),\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0,\quad N>N_0.$$

Здесь $\widetilde{K}(N,\varepsilon)$ – мощность минимальной ε-сети множества U_N в смысле полуметрики, определяемой по разбиению α^N.

§2. Схема доказательства теоремы 1

Определение. *Будем называть α^N-именем точки $x\in\widetilde{X}$ последовательность длины N (где $N\in\mathbb{N}$), устроенную следующим образом:*

$$\alpha^N(x)=(\alpha_0(x),\dots,\alpha_{N-1}(x)),\quad\text{где}\quad\alpha_i(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ T^i(x)\in[0],\\ 1, & \text{если}\ \ T^i(x)\in[1].\end{cases}$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что множество α^N-имен совпадает с фактор-пространством $\widetilde{X}/\alpha^N$, причем соответствие $x \mapsto \alpha^N(x)$ есть отображение факторизации:

$$\pi_N : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/\alpha^N.$$

Пусть V – некоторое множество α^N-имен. Мы будем использовать обозначение $(\pi_N)^{-1}(V)$ для множества $\{x \in \widetilde{X} : \alpha^N(x) \in V\}$.

Обозначим через ρ полуметрику, согласованную с разбиением α в следующем смысле: $\rho(x,y) = 1 - \delta_{\alpha(x),\alpha(y)}$, где $\alpha(x)$ – элемент разбиения α, который содержит x.

Определим полуметрику ρ_{T^i} на $\widetilde{X}$ по формуле $\rho_{T^i}(x,y) = \rho(T^i x, T^i y)$. Нам важны следующие две последовательности полуметрик, ассоциированные с полуметрикой ρ и автоморфизмом T:

$$\widetilde{\rho}_T^N = \sup_{i\in\{0,\dots,N-1\}} \rho_{T^i} \quad \text{и} \quad \overline{\rho}_T^N = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \rho_{T^i}.$$

Введем на фактор-пространстве $\widetilde{X}/\alpha^N$ две метрики:

$$\widetilde{d}_N(\beta,\gamma) = \widetilde{\rho}_T^N(x,y), \quad \overline{d}_N(\beta,\gamma) = \overline{\rho}_T^N(x,y),$$

где $x \in (\pi_N)^{-1}(\beta)$, $y \in (\pi_N)^{-1}(\gamma)$. Легко видеть, что эти метрики определены корректно. Таким образом, мы ввели аналоги полуметрик $\widetilde{\rho}_T^N$ и $\overline{\rho}_T^N$ на α^N-именах.

Ясно, что $\widetilde{d}_N(\alpha^N(x),\alpha^N(y)) = 0$, если $\alpha_i^N(x) = \alpha_i^N(y)$, $0 \le i < N$, в противном случае $\widetilde{d}_N(\alpha^N(x),\alpha^N(y)) = 1$, а также что

$$\overline{d}_N(\alpha^N(x),\alpha^N(y)) = \frac{1}{N}\#\{i :\ 0 \le i < N \ \text{ и } \ \alpha_i^N(x) \ne \alpha_i^N(y)\}.$$

Индекс N в обозначении метрик $\overline{d}$, $\widetilde{d}$ мы будем опускать, если ясно, какова длина α^N-имен.

Определение [8]. *Пусть $B_d(x,N,\varepsilon) \subset \widetilde{X}$ – прообраз шара $\{\alpha : d(\alpha,\alpha^N(x)) < \varepsilon\} \subset \widetilde{X}/\alpha^N$ с центром в точке $\alpha^N(x)$, то есть*

$$B_d(x,N,\varepsilon) = \{y \in X : d(\alpha^N(x),\alpha^N(y)) < \varepsilon\},$$

где $x \in X$, $d = \overline{d}$ *или* $d = \widetilde{d}$. *Символом* $\widetilde{K}(N, \varepsilon)$ *(соответственно* $\overline{K}(N, \varepsilon)$*) обозначим наименьшее такое* K, *что найдется подмножество* $\widetilde{X}$ *меры* $1 - \varepsilon$, *покрытое не более чем* K *множествами* $B_{\widetilde{d}}(x, N, \varepsilon)$ *(соответственно* $B_{\overline{d}}(x, N, \varepsilon)$*).*

Замечание 2. Обсуждение полуметрики $\overline{\rho}_T^N$ и соответствующей ей метрики $\overline{d}_N$ мы оставляем до последнего параграфа.

Лемма 1. *Для полуметрики* ρ *на пространстве* $\widetilde{X}$, *согласованной с разбиением* $\alpha = \{[0], [1]\}$, *и автоморфизма Паскаля* T *выполняется оценка*

$$c_N \geq \ln \widetilde{K}(N, \varepsilon),$$

где c_N *— масштабирующая последовательность из определения в* §1.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 из статьи [14].

Доказательство основного результата можно свести к комбинаторному рассуждению следующим образом. Пусть V_N – такое множество α^N-имен, что

(1) $\mu_p((\pi_N)^{-1}(V_N)) > c > 0$,

(2) $|V_N| \geq 2\frac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}}N$, где $|V_N|$ – мощность множества V_N.

Положим цилиндрическое множество U_N равным $(\pi_N)^{-1}(V_N)$. Тогда

$$\widetilde{K}(N, \varepsilon) \geq 2\frac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}}N.$$

В параграфе 5 будет построено множество V_N с требуемыми свойствами, что и завершит доказательство основной теоремы.

§3. Структура пространства α-имен

В этом и следующем разделе мы исследуем пространство α^N-имен.

Определим оснащенный граф Паскаля. Он представляет собой граф Паскаля, вершинам которого приписываются слова B_m^j, называемые *основными блоками* и определяемые индуктивно следующим образом:

- вершина нулевого уровня есть пустое слово B_0^0;
- вершины первого уровня суть $B_1^0 = 0$ и $B_1^1 = 1$; они соединены ребрами с B_0^0;

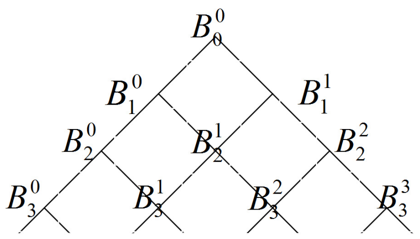

Рис. 1.

- $B_m^j = B_{m-1}^{j-1} \vee B_{m-1}^j$, $m \geq 1$, $0 < j < m$; $B_m^0 = B_{m-1}^0$, $B_m^m = B_{m-1}^{m-1}$, где $\vee$ обозначает конкатенацию.

Замечание 3. Если рассмотреть аппроксимацию автоморфизма Паскаля башнями Рохлина, связанными с разбиениями α^N, то несложно видеть (см. рис. 2), что B_m^j является словом, составленным из первых координат путей, ведущих в вершину (m, j), записанных в лексикографическом порядке.

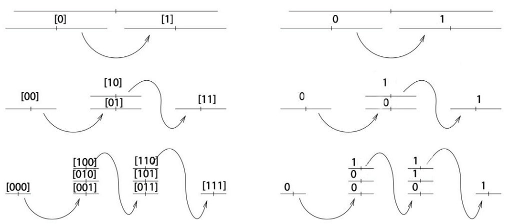

Рис. 2.

Обозначим через L множество всех таких конечных слов W, что W содержится как подслово в B_m^j для некоторых $m > 0$ и $j \in \{0, \dots, m\}$. Пусть $\Pi \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ – пространство всех таких двусторонних последовательностей, что все их (конечные) подслова лежат в L. На Π определена топология, задаваемая цилиндрами: $[w_1, \dots, w_m]_\Pi = \{v \in \Pi : v_1 = w_1, \dots, v_m = w_m\}$. Левосторонний сдвиг на этом пространстве обозначим через $\widetilde{T}$.

Определение. *Будем говорить, что слово W содержится как подслово в слове B, если $B = UWV$, где U и V – некоторые слова.*

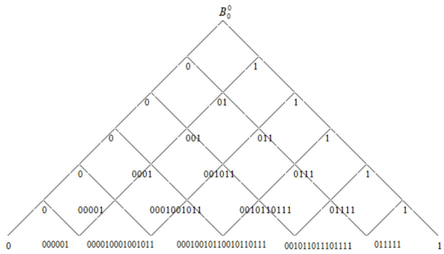

Рис. 3.

Рассмотрим отображение $S : X \to \Pi$, задаваемое формулой

$$S(x) = (\dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots),$$

где

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (T^i x)_0 = 0, \\ 1, & \text{если} \quad (T^i x)_0 = 1. \end{cases}$$

Утверждение.

1. *Отображение S задает метрический изоморфизм* $\mod 0$ *динамических систем (X, T, μ_p) и $(\Pi, \widetilde{T}, \nu)$, где $\nu = \mu_p \circ S^{-1}$.*

2. *Пусть $w = (w_0, \dots, w_{N-1})$ — подслово базового блока B_n^j. Тогда цилиндрическое множество $S^{-1}[w_0, \dots, w_{N-1}]_\Pi$ является элементом супремум-разбиения α^N, соответствующим α^N-имени $(w_0, \dots, w_{N-1})$.*

Доказательство.

1. См. [11, теорема 4.1].
2. Следует из определения α^N-имени. □

§4. Комбинаторика пространства α-имен

Лемма 2. *Любой основной блок B_m^j, $1 < j < m - 1$, можно получить по следующему алгоритму (положим $k = m - j$):*

$$\overbrace{0^k}^{\beta_k^0}\overbrace{1}^{\beta_0^0} \vee$$

$$\overbrace{0^{k-1}1}^{\beta_{k-1}^1}\overbrace{0^{k-2}1}^{\beta_{k-2}^1}\ldots\overbrace{0^{k-s}1}^{\beta_{k-s}^1}\ldots\overbrace{01}^{\beta_1^1}\overbrace{1}^{\beta_0^1} \vee$$

$$\overbrace{0^{k-1}10^{k-2}1\ldots011}^{\beta_{k-1}^2}\overbrace{0^{k-2}1\ldots011}^{\beta_{k-2}^2}\ldots\overbrace{0^{k-s}10^{k-s-1}1\ldots011}^{\beta_{k-s}^2}\ldots\overbrace{011}^{\beta_1^2}\overbrace{1}^{\beta_0^2} \vee$$

$$\vdots$$

$$\overbrace{0^{k-1}\ldots\ldots1}^{\beta_{k-1}^{j-1}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\overbrace{0^{k-s}\ldots\ldots\ldots\ldots1}^{\beta_{k-s}^{j-1}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\overbrace{1}^{\beta_0^{j-1}}.$$

Фигурирующие здесь блоки β_t^i удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\beta_l^i = \beta_l^{i-1}\beta_{l-1}^{i-1}\ldots\beta_0^{i-1}, \quad \text{где} \quad 2 \le i < j-1, \quad 0 \le l \le k,$$

при начальных значениях

$$\beta_k^0 = 0^k 1, \quad \beta_t^1 = 0^t 1, \quad \beta_0^0 = 1, \quad k-1 \ge t \ge 1.$$

Доказательство можно провести по индукции аналогично доказательству известной формулы

$$C_n^k = \sum_{m=1}^{n-k+1} C_{n-m}^{k-1}. \qquad \square$$

Замечание 4. Несложно видеть, что в записи блока B_m^j подслово $\beta_{m-j-1}^{j-1} \vee \cdots \vee \beta_0^{j-1}$ совпадает с началом, равным $\beta_{m-j}^0 \vee \beta_{m-j}^1 \vee \cdots \vee \beta_0^1 \vee \cdots \vee \beta_{m-j}^s \vee \cdots \vee \beta_0^s \vee \cdots \vee \beta_{m-j}^{j-1} \vee \cdots \vee \beta_0^{j-1}$, в записи блока B_m^{j+1}.

Теорема 2. *Пусть W – слово длины N. Тогда существует основной блок B_{N+2}^j, $j \in \{0,\ldots,N+2\}$, который его содержит.*

Доказательство. Пусть существует такое слово W, что $|W| = N$, W не содержится ни в каком блоке B_{N+2}^s, $s \in \{0,\ldots,N+2\}$, но содержится в некотором блоке B_{N+3}^j, $j \in \{0,\ldots,N+3\}$. В силу симметрии можно считать, что $j < [\frac{N+3}{2}] + 1$.

Пусть $j \geq 2$, $k = N + 3 - j$. Через $[0]\beta_1^{j-2}$ обозначим такое слово, что $0 \vee [0]\beta_1^{j-2} = \beta_1^{j-2}$. Так как $|\beta_1^{j-2} \vee \beta_0^{j-2}| + |\beta_{k-1}^{j-1}| = N+3$, возможны два случая:

(1) $W = S([0]\beta_1^{j-2} \vee \beta_0^{j-2}) P(\beta_{k-1}^{j-1} \dots \beta_0^{j-1})$,

(2) $W = S(\beta_k^0 \vee \dots \vee \beta_0^{j-2}) P(\beta_{k-1}^{j-1})$,

где через S и P обозначены некоторые суффикс и префикс соответствующих слов.

В первом случае W лежит в слове $\beta_{k-1}^{j-2} \vee \dots \vee \beta_0^{j-2} \vee \beta_{k-1}^{j-1} \vee \dots \vee \beta_0^{j-1}$, которое содержится в B_{N+2}^j по лемме 2.

Во втором случае, если $j \geq 3$, то W лежит в слове $\beta_{k-1}^{j-3} \vee \dots \vee \beta_0^{j-3} \vee \beta_{k-1}^{j-2} \vee \dots \vee \beta_0^{j-2}$, которое содержится в B_{N+2}^{j-1}. Если $j = 2$, то $W \in 0^{N+1}1$, то есть W содержится в слове B_{N+2}^1.

Случаи $j = 1$ и $j = 0$ очевидны. □

§5. Построение множества V_N

Не умаляя общности, можно считать, что степени преобразования пробегают некоторую подпоследовательность натурального ряда. Мы будем рассматривать числа N вида $N = C_n^{\frac{n}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathcal{C}_j$ алгебру цилиндров пространства $\widetilde{X}$, отвечающих фиксированию первых j координат. Ясно, что $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \dots \subset \mathcal{C}_n \dots$.

Мы построим такие множества V_n^s, что $(\pi_N)^{-1}(V_n^s)$ имеет положительную меру μ_p и $(\pi_N)^{-1}(\alpha) \in \mathcal{C}_{n+s} \setminus \mathcal{C}_{n+s-1}$ для любого $\alpha \in V_n^s$. В качестве V_N мы возьмем V_n^2.

Рассмотрим множество "новых" α^N-имен, появляющихся на уровне $n+s$, то есть таких, что $(\pi_N)^{-1}(\alpha^N) \in \mathcal{C}_{n+s} \setminus \mathcal{C}_{n+s-1}$. Среди этих α^N-имен рассмотрим имена, удовлетворяющие следующему условию:

$$\begin{aligned} \alpha^N(x) &= (\alpha_0(x), \dots, \alpha_N(x)) \\ &= \dots 1 \overbrace{0 \dots 0}^{l} \overbrace{1 \dots 1}^{k} 0 \dots, \text{ причем } k + l = n + s - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначим множество таких α^N-имен через V_n^s.

Лемма 3.

1. *Пусть* $W \in V_n^s$. *Тогда существует единственное такое* $j \in \{1, \ldots, n+s\}$, *что* W *содержится как подслово в основном блоке* B_{n+s}^j.

2. *Пусть* $W \in V_n^s$ *и* W *содержится как подслово в основном блоке* B_{n+s}^j. *Тогда* W *встречается в основном блоке* B_{n+s}^j *один раз (то есть только одно подслово длины* N *в* B_{n+s}^j *совпадает с* W*).*

3. *Пусть* $W \in V_n^s$, $W \in B_{n+s}^j$. *Тогда*

- W *входит в* B_{n+s}^j *один раз;*
- W *входит в* B_{n+s+1}^j *один раз,* W *входит в* B_{n+s+1}^{j+1} *один раз;*
- W *входит в* B_{n+s+2}^j *один раз,* W *входит в* B_{n+s+2}^{j+1} *два раза,* W *входит в* B_{n+s+2}^{j+2} *один раз.*

Доказательство. 1. Фиксируем k и l, $k + l = n + s - 1$. По лемме 2 из §4 существует единственное такое $j \in \{1, \ldots, n+s-1\}$, что в B_{n+s}^j подслово $\beta_1^{j-2} \vee \beta_0^{j-2} \vee \beta_{n+s-j-1}^{j-1}$ совпадает со словом $10^l 1^k 0$.

Из того, что $(\pi_N)^{-1}(W) \in \mathcal{C}_{n+s} \setminus \mathcal{C}_{n+s-1}$, следует, что не существует такого $j \in \{1, \ldots, n + s - 2\}$, что $10^l 1^k 0$ содержится как подслово в B_{n+s-1}^j. Из леммы 3 следует, что всевозможные слова длины N, содержащие слово $10^l 1^k 0$, содержатся в B_{n+s}^j. Следовательно, всевозможные α^N, содержащие слово $10^l 1^k 0$, содержатся в B_{n+s}^j.

2. Так как в B_{n+s}^j подслово $\beta_1^{j-2} \vee \beta_0^{j-2} \vee \beta_{n+s-j-1}^{j-1}$ встречается только один раз, пункт 3 следует из пункта 2.

3. Утверждение очевидно из структуры треугольника Паскаля. □

Следствие. *Число элементов минимальной* ε*-сети множества* V_n^s *(относительно метрики* $\widetilde{d}$*) совпадает с мощностью множества* V_n^s.

Это следует из определения метрики $\widetilde{d}$ и пункта 2 леммы 3.

Замечание 5. Следствие означает, что множество $(\pi_N)^{-1}(V_n^s)$ состоит из одного цилиндра, принадлежащего $\mathcal{C}_{n+s}$.

Лемма 4. *Количество* α^N*-имен в классе* V_n^s, *которое мы обозначим через* $|V_n^s|$, *удовлетворяет неравенству*

$$|V_n^s| \geq 2\frac{\sqrt{(s-1)\ln 2}}{\sqrt{\pi}} 2^n, \quad s \geq 2.$$

Доказательство. Обозначим $n+s$ через m. Пусть

$$k_m = \min\left\{j:\ C_m^j = C_m^{m-j} > N\right\},$$
$$l_m = \min\left\{j:\ C_m^j = C_m^{m-j} > \frac{N}{2}\right\}.$$

Перейдем к новым координатам $j := j - \frac{m}{2}$.

Лемма 5.

$$k = k_t \sim \sqrt{\frac{t}{2}\ln\frac{2^{t+1}}{N\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}},$$
$$l = l_t \sim \sqrt{\frac{t}{2}\ln\frac{2^{t+1}}{\frac{N}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}} \quad \textit{при} \quad t\to\infty.$$

Доказательство. По теореме Муавра–Лапласа аппроксимируем плотность биномиального распределения плотностью нормального распределения на участке $j \in \left\{0,\ldots,\left[\frac{\sqrt{t\ln(t)}}{2}\right]\right\}$

$$\left(\text{так как}\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{t\ln(t)}}{2}\right)^3}{t^2}\to 0\right).$$

Найдем биномиальный коэффициент с наименьшим номером, значение которого не меньше M. Из уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{2x^2}{t}} = \frac{M}{2^t}$$

следует, что

$$x = \sqrt{\frac{t}{2}\ln\frac{2^{t+1}}{M\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}}\ .$$

Придавая M значения N и $\frac{N}{2}$, отсюда получаем, что

$$k = \sqrt{\frac{t}{2}\ln\frac{2^{t+1}}{N\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}},\quad l = \sqrt{\frac{t}{2}\ln\frac{2^{t+1}}{\frac{N}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}}. \qquad \square$$

Возвращаясь к доказательству леммы, заметим, что число слов, удовлетворяющих условию (1), равно

$$\sum_{j=0}^{k_{m-1}}(N-m-1)+2\sum_{j=k_{m-1}+1}^{l_{m-1}}(C_{m+1}^{\frac{m}{2}+j+1}-N+1). \tag{2}$$

Пояснение. В обозначениях леммы 1 из §4 условию (1) удовлетворяют те α^N-имена, которые содержатся в $B^{\tau}_{m-1}\vee B^{\tau+1}_{m-1}$, $0\le\tau\le k_{m-1}$, и содержат подслова

$$0\vee\beta_1^{\tau-1}(B^{\tau}_{m-1})\vee\beta_0^{\tau-1}(B^{\tau}_{m-1})\vee\beta^0_{m-1}(B^{\tau+1}_{m-1})\vee 1.$$

Если $k_{m-1}<\tau\le l_{m-1}$, то $N>C_{\tau}^{m-1}>\frac{N}{2}$; следовательно, в $B^{\tau}_{m-1}\vee B^{\tau+1}_{m-1}$ содержится только $C_{m+1}^{\frac{m}{2}+j+1}-N+1$ подслов, содержащих

$$0\vee\beta_1^{\tau-1}(B^{\tau}_{m-1})\vee\beta_0^{\tau-1}(B^{\tau}_{m-1})\vee\beta^0_{m-1}(B^{\tau+1}_{m-1})\vee 1.$$

Подставляя выражение для k_{m-1} в первую часть суммы (2) (t нужно взять равным $m-1$), получаем нужную оценку. □

Замечание 6. Из формулы (2) можно получить, что мощность множества всех таких α^N-имен, что их попарные расстояния по $\widetilde{d}$-метрике равны единице, равна $\frac{N^3}{6}+o(N^3)$. Этот результат аналогичен результату Мела–Петерсена о том, что функция сложности равна $\frac{N^3}{6}+o(N^3)$. Так как рост функции сложности субэкспоненциален, энтропия Колмогорова автоморфизма Паскаля равна нулю.

Замечание 7. Дальнейшие вычисления мы проводим с бернуллиевской мерой $\mu_{\frac{1}{2}}$ лишь для упрощения выкладок, результаты верны для любых μ_p.

Лемма 6. $\mu_{\frac{1}{2}}((\pi_N)^{-1}(V_n^s))\ge c(s)>0$ *при достаточно больших* n.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что $\mu_{\frac{1}{2}}((\pi_N)^{-1}(\alpha))=\frac{1}{2^{n+s}}$ для любого $\alpha\in V_n^s$. Умножая неравенство из леммы 4 на $\frac{1}{2^{n+s}}$, получаем требуемое неравенство. □

Например, если $s=2$, то $\mu_{\frac{1}{2}}((\pi_N)^{-1}(V_n^2))\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\approx 0.2348$. Поэтому в качестве V_N мы можем взять V_n^2.

§6. О масштабированной энтропии усредненной метрики

В этом параграфе мы возвращаемся к обсуждению метрик $\overline{\rho}_N$ и $\overline{d}_N$ (определения см. в §2).

Теорема (А. М. Вершик [14]). *Пусть (X, μ, T) – динамическая система. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\widehat{X} \subset X$, удовлетворяющее условию $\mu(\widehat{X}) \geq 1 - \varepsilon$, что мощность минимальной ε-сети в метрике $\overline{\rho}_N$ для $\widehat{X}$ ограничена при росте N, то спектр автоморфизма дискретен.*

Эта теорема означает, что для доказательства недискретности спектра автоморфизма Паскаля достаточно проверить неограниченность роста минимальной ε-сети $\overline{d}_N$-метрики множества $(\pi_N)^{-1}(V_n^2)$. Данная задача имеет ряд переформулировок.

- Достаточно проверить, что почти все слова длины $N = C_n^{\frac{n}{2}}$, содержащиеся в B_{n+2}^j, $j \in \{1, \dots n+1\}$, далеки по $\overline{d}_N$-метрике.
- Достаточно проверить, что k (где $k > c \cdot |V_n^2|$) слов длины $N = C_n^{\frac{n}{2}}$, содержащихся в B_{n+2}^j, $j \in \{1, \dots n+1\}$, далеки по $\overline{d}_N$-метрике.
- Достаточно проверить, что симметричные основные блоки далеки по $\overline{d}$-метрике: $\overline{d}(B_m^j, B_m^{m-j}) > \mathrm{const}$ для любого $m > m_0$, $j \in 0, \dots m$.
- Если $\overline{d}(\alpha_1^N, \alpha_2^N) < \varepsilon$, то $\alpha_1^N = \alpha_2^N$ для $\alpha_1^N, \alpha_2^N \in \widetilde{V}_n \subset V_n^2$, $\mu_p[\widetilde{V}_n] > \mathrm{const} > 0$.

Компьютерные расчеты оставляют мало сомнений в выполнимости первого (и самого сильного) из этих условий, однако аналитического доказательства этого факта пока не получено.

Литература

1. П. Биллингслей, *Эргодическая теория и информация.* Мир, М., 1969.
2. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
3. А. М. Вершик, *Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
4. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — Успехи мат. наук **55**, вып. 4(334) (2000), 59–128.
5. А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, *Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр.* — Теор. вероятн. и ее примен. **52**, вып. 3 (2007), 446–467.

6. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. Мир, М., 1984.
7. O. Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras.* — Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 195–234.
8. S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems.* — Israel Math. J. **100** (1997), 180–207.
9. É Janvresse, T. de la Rue, *The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **40**, no. 3 (2004), 133–139.
10. A. A. Lodkin, A. M. Vershik, *Approximation for actions of amenable groups and transversal automorphisms.* — Lect. Notes Math. **1132** (1985), 331–346.
11. X. Mela, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (2005), 227–256.
12. K. Petersen, K. Schmidt, *Symmetric Gibbs measures.* — Trans. Amer. Math. Soc. **349**, no. 7 (1997), 2775–2811.
13. A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants.* — Markov Process. Related Fields **16**, no. 1 (2010), 169–185.
14. A. M. Vershik, *Boundedness of the scaling sequences of the automorphisms with discrete spectrum*, `arXiv:1008.4946v6` (2010).

Lodkin A. A., Manaev I. E., Minabutdinov A. R. Asymptotic behavior of the scaling entropy of the Pascal adic transformation.

In this paper, we give an estimation for the growth of the scaling sequence of the Pascal adic transformation with respect to the sup-metric. We construct a special class of α-names of positive cumulative measure. The linear growth of its cardinality implies the logarithmic growth of the scaling sequence.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: lodkin@AL1065.spb.edu
mmanaev.i.e@gmail.com
arm.05@mail.ru

Поступило 9 октября 2010 г.