Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 378, 2010 г.

А. М. Левин

РАЗЛОЖИМОСТЬ ПОЛИМОРФИЗМОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ДЕЙСТВИЕМ ДВУХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Введение

Понятие полиморфизма одного пространства Лебега в другое является обобщением понятия многозначного отображения на случай пространств с мерой. Родственными понятиями к понятию полиморфизма в других разделах математики являются соответствие в алгебре и алгебраической геометрии, марковские операторы и процессы в теории вероятностей, меры Юнга в теории оптимального управления и др. В данной работе идёт речь о полиморфизмах, которые порождены действием двух конечных групп на пространстве с мерой. В первых двух параграфах вводятся необходимые понятия полиморфизма и разложимости, формулируется и доказывается критерий разложимости для рассматриваемых полиморфизмов. В параграфе 3 рассматривается случай, когда полиморфизм порождается действием двух групп порядка два (двух инволюций), приводятся необходимое и достаточное условия для разложимости в терминах эргодичности действия. В параграфе 4 рассказывается о приближённом разложении полиморфизма. Приведённый в нём алгоритм в общем случае позволяет получить разложение с точностью до множества малой меры, в то же время часто приводя к полноценному разложению.

1. Определения и постановка задачи

Определение. *Полиморфизмом* Π *(см.* [1]*) пространства Лебега* (X_1, μ_1) *в пространство Лебега* (X_2, μ_2) *называется диаграмма, состоящая из упорядоченной тройки пространств Лебега:*

$$(X_1, \mu_1) \xleftarrow{\pi_1} (X_1 \times X_2, \mu) \xrightarrow{\pi_2} (X_2, \mu_2),$$

Ключевые слова: полиморфизм, разложимость.
Частично поддержано грантом РФФИ 10-01-90411-Укр_а.

где π_1 и π_2 – проекции на первую и вторую компоненту произведения $(X_1 \times X_2, \mu)$, а мера μ такова, что $\pi_i \mu = \mu_i$ при $i = 1, 2$. Мера μ при этом называется бистохастической мерой полиморфизма Π. *Очевидно, что бистохастическая мера μ при фиксированных проекциях определяет полиморфизм однозначно.*

Определение. *Если в последнем определении пространства (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2) изоморфны, то полиморфизм* Π *называется полиморфизмом пространства Лебега в себя.*

Все понятия должны пониматься с точностью до множеств нулевой меры. Мы не всегда будем заострять на этом внимание.

Определение. *Полиморфизм пространства (X_1, μ_1) в (X_2, μ_2) будем называть разложимым (ср.* [2]*), если существует такое множество $B \subset X_1 \times X_2$ положительной неполной меры μ, что для каждого из множеств B и $\bar{B} := X_1 \times X_2 \setminus B$ проекция π_i сужения меры μ на это множество эквивалентна мере μ_i. В этом случае множество B будем называть разлагающим.*

Большое количество начальных фактов теории полиморфизмов, примеров и иллюстраций можно найти в статье [2]. Вопросам разложимости посвящён п. 8 этой работы. Различным аспектам теории полиморфизмов посвящены работы [1, 3].

Рассмотрим теперь пространство Лебега–Рохлина Y с вероятностной мерой μ, на котором заданы два измеримых действия конечных групп G и H следующим образом. Пусть $|G| = m$, $|H| = n$; тогда мы требуем, чтобы для почти всех $x \in Y$ по мере μ выполнялись равенства $|Gx| = m$, $|Hx| = n$. Эти действия порождают два измеримых разбиения ζ_G и ζ_H пространства Y на орбиты действия групп G и H соответственно. Рассмотрим два фактор–пространства пространства Y по разбиениям ζ_G и ζ_H: $X_1 := Y/G = Y/\zeta_G$ и $X_2 := Y/H = Y/\zeta_H$. Пусть π_1, π_2 – проекции пространства Y на X_1 и X_2 соответственно. Тогда определено отображение $f : Y \to X_1 \times X_2$: $f(y) = (\pi_1(y), \pi_2(y))$.

Это отображение определяет на пространстве $X_1 \times X_2$ бистохастическую меру μ', которая является образом меры μ под действием f. Ясно, что с точностью до множества нулевой μ'-меры пространство $X_1 \times X_2$ совпадает с $f(Y)$. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять Y с его образом под действием отображения f, а меру μ – с мерой μ'. Благодаря этому отождествлению, проекции π_1 и π_2 допускают естественное продолжение на пространство $X_1 \times X_2$. Предположим теперь, что μ_1 и μ_2 – проекции меры μ на X_1 и X_2 соответственно. Тогда тройка пространств (X_1, μ_1), $(X_1 \times X_2, \mu)$, (X_2, μ_2) вместе с проекциями π_1, π_2 задаёт полиморфизм пространства (X_1, μ_1) в (X_2, μ_2). Если дополнительно предположить существование изоморфизма $T\colon (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$, то мы можем говорить о полиморфизме пространства $X := X_1$ в себя. Если, как в нашем случае, полиморфизм порождён действием двух групп, то так и будем говорить, сохраняя все обозначения этого параграфа.

Заметим также, что если разлагающее множество существует, то его можно считать определённым с точностью до μ-меры 0, а потому можно полагать, что оно является подмножеством пространства Y.

2. Общий критерий разложимости

Определение. *Пусть множество $B \subset Y$ измеримо, а G – конечная группа, действующая на Y. Будем называть частотой вхождения x в B под действием G и обозначать $F_G(B, x)$ количество элементов в множестве $Gx \cap B$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ множество $\{x \mid F_G(B, x) = k\}$ обозначим через $Y_G(B, k)$.*

Замечание. Легко показать, что если для почти всех $x \in Y$ по мере μ выполняется равенство $|Gx| = |G|$, то для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $B \subset Y$ множество $Y_G(B, k)$ измеримо, для почти всех x выполняется равенство $F_G(B, x) = |G| - F_G(\bar{B}, x)$, а также $\mu(Y_G(B, k) \triangle Y_G(\bar{B}, |G| - k)) = 0$.

Теорема 1. *Рассмотрим полиморфизм Π пространства (X_1, μ_1) в (X_2, μ_2), порождённый действием конечных групп G и H. Тогда множество B является разлагающим для полиморфизма Π тогда и только тогда, когда $\mu(Y_G(B, 0)) = \mu(Y_G(B, m)) = \mu(Y_H(B, 0)) = \mu(Y_H(B, n)) = 0$. То есть траектория почти каждой точки под действием каждой из групп пересекает как множество B, так и его дополнение $\bar{B}$.*

Доказательство. Пусть $\mu(Y_G(B, 0)) = \mu(Y_G(B, m)) = \mu(Y_H(B, 0)) = \mu(Y_H(B, n)) = 0$, но при этом множество B не разлагающее. Так как $\mu(Y_G(B, 0)) = \mu(Y_G(B, m)) = 0$, имеем $0 < \frac{1}{m} \leqslant \mu(B) \leqslant 1 - \frac{1}{m} < 1$. Рассмотрим случай, когда B не является разлагающим из-за того, что проекция $\nu_1 := \pi_1(\mu|_B)$ не эквивалентна μ_1 (остальные случаи рассматриваются аналогично ввиду замечания перед теоремой и симметрии между группами G и H). Так как для любого измеримого множества

$A \in X_1$ имеет место неравенство

$$\nu_1(A) = \mu|_B(\pi_1^{-1}(A)) = \frac{\mu(\pi_1^{-1}(A) \cap B)}{\mu(B)} \leqslant \frac{\mu(\pi_1^{-1}(A))}{\mu(B)} = \frac{\mu_1(A)}{\mu(B)},$$

из неэквивалентности мер ν_1 и μ_1 следует, что существует такое множество $A \in X_1$, что $\nu_1(A) = 0$, но $\mu_1(A) > 0$. В этом случае рассмотрим множество $C := \pi_1^{-1}(A)$. Так как $\mu_1(A) > 0$, имеем $\mu(C) = \mu_1(A) > 0$. С другой стороны, так как $\nu_1(A) = 0$, имеем $\mu(C \cap B) = 0$. Следовательно, так как множество C является G-инвариантным и G сохраняет множества меры 0, для любого $g \in G$

$$\mu(C \cap gB) = \mu(gC \cap gB) = \mu(C \cap B) = 0.$$

Отсюда следует, что с точностью до множества меры 0 выполняется включение $C \subset Y_G(B, 0)$, и немедленно получается противоречие:

$$0 < \mu(C) \leqslant \mu(Y_G(B, 0)) = 0.$$

Доказательство в обратную сторону проводится аналогично. □

3. Случай двух инволюций

Определение. *Будем называть полиморфизм эргодичным, если любое измеримое множество, инвариантное* $\bmod 0$ *под действием каждого элемента групп* G *и* H*, имеет полную или нулевую меру.*

Теорема 2. *Рассмотрим полиморфизм* Π *пространства* (X_1, μ_1) *в* (X_2, μ_2)*, порождённый действием групп* $G = (e, g)$ *и* $H = (e, h)$*, где* e *– единичный элемент, а* g *и* h *– инволюции. Тогда если автоморфизм* gh *эргодичен, то полиморфизм* Π *неразложим. Если дополнительно предположить, что* Π *эргодичен, то эргодичность автоморфизма* gh *будет равносильна неразложимости полиморфизма.*

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Предположим противное, то есть что автоморфизм gh эргодичен, но нашлось разлагающее множество $B \in Y$. Тогда из теоремы 1 следует, что $\mu(Y_G(B, 0)) = \mu(Y_G(B, 2)) = \mu(Y_H(B, 0)) = \mu(Y_H(B, 2)) = 0$. Так как $Y = Y_G(B, 0) \sqcup Y_G(B, 1) \sqcup Y_G(B, 2) = Y_H(B, 0) \sqcup Y_H(B, 1) \sqcup Y_H(B, 2)$, мы получаем, что $\mu(Y_G(B, 1)) = \mu(Y_H(B, 1)) = 1$, то есть для почти всех x ровно один из элементов множества $\{x, gx\}$ и $\{x, hx\}$ лежит в множестве B. Таким образом, каждый из элементов g и h отображает множество B на $\bar{B}$ с точностью до меры 0. Значит, множество B является инвариантным $\mod 0$ для действия автоморфизма gh (и для hg тоже). Но так как B разлагающее, $0 < \mu(B) < 1$, и отсюда следует, что автоморфизм gh не является эргодичным. Противоречие.

Пусть теперь полиморфизм эргодичен. Следствие в одну из сторон уже доказано. Осталось проверить, что из неэргодичности автоморфизма gh следует разложимость. Пусть gh неэргодичен, тогда найдётся такое множество $B \subset Y$, что $0 < \mu(B) < 1$ и $ghB = B$. Покажем, что это множество является разлагающим. Для этого рассмотрим множество $Y_G(B,2)$ и покажем, что оно имеет меру 0 (для множеств $Y_G(B,0)$, $Y_H(B,0)$, $Y_H(B,2)$ доказательство будет аналогичным с точностью до замены G на H и/или B на $\bar{B}$). Очевидно, что $Y_G(B,2)$ совпадает $\mod 0$ с множеством $B_1 = gB \cap B$. Про последнее множество мы и докажем, что оно имеет меру 0. Заметим, что

$$gB_1 = g(gB \cap B) = g^2 B \cap gB = B \cap gB = B_1$$

и

$$\begin{aligned} hB_1 = h(gB \cap B) = hgB \cap hB = hg(ghB) \cap (g^2)hB = \\ = B \cap g(ghB) = B \cap gB = B_1, \end{aligned}$$

то есть B_1 инвариантно под действием каждого элемента групп G и H. Так как полиморфизм эргодичен, $\mu(B_1) = 0$ или $\mu(B_1) = 1$. Но мы знаем, что $\mu(B_1) \leqslant \mu(B) < 1$. Поэтому $\mu(B_1) = 0$, и доказательство теоремы закончено. $\square$

Пример 1. Две симметрии окружности (ср. пример в [2, п. 8]). Рассмотрим окружность S^1 с мерой Лебега. Зададим на ней два действия группы C_2 симметриями относительно различных прямых l_1 и l_2, проходящих через центр окружности. Пусть Π – полиморфизм, порождённый этими симметриями. Легко видеть, что в этом случае X_1, X_2 – отрезки с мерой Лебега. Обозначим через α угол между прямыми l_1 и l_2. Тогда если отношение $\frac{\alpha}{2\pi}$ иррационально, то последовательное действие инволюциями, которое является поворотом на угол 2α, как известно (см. [4]), эргодично. Значит, по только что доказанной теореме полиморфизм Π не является разложимым.

4. Теорема об аппроксимации

Определение. *Напомним, что, согласно [6], измеримое подмножество A пространства Y называется однослойным относительно разбиения ζ этого пространства, если A пересекается с каждым элементом разбиения не более чем по одной точке. Если разбиение порождено действием группы G, то это условие можно переформулировать следующим образом. Для любых $x_1 \neq x_2 \in A$ пересечение $x_1 \cap G x_2$ пусто. Если, кроме того, GA совпадает mod 0 со всем пространством Y, то будем называть множество A полным однослойным для Y.*

Теорема 3. *Рассмотрим полиморфизм пространства (X_1, μ_1) в (X_2, μ_2), порождённый действием групп G и H, причём пусть $m = |G| = 2$ и $n = |H| \geqslant 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $i \in 1, 2$ найдётся такое множество $B \subset Y$ положительной неполной меры, что для B и $\bar{B}$ верно, что проекция π_i сужения меры μ на это множество эквивалентна мере μ_i, а вторая проекция π_{3-i} сужения эквивалентна мере μ_{3-i} на множестве меры не меньше $1 - \varepsilon$.*

Доказательство. Чтобы не оговаривать это в дальнейшем, условимся, что все равенства множеств понимаются с точностью до множеств меры 0. Для начала рассмотрим случай $i = 1$. В статье [6] доказывается, что, так как каждый элемент разбиений ζ_G и ζ_H содержит конечное число точек, для каждого из этих разбиений существуют однослойные максимальные по мере μ множества положительной меры Y_1 и Y_2. Более того, ясно, что на самом деле Y_1 и Y_2 являются полными однослойными множествами, так как иначе по этому же утверждению можно было бы выбрать однослойное множество положительной меры в $Y \setminus GY_1$ или $Y \setminus HY_2$ соответственно, что противоречило бы максимальности Y_1 и Y_2. Обозначим $B_0 := Y_1$ и рассмотрим множество $C_0 := Y_H(B_0, n) \cap B_0 = Y_H(B_0, n)$. Множество C_0 инвариантно относительно действия группы H. Далее, ясно, что множество $D_0 := C_0 \cap Y_2$ является однослойным множеством, причём

$$HD_0 = \bigcup_{h \in H} hC_0 \cap hY_2 = \bigcup_{h \in H} C_0 \cap hY_2 = \\ = C_0 \cap \bigcup_{h \in H} hY_2 = C_0 \cap Y = C_0. \qquad (1)$$

Обозначим единственный неединичный элемент группы G через g и подействуем им на D_0. Пусть $E_0 = gD_0$. Так как $D_0 \subset B_0$ и B_0 – однослойное множество для разбиения, порождённого действием группы

G, имеем $E_0 \subset \overline{B_0}$. Отсюда уже следует, что $E_0 \cap C_0 = \varnothing$. Далее, обозначим $E_{0k} = E_0 \cap Y_H(B_0, k)$. Так как $E_0 \subset \overline{B_0}$, имеем $E_{0n} = \varnothing$. Опять для удобства обозначим $F_0 := E_{0(n-1)}$. Для каждой точки $x \in F_0$ ровно один элемент множества Hx не лежит в множестве B_0. Так как $x \notin B_0$, этот единственный элемент и есть x. Таким образом, для каждого элемента $h \in H$ определено множество $F_{0h} := hF_0$, причём если h не единичный, то F_{0h} лежит в B_0, а иначе – в $\overline{B_0}$. Заметим, что для двух различных элементов $h_1, h_2 \in H$

$$F_{0h_1} \cap F_{0h_2} = h_1F_0 \cap h_2F_0 = h_1(F_0 \cap h_1^{-1}h_2F_0) = h_1(\varnothing) = \varnothing.$$

Кроме того, для любого $h \in H$ имеем $F_{0h} \cap C_0 \subset Y_H(B_0, n-1) \cap Y_H(B_0, n) = \varnothing$. Значит, все множества вида F_{0h} и множество C_0 попарно не пересекаются. Зафиксируем неединичный элемент $h_0 \in H$ и обозначим $D_1 := F_{0h_0}$, после чего повторим с D_1 все операции, которые мы делали с D_0, то есть обозначим $E_1 = gD_1$, $E_{1k} = E_1 \cap Y_H(B_0, k)$, $F_1 := E_{1(n-1)}$, $F_{1h} := hF_1$, $D_2 := F_{1h_0}$. Этот процесс мы можем продолжать до бесконечности, получая множества $D_i, E_i, E_{ik}, F_i, F_{ih}$. По индукции несложно проверяется, что все множества вида F_{ih}, E_i для неединичных h и множество C_0 попарно не пересекаются.

Обозначим, теперь

$$B_1 := B_0 \setminus \Big(\bigcup_{i\geqslant 0} D_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\geqslant 0} E_i\Big).$$

Если $x \in Y_H(B_1, 0) \setminus Y_H(B_0, 0)$ (H-орбита элемента x не пересекается с B_1, но пересекается с B_0), то существует такое $i \geqslant 0$, что пересечение $Hx \cap D_i$ непусто. Так как H – группа, при $i > 0$ отсюда следует, что $x \in HD_i = HF_{i-1} = HE_{(i-1)(n-1)} \subset HE_{i-1}$, а значит, пересечение $Hx \cap E_{i-1}$ непусто, т.е. траектория элемента x пересекается с B_1. Противоречие. Стало быть, $i = 0$. Но если пересечение $Hx \cap D_0$ непусто, то из равенства (1) следует, что $x \in HD_0 = C_0$. Но в этом случае из однослойности D_0 и $n \geqslant 2$ следует, что найдётся $h \in H$, для которого $hx \in C_0 \setminus D_0 \subset B_1$. Тем самым, мы опять получили, что $x \notin Y_H(B_1, 0)$, противоречие. Значит, $Y_H(B_1, 0) \setminus Y_H(B_0, 0) = \emptyset$ и, тем самым,

$$Y_H(B_1, 0) \subset Y_H(B_0, 0). \tag{2}$$

Также ясно, что $Y_H(B_0, n) \cap Y_H(B_1, n) = C_0 \cap Y_H(B_1, n) = \varnothing$. Последнее равенство верно, так как оба множества инвариантны относительно действия группы H и C_0 содержит полное однослойное множество D_0, которое не пересекается с B_1. Кроме того, для любого i имеем $Y_H(B_1,n)\cap F_i=\varnothing$, так как $D_{i+1}=h_0F_i$ не пересекается с B_1. Поэтому H-орбита любой точки из $Y_H(B_1,n)$ содержит хотя бы одну точку из $P:=\bigcup\limits_{i\geqslant 0}(E_i\setminus F_i)$. Так как для любой точки $x\in P$ выполняется неравенство $F_H(B_0,x)\leqslant n-2$, каждая H-орбита на самом деле содержит не менее двух точек из P. Далее, имеем

$$\mu(P)=\sum_{i=0}^{\infty}(\mu(E_i)-\mu(F_i))=\sum_{i=0}^{\infty}(\mu(E_i)-\mu(F_{ih_0}))=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(\mu(E_i)-\mu(D_{i+1}))=\sum_{i=0}^{\infty}(\mu(D_i)-\mu(D_{i+1}))=\mu(D_0).$$

Последний переход возможен, так как множества D_i попарно не пересекаются и потому знакопеременный ряд, получающийся при раскрытии скобок, сходится абсолютно. Так как D_0 – полное однослойное множество для C_0, имеем $\mu(D_0)=\frac{\mu(C_0)}{n}$. Так как каждая H-орбита точек из $Y_H(B_1,n)$ пересекает P не менее чем в двух точках,

$$\mu(Y_H(B_1,n))\leqslant\frac{n}{2}\mu(P)=\frac{n}{2}\mu(D_0)=$$
$$=\frac{n}{2}\frac{\mu(C_0)}{n}=\frac{\mu(C_0)}{2}=\frac{\mu(Y_H(B_0,n))}{2}. \qquad (3)$$

Подведём некоторый итог. Так как $E_i=gD_i$, множество B_1 наследует от B_0 свойство быть полным однослойным относительно ζ_G. Из неравенства (3) и включения (2) следует, что при переходе от B_0 к B_1 мера точек, орбиты которых целиком лежат в выбранном множестве B, уменьшается как минимум в два раза, в то время как мера точек, орбиты которых не пересекаются с множеством B, не увеличивается. По B_1 мы можем построить множество B_2, по B_2 – множество B_3 и т.д. Проделав эту процедуру необходимое число раз, мы добьёмся того, чтобы $\mu(Y_H(B_k,n))<\frac{\varepsilon}{4}$. Так как $Y_H(B,0)=Y_H(\bar{B},n)$, проделав эту же процедуру ещё некоторое количество раз, но уже беря в качестве B_0 множество $\bar{B}_k$, мы можем считать, что $\mu(Y_H(B_k,0))<\frac{\varepsilon}{4}$ (при этом, как было показано, $\mu(Y_H(B_k,n))$ не увеличится). Таким образом, не умаляя общности, мы можем считать, что $\mu(Y_H(B_0,n)),\mu(Y_H(B_0,0))<\frac{\varepsilon}{4}$. Но из теоремы 1 (точнее, из её доказательства) следует, что последнее неравенство как раз и показывает, что проекция $\pi_2(\mu|_{B_0})$ абсолютно непрерывна относительно $\pi_2(\mu)$ на множестве меры не меньше $1-\varepsilon$. Из той же теоремы следует, что проекция π_1 сужения меры μ на B_0 абсолютно непрерывна относительно проекции меры μ, так как B_0 – полное однослойное множество для разбиения ζ_G.

Для получения требуемого разложения в случае $i=2$ достаточно взять множество $B_0' := B_0 \setminus (Y_H(B_0,n)\cap Y_2)\bigcup(Y_H(B_0,0)\cap Y_2)$. Так как каждое из множеств $Y_H(B_0,n)$, $Y_H(B_0,0)$ инвариантно относительно H, имеем $\mu(Y_H(B_0',n)) = \mu(Y_H(B_0',0)) = 0$. В то же время $\mu(Y_G(B_0',2)) + \mu(Y_G(B_0',0)) \leqslant 2(\mu(Y_H(B_0,n)) + \mu(Y_H(B_0,0))) \leqslant 2\varepsilon$, то есть эта величина может быть сделана сколь угодно малой. Доказательство закончено. □

Пример 2. Несмотря на то, что в теореме утверждается, что можно построить разложение лишь с точностью до множества малой меры, применение алгоритма, использованного при её доказательстве, может приводить к построению разложения полиморфизма.

Рассмотрим двумерный тор $T := (\mathbb{R}\times\mathbb{R})/(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ с мерой Лебега. Профакторизуем его по отношению эквивалентности $\equiv$, задаваемому формулой $(x,y)\equiv(-x,-y)$, и полученное пространство обозначим S. Несложно показать, что топологически это пространство является сферой. На пространстве S зададим действие модулярной группы $PSL(2,\mathbb{Z})\subset M_2(\mathbb{Z})$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times (x,y) = (ax+by, cx+dy).$$

Как известно, $PSL(2,\mathbb{Z})\cong C_2 * C_3$, причём в качестве образующих групп C_2 и C_3 можно взять матрицы (см. [5, стр. 210–211])

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, на пространстве S задано свободное действие двух групп порядков 2 и 3. Легко проверить, что топологически факторы по каждому из этих действий изоморфны S, т.е. мы построили полиморфизм пространства S в себя.

Пространство S удобно отождествить с треугольником ABC на плоскости, стороны которого склеены сами с собой с изменением ориентации. Также обозначим через A_1, B_1, C_1 середины сторон BC, AC, AB соответственно, а через M, M_A, M_B, M_C – центры тяжести треугольников ABC, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно. Для построения разложения, согласно алгоритму, нам нужно выбрать два полных однослойных множества Y_1 и Y_2. В качестве Y_1 выберем квадрат $CB_1C_1A_1$, а в качестве Y_2 – четырёхугольник AC_1MB_1 (имея явное представление действий групп $G := C_2$ и $H := C_3$, легко проверить, что эти множества действительно являются полными однослойными). При таком выборе легко проверить, что уже после первого шага алгоритма мы построим разлагающее множество $B_1M_AC_1M_BA_1M_C$. На самом деле существует огромное количество способов предъявить разлагающее множество. В частности, можно взять треугольник AC_1C.

Замечание. Ещё одним примером разложимого полиморфизма является действие группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ на верхней комплексной полуплоскости по правилу (см. [5, стр. 208–209])

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

В этом случае в качестве разлагающего множества можно взять полуокружность с центром в начале координат и радиусом 1.

Заключение

В данной работе рассказано о критерии разложимости полиморфизма, порождённого действием двух конечных групп (теорема 1), изучены вопросы разложения полиморфизмов, порождённых действием двух инволюций (параграф 3), и описан подход, позволяющий строить разложение полиморфизмов, в случае, если одна из групп имеет порядок 2 (параграф 4).

Дальнейший интерес представляет построение примеров неразложимых полиморфизмов, типичность которых доказана в статье [3]; в том числе, полиморфизмов, порождённых действием двух групп, как с конечной, так и с непрерывной мерой.

Литература

1. A. M. Vershik, *Polymorphisms, Markov processes, quasi-similarity.* — Discrete Contin. Dyn. Syst. **13**, No. 5 (2005), 1305–1324.

2. А. М. Вершик, *Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **72** (1977), 26–61.
3. А. М. Вершик, *Как выглядит типичный марковский оператор?* — Алгебра и анализ **17** (2005), 91–104.
4. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория.* Наука, М., 1980.
5. А. Г. Курош, *Теория групп.* Наука, М., 1967.
6. В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры.* — Мат. сб. **25(67)** (1949), 107–150.

Levin A. M. Decomposability of polymorphisms generated by an action of two finite groups.

In this paper, we consider problems related to the decomposability of multivalued measure-preserving transformations (i.e., polymorphisms) generated by an action of two finite groups on a Lebesgue space. We give a general construction of such polymorphisms and prove a convenient decomposability criterion. In the case where both generating groups are of order 2, we use this criterion to further characterize the decomposability. In the last section, we present a method of constructing an approximative decomposition of polymorphisms that can be used for obtaining a decomposition in the usual sense.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр., д. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: levlam@tut.by

Поступило 29 сентября 2010 г.