Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 378, 2010 г.

П. Б. Затицкий

КАНОНИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ КОМПАКТОВ

Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ). Рассмотрим свободное аффинное пространство $F(X)$ на X, то есть множество конечных формальных комбинаций $\sum \alpha_i \cdot \delta_{x_i}$, где $x_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum \alpha_i = 0$. Здесь δ_x можно понимать как атомарную дельта-меру, сосредоточенную в точке x, тогда $F(X)$ есть множество зарядов с конечным носителем на X и суммарным зарядом 0. Норма $\|\cdot\|$ на X называется *согласованной с метрикой*, если $\|\delta_x - \delta_y\| = \rho(x, y)$ для любых x, $y \in X$. Хорошо известны две канонические нормы, согласованные с метрикой.

1) Норма Хаусдорфа–Куратовского. Каждой мере $\mu = \sum \alpha_i \delta_{x_i}$ сопоставим непрерывную функцию $f_{mu} := \sum \alpha_i \rho(x_i, \cdot)$ на X. Заметим, что эта функция ограничена (благодаря тому, что $\sum \alpha_i = 0$). Ее норма в пространстве ограниченных непрерывных функций и есть норма Хаусдорфа–Куратовского $\|\mu\|_H$ меры μ. Запишем выражение для нормы Хаусдорфа-Куратовского в терминах исходной меры μ:

$$\|\mu\|_{HK} = \sup_{x \in X} \left| \int \rho(x, \cdot) d\mu \right|. \tag{1}$$

2) Норма Канторовича–Рубинштейна [1]. Рассмотрим множество L всех 1-липшицевых функций $f : X \to \mathbb{R}$ (то есть таких функций, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y)$). Определим норму $\|\mu\|_{KR}$ меры μ равенством

$$\|\mu\|_{KR} = \sup_{f \in L} \left| \int f d\mu \right|.$$

Таким образом, пространство Канторовича–Рубинштейна является (каноническим) предсопряженным к пространству $\mathrm{Lip}(X)$ липшицевых функций на X, определенных с точностью до аддитивной константы. Единичный шар этой нормы есть выпуклая оболочка всех мер

Ключевые слова: изометрические вложения, метрический компакт, транспортная норма.

вида $\frac{\delta_x - \delta_y}{\rho(x,y)}$, $x, y \in X$. В самом деле, 1-липшицевы функции есть в точности те функции, интеграл от которых по мерам указанного вида не превосходит 1, так что это утверждение следует из единственности предсопряженного пространства в конечномерном случае.

Отметим, что в [1] норма вводилась через оптимальное решение транспортной задачи. Другие равносильные определения и характеристические свойства нормы Канторовича–Рубинштейна см. в [2].

Следующие свойства метрического пространства X введены и изучались в [2].

Определение 1. *Пространство X называется линейно жестким, если согласованная с метрикой норма на $F(X)$ единственна, и слабо линейно жестким (далее СЛЖ), если на X совпадают нормы Канторовича–Рубинштейна и Хаусдорфа–Куратовского.*

Очевидно, что линейно жесткое пространство является слабо линейно жестким. Обратное неверно, соответствующие примеры приведены в работе [2]. Там же доказано, что линейно жесткое пространство X имеет бесконечный диаметр (следовательно, оно бесконечно и некомпактно), если только X содержит больше трех точек.

В статье [3] доказано, что СЛЖ конечное метрическое пространство содержит не более четырех точек.

Целью настоящей работы является показать, что то же верно и для компактных метрических пространств.

Теорема 1. *Не существует бесконечного компактного слабо линейно жесткого пространства.*

Из этой теоремы и результатов работы [3] непосредственно следует, что компактное слабо линейно жесткое пространство содержит не более четырех точек.

Введем некоторые понятия и обозначения.

Наше компактное бесконечное СЛЖ пространство будем обозначать X. Если a, b – точки пространства X, то через ab будем обозначать расстояние между ними.

Определение 2. *Для конечного метрического пространства A и 1-липшицевой функции $f : A \to \mathbb{R}$ рассмотрим граф, вершины которого суть точки пространства A, а ребром соединяются точки a, b, для которых $|f(a) - f(b)| = ab$. Функцию будем называть экстремальной, если соответствующий граф связен.*

Эта терминология вызвана тем, что в многограннике 1-липшицевых функций (определенных с точностью до аддитивной константы) на A соответствующая функция будет экстремальной точкой (вершиной многогранника).

Нам понадобится следующая переформулировка свойства слабой линейной жесткости.

Лемма 1. *Компактное метрическое пространство X является слабо линейно жестким тогда и только тогда, когда для любого конечного подмножества $A \subset X$ любая экстремальная 1-липшицева функция $f : A \to \mathbb{R}$ представима в виде $f(x) = C \pm ax$ для некоторых $a \in X$, $C \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Зафиксируем конечное подмножество $A \subset X$ и рассмотрим канонические нормы, суженные на пространство мер с носителем в A. Их совпадение равносильно совпадению единичных шаров двойственных пространств. Будем смотреть на двойственное пространство как на линейное пространство функций на A, определенных с точностью до аддитивной константы (результат действия функции на меру есть интеграл функции по этой мере). Тогда для нормы Хаусдорфа–Куратовского единичный шар B_H двойственного пространства есть замыкание выпуклой оболочки (1-липшицевых) функций вида $x \to \pm ax$, $a \in X$, а для нормы Канторовича–Рубинштейна шар B_{Lip} есть выпуклая оболочка всех 1-липшицевых функций. Замыкание можно убрать, поскольку X компактно, а тогда и рассматриваемое семейство функций компактно (здесь мы пользуемся известным фактом, что выпуклая оболочка конечномерного компакта – тоже компакт). Очевидно, что $B_H \subset B_{\mathrm{Lip}}$. Обратное включение равносильно тому, что любая вершина многогранника B_{Lip} лежит в B_H (а значит, автоматически является экстремальной точкой шара B_H), откуда сразу вытекает утверждение леммы. □

Введем еще несколько определений и обозначений.

Определение 3. *Пусть есть 1-липшицева функция f, заданная и экстремальная на подпространстве $A \subset X$. Будем говорить, что точка $p \in X$ накрывает функцию f (или функция f накрывается точкой p), если существует такое число c и $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, что для любой точки x множества A выполнено равенство $f(x) = \varepsilon px + c$. Множество точек, накрывающих функцию f, будем обозначать $\mathrm{Cov}(A, f)$. Нетрудно проверить, что это множество замкнуто.*

Переформулируем лемму 1 в новых терминах. *Метрическое пространство X является СЛЖ тогда и только тогда, когда для любого его конечного подмножетсва A и для любой функции f, заданной на множестве A и экстремальной на нем, множество* $\mathrm{Cov}(A, f)$ *непусто.*

Докажем такую лемму.

Лемма 2. *Пусть функция f, определенная и экстремальная на конечном множестве A, такова, что* $\mathrm{Cov}(A, f) \cap A = \varnothing$. *Пусть* $p \in \mathrm{Cov}(A, f)$. *Тогда существует точка* $q \in \mathrm{Cov}(A, f)$ *и число c, такие, что*

1) *для любой точки $x \in A$ выполнено равенство $px + xq = c$;*

2) *для любой точки $x \in X$ существует такая точка $a(x) \in A$, что $qa(x) = qx + xa(x)$;*

3) $p \neq q$.

Доказательство. Рассмотрим фунцию $g(x) = \min\{xa + ap : a \in A\}$, заданную на всем X. По неравенству треугольника получаем $g(a) = ap$ для $a \in A$. Рассмотрим любое конечное множество $B \supset A$. Ясно, что на множестве B функция g является экстремальной 1-липшицевой. Так как пространство X слабо линейно жесткое, множество $\mathrm{Cov}(B, g)$ непусто.

Будем в качестве множества B_n брать множество A, объединенное с $\frac{1}{n}$-сетью в X (она существует, так как X компактно), причем так, чтобы B_n были вложены друг в друга. Выберем точку $q_n \in \mathrm{Cov}(B_n, g)$. Пусть ε_n, c_n – константы из определения накрытия. Из-за компактности пространства X можно считать, что $q_n \to q$. Также можно считать, что ε_n одинаковы ($= \varepsilon$) и $c_n \to c$ (так как ясно, что c_n есть ограниченная последовательность). Для каждой точки $x \in B_n$ верно равенство $g(x) = \varepsilon x q_m + c_m$ для любого $m > n$. Переходя к пределу по m, получаем, что $g(x) = \varepsilon xq + c$ для каждого $x \in B_n$. Значит, две непрерывные функции $g(x)$ и $\varepsilon xq + c$ совпадают на плотном множестве. В таком случае они вообще совпадают. Итак, мы получили, что для любой точки $x \in X$ выполнено равенство $\min\{xa + ap : a \in A\} = \varepsilon xq + c$.

Заметим, что для $a \in A$ левая часть в точности равна ap. Поэтому $q \in \mathrm{Cov}(A, f)$. Отсюда следует, что $q \notin A$. Если $\varepsilon = 1$, то единственный минимум правой части достигается в точке q, в то время как минимум левой части достигается в какой-то из точек множества A. Противоречие. Значит, $\varepsilon = -1$. Таким образом, для каждой точки $a \in A$ имеем $ap = c - aq$, и мы доказали, что выполняется условие 1).

Теперь докажем, что выполняется условие 2). Пусть $x \in X$. Найдем такую точку $a(x) \in A$, что $xa(x) + a(x)p = g(x) = c - xq = a(x)p + a(x)q - xq$. Тогда $a(x)q = xq + xa(x)$.

Теперь докажем, что выполняется условие 3), рассуждая от противного. Пусть $p = q$. Заметим, что в A имеется хотя бы 4 точки, так как иначе $\mathrm{Cov}(A, f) \cap A \neq \varnothing$. Для любой точки $a \in A$ имеем $ap = aq = c/2$. Таким образом, функция f есть константа на множестве A, что противоречит ее экстремальности. □

Теперь заметим, что если A – конечное множество, содержащее хотя бы 5 точек, то A не является СЛЖ, см. [3]. Таким образом, существует такая экстремальная 1-липшицева функция f на множестве A, что $\mathrm{Cov}(A, f) \cap A = \varnothing$, но $\mathrm{Cov}(A, f) \neq \varnothing$. Следовательно, можно выбрать любую точку $p \in \mathrm{Cov}(A, f)$ и при помощи леммы найти соответствующую точку q. Давайте теперь в качестве множеств A_n брать возрастающие по включению конечные $1/n$-сети. Если p_n, q_n – соответствующие последовательности точек и c_n – соответствующая последовательность чисел, то не умаляя общности можно считать, что $p_n \to p$, $q_n \to q, c_n \to c$. Тогда предельным переходом получается, что для любой точки $x \in A_n$ выполнено равенство $xp + xq = c$. Значит, оно верно на плотном множестве точек. Отсюда делаем вывод, что оно выполнено для любой точки $x \in X$. Если диаметр пространства X равен d, то существуют такие точки a, b, что $ab = d$. Тогда $2d \geq 2pq = 2(pq+qq) = 2c = (ap+aq)+(bp+bq) = (ap+bp)+(aq+bq) \geq 2ab = 2d$. Таким образом, оба неравенства обращаются в равенства, и мы получаем, что $pq = d = px + xq$ для любой точки $x \in X$.

Введем функцию $\mathrm{ex}(b) = \max\{by : y \in X\} \leq d$. Покажем, что если b не является изолированной точкой, то $\mathrm{ex}(b) = d$. Для этого выберем конечное множество A, содержащееся в ε-окрестности точки b и содержащее хотя бы 5 точек. Для множества A найдем описанные выше точки $p(A), q(A)$. Теперь воспользуемся свойством 2) для точек $x = p, x = q$. Оно говорит, что в множестве A есть такие точки $a(p), a(q)$, что $a(p)p+pq(A) = a(p)q(A), a(q)q+qq(A) = a(q)q(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} 2d - 2\varepsilon = 2pq - 2\varepsilon \leq bp + pq(A) + qq(A) + bq - 2\varepsilon \leq a(p)p + pq(A) + \\ + a(q)q + qq(A) = a(p)q(A) + a(q)q(A) \leq 2bq(A) + 2\varepsilon \leq 2ex(b) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε можно взять любое, $d \leq \mathrm{ex}(b)$. Значит, $\mathrm{ex}(b) = d$.

Теперь предположим, что в X нет изолированных точек, и придем к противоречию. Мы уже знаем, что существуют две точки p, q, такие, что $pq = d$ – диаметр пространства X. Теперь в качестве A возьмем любое конечное множество, содержащее хотя бы 5 точек, в том числе p, q. Тогда можно найти $p(A), q(A), c(A)$, как в лемме. Значит, $2d = p(A)p + pq(A) + p(A)q + qq(A) = 2c(A)$. Точка $q(A)$ не является изолированной, поэтому $\mathrm{ex}(q(A)) = d$. То есть существует такая точка x, что $q(A)x = d$. Но тогда по свойству 2) существует такая точка $a(x) \in A$, что $a(x)x + d = a(x)x + xq(A) = a(x)q(A) \leq d$. Таким образом, $x = a(x) \in A$. Но тогда $xp(A) + xq(A) = c(A) = d = xq(A)$. Следовательно, $p(A) = x \in A$, что противоречит конструкции (Если говорить коротко, то свойство 2) гарантирует, что самая далекая точка от q лежит в множестве A, чего не может быть.) Противоречие, показывающее, что бесконечного компактного СЛЖ пространства без изолированных точек не бывает.

Теперь покажем, что если p – изолированная точка бесконечного компактного СЛЖ X, то $Y = X \setminus \{p\}$ – тоже бесконечное компактное СЛЖ. Компактность и бесконечность очевидны. Покажем слабую линейную жесткость. Для этого возьмем любое конечное множество $B \subset Y$. Пусть f – экстремальная 1-липшицева функция на B. Множество $\mathrm{Cov}(B, f)$ непусто, так как X – СЛЖ. Мы хотим показать, что $\mathrm{Cov}(B, f) \cap Y \neq \varnothing$. Если это не так, то $\mathrm{Cov}(B, f) = \{p\}$. Но тогда можно применить лемму и найти точку $q \in \mathrm{Cov}(B, f)$, отличную от p. Значит, $\mathrm{Cov}(B, f) \cap Y \neq \varnothing$. Следовательно, Y – СЛЖ.

Теперь перейдем к общему случаю. Здесь нам придется воспользоваться леммой Цорна. Выберем в нашем пространстве произвольное пятиточечное подмножество M. Рассмотрим семейство $\mathbb{K} = \{K \subset X : M \subset K,\ K$ – компактное СЛЖ$\}$ всевозможных подмножеств в X, содержащих наше множество M и являющихся компактными СЛЖ, упорядоченное по включению ($K_1 < K_2 \iff K_1 \supset K_2$). Ясно, что $X \in \mathbb{K}$. Мы хотим найти наименьший по включению элемент семейства $\mathbb{K}$. Для этого достаточно показать, что любое линейно упорядоченное подсемейство имеет верхнюю грань. Пусть L – линейно упорядоченное подсемейство. Покажем, что $K_0 = \bigcap_{K \in L} K$ – его верхняя грань. Ясно, что K_0 есть компакт (как пересечение компактов) и непусто, так как $M \subset K_0$. Осталось показать, что K_0 есть СЛЖ пространство. Пусть A – произвольное конечное подмножество в K_0, а f – экстремальная 1-липшицева фукнция на A. Рассмотрим $B = \mathrm{Cov}(A, f)$. Заметим, что множество B непусто и, кроме того, для любого $K \in L$ имеем $A \subset K$. Значит, так как K – СЛЖ, $K \cap B \neq \varnothing$. Поскольку множество B замкнуто, множества $K \cap B$ компактны. Тогда они образуют частично упорядоченное семейство компактов. Значит, по теореме Кантора их пересечение $\bigcap_{K\in L} K\cap B = K_0\cap B$ непусто. А это в точности означает, что какая-то точка множества K_0 накрывает функцию f. Значит, K_0 слабо линейно жестко. Итого, мы доказали, что в нашем случае применима лемма Цорна, которая гарантирует существование наименьшего по включению компактного СЛЖ K, содержащего наше множество M.

Ясно, что K бесконечно (так как содержит хотя бы 5 точек и слабо линейно жестко) и изолированными точками пространства K могут быть только точки множества M, иначе можно было бы уменьшить наш компакт, просто выкинув изолированную точку. Значит, в K не более чем 5 изолированных точек. Заметим, что после их выкидывания новых изолированных точек не появится. Таким образом, мы нашли бесконечное компактное СЛЖ пространство без изолированных точек, чего не может быть по доказанному.

Теорема доказана.

Автор благодарен Ф. В. Петрову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, *Об одном пространстве вполне аддитивных функций.* — Вестн. ЛГУ **13**, вып. 7 (1958), 52–59.
2. J. Melleray, F. V. Petrov, A. M. Vershik, *Linearly rigid metric spaces and the embedding problem.* — Fund. Math. **199**, No. 2 (2008), 177–194.
3. П. Б. Затицкий, *О совпадении канонических вложений метрических пространств в банаховы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 153–161.

Zatitskiy P. B. Canonical embeddings of compact metric spaces.

We prove that for any compact metric space having at least five points, two canonical (Hausdorff–Kuratowski and Kantorovich–Rubinshtein) embeddings do not coincide.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: paxa239@yandex.ru

Поступило 22 июля 2010 г.