Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 378, 2010 г.

Е. Е. Горячко

ПОЛИНОМИАЛЬНОСТЬ НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРОВ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Введение

Зафиксируем следующие обозначения:

• $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество неотрицательных целых чисел;

• $\mathcal{Y}_n$, где $n \in \mathbb{N}_0$, – множество диаграмм Юнга с n клетками;

• $(\lambda_1, \ldots, \lambda_c)$, где $c \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_c \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_c$, – диаграмма Юнга, длины строк которой суть числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_c$;

• $\chi^{\mathrm{s}}_\lambda$, где $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, – неприводимый характер группы S_n, отвечающий диаграмме λ (имеется в виду классическое соответствие между неприводимыми характерами симметрических групп и диаграммами Юнга, описанное, например, в [3, гл. 7]; индекс s в нашем обозначении связан с тем, что характеру $\chi^{\mathrm{s}}_\lambda$ соответствует функция Шура s_λ в кольце симметрических функций, см. [2, гл. I, раздел 7]);

• $a_l(u)$, где $u \in \mathrm{S}_n$ и $l \in \{1, \ldots, n\}$, – количество циклов длины l в цикловой записи перестановки u.

В настоящей работе *исследуется поведение характеров χ_λ, отвечающих диаграммам λ, у которых меняется только первая строка (то есть под ней форма диаграммы зафиксирована).*

Рассмотрим простейшие примеры:

• $\chi^{\mathrm{s}}_{(n-1,1)}(u) = a_1(u) - 1$;

• $\chi^{\mathrm{s}}_{(n-2,2)}(u) = \frac{1}{2}a_1(u)(a_1(u) - 3) + a_2(u)$;

• $\chi^{\mathrm{s}}_{(n-2,1,1)}(u) = \frac{1}{2}(a_1(u) - 1)(a_1(u) - 2) - a_2(u)$.

В этих примерах $\chi^{\mathrm{s}}_\lambda(u)$ – многочлен от $a_1(u), \ldots, a_j(u)$ степени j, где j – количество клеток под первой строкой диаграммы λ, причем его старший член зависит только от $a_1(u)$. Основная теорема статьи (теорема 2) утверждает, что *аналогичное свойство полиномиальности неприводимых характеров верно и в общем случае.*

Ключевые слова: неприводимые характеры симметрических групп, индуцированные характеры, числа Костки.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00379-а, 09-01-12175-офи_м и 10-01-90411-Укр_а.

Из теоремы 2 можно вывести важное следствие об *асимптотике неприводимых характеров групп* S_n *при периодических вложениях в случае, когда количество клеток под первой строкой диаграмм стабилизируется.* В терминах индуктивного предела групп S_n относительно периодических вложений (то есть группы рациональных перекладываний отрезка) это следствие означает, что в описанной ситуации отвечающие данным диаграммам нормированные неприводимые характеры сходятся к k-й степени натурального характера предельной группы, где $k \in \mathbb{N}_0$ – предел количества клеток под первой строкой диаграмм. Другим способом можно доказать, что это так и для $k = \infty$. Совместно два этих факта означают, что все неразложимые характеры группы рациональных перекладываний отрезка суть степени натурального характера (см. статью [1] в этом сборнике).

В разделе 1 мы доказываем, что свойство полиномиальности имеет место для индуцированных характеров групп S_n (то есть для характеров, индуцированных единичными характерами подгрупп Юнга). Известно, что неприводимые характеры групп S_n можно выразить через индуцированные характеры и числа Костки. В разделе 2 мы устанавливаем одно свойство чисел Костки. Используя это свойство совместно с полиномиальностью индуцированных характеров, в разделе 3 мы доказываем полиномиальность неприводимых характеров, а также выводим из нее упомянутое выше следствие.

Зафиксируем еще несколько обозначений:

• $\mathcal{P}_n$, где $n \in \mathbb{N}_0$, – множество разбиений числа n;

• $[\omega_1, \dots, \omega_s]$, где $s \in \mathbb{N}_0$, $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbb{N}$, – разбиение, части которого суть числа $\omega_1, \dots, \omega_s$ (порядок их перечисления не важен, поэтому в обозначении используются квадратные, а не круглые скобки);

• $\chi^{\mathrm{h}}_{\omega}$, где $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_s] \in \mathcal{P}_n$, – характер группы S_n, индуцированный единичным характером подгруппы Юнга $\mathrm{S}_{\omega_1} \times \ldots \times \mathrm{S}_{\omega_s}$ (легко доказать, что этот характер не зависит от порядка перечисления частей разбиения ω; индекс $^{\mathrm{h}}$ в нашем обозначении связан с тем, что характеру $\chi^{\mathrm{h}}_{\omega}$ соответствует симметрическая функция h_{ω});

• пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_c)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_c = \mu_1 + \ldots + \mu_d$; тогда $\lambda \geqslant \mu$, если и только если для всех $i \in \{1, \dots, \min(c, d)\}$ из того, что $\lambda_t = \mu_t$ для всех $t \in \{1, \dots, i-1\}$, следует, что $\lambda_i \geqslant \mu_i$;

• пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_c)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ и $c \geqslant d$; тогда $\lambda \supseteq \mu$, если и только если $\lambda_i \geqslant \mu_i$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$; косую диаграмму Юнга, получающуюся при удалении поддиаграммы μ из диаграммы λ, мы обозначим через λ/μ;

• пусть $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, $\omega = [\omega_1, \ldots, \omega_s] \in \mathcal{P}_n$; тогда число Костки $\mathcal{K}_{\lambda,\omega}$ равно числу таких последовательностей $(0) = \lambda_0 \subset \ldots \subset \lambda_s = \lambda$, что для всех $i \in \{1, \ldots, s\}$ косая диаграмма λ_i/λ_{i-1} имеет ровно ω_i клеток и никакие две ее клетки не лежат в одном столбце (ниже будет видно, что $\mathcal{K}_{\lambda,\omega}$ не зависит от порядка перечисления частей разбиения ω);

• $[\omega_1, \ldots, \omega_s] + [\psi_1, \ldots, \psi_r] := [\omega_1, \ldots, \omega_s, \psi_1, \ldots, \psi_r]$;

• $\Delta\omega$, где $\omega = [\omega_1, \ldots, \omega_s]$, – диаграмма Юнга, длины строк которой суть числа $\omega_1, \ldots, \omega_s$, упорядоченные по невозрастанию;

• $(\lambda_1, \ldots, \lambda_c) \cup (\mu_1, \ldots, \mu_d) := \Delta[\lambda_1, \ldots, \lambda_c, \mu_1, \ldots, \mu_d]$.

Разложение индуцированного характера по базису из неприводимых характеров имеет вид $\chi^{\mathrm{h}}_\omega = \sum_{\nu \geqslant \Delta\omega} \mathcal{K}_{\nu,\omega} \chi^{\mathrm{s}}_\nu$ (см. [2, гл. I, раздел 6] и [3, § 2.2]). Заметим, что в силу инвариантности характера χ^{h}_ω относительно порядка перечисления частей разбиения ω из этой формулы следует корректность определения чисел Костки. Как легко проверить, $\mathcal{K}_{\Delta\omega,\omega} = 1$, и, таким образом, мы имеем

$$\chi^{\mathrm{s}}_{\Delta\omega} = \chi^{\mathrm{h}}_\omega - \sum\nolimits_{\nu > \Delta\omega} \mathcal{K}_{\nu,\omega} \chi^{\mathrm{s}}_\nu. \qquad (*)$$

Полученная формула будет играть ключевую роль в теореме 2.

Автор благодарен А. М. Вершику за постановку и обсуждения задачи о неразложимых характерах группы рациональных перекладываний отрезка; данная работа возникла из этих обсуждений.

1. Полиномиальность индуцированных характеров

Далее мы будем работать с индуцированными характерами групп S_n, вычисляя их при помощи явного правила (см. [3, § 7.2]).

Теорема 1. *Пусть $j \in \mathbb{N}_0$, $\psi \in \mathcal{P}_j$; тогда существует такой многочлен P^{h}_ψ от переменных $a_1, \ldots, a_j$ степени j, что*

(1) *для всех таких $n \in \mathbb{N}_0$, что $n \geqslant j$, и $u \in \mathrm{S}_n$, обозначая через ω разбиение $[n-j] + \psi \in \mathcal{P}_n$, мы имеем $\chi^{\mathrm{h}}_\omega(u) = P^{\mathrm{h}}_\psi(a_1(u), \ldots, a_j(u))$;*

(2) *старшую степень j в P^{h}_ψ имеет только одночлен $\frac{1}{\psi_1! \cdot \ldots \cdot \psi_r!} a_1^j$, где числа $\psi_1, \ldots, \psi_r$ суть части разбиения ψ.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{S}_n$; зададим многочлен T_u от переменных $x_1, \ldots, x_n$ степени n по формуле $T_u = \prod_{l=1}^n (x_1^l + \ldots + x_n^l)^{a_l(u)}$. В случае разбиения $\omega = [n-j] + \psi = [\psi_1, \ldots, \psi_r, n-j]$ упомянутое выше правило для вычисления значений индуцированных характеров означает, что число $\chi^{\mathrm{h}}_\omega(u)$ равно коэффициенту в многочлене T_u при одночлене $x_1^{\psi_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{\psi_r} x_{r+1}^{n-j}$.

Легко видеть, что этот одночлен в многочлене T_u возникает как произведения вида $\prod_{l=1}^{n}\bigl((x_1^l)^{t_{1,l}}\cdot\ldots\cdot(x_r^l)^{t_{r,l}}(x_{r+1}^l)^{a_l(u)-(t_{1,l}+\ldots+t_{r,l})}\bigr)$ для всех таких наборов $(t_{i,l})_{1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant l\leqslant n}$, что $t_{i,l}\in\mathbb{N}_0$ и $\sum_{l=1}^{n}t_{i,l}l=\psi_i$ для всех $i\in\{1,\ldots,r\}$ и $l\in\{1,\ldots,n\}$; ясно, что количество способов получить такое произведение есть

$$\prod_{l=1}^{n}\left(\binom{a_l(u)}{t_{1,l}}\binom{a_l(u)-t_{1,l}}{t_{2,l}}\cdot\ldots\cdot\binom{a_l(u)-(t_{1,l}+\ldots+t_{r-1,l})}{t_{r,l}}\right)$$
$$=\prod_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{t_{1,l}!\cdot\ldots\cdot t_{r,l}!}\,\frac{a_l(u)!}{(a_l(u)-(t_{1,l}+\ldots+t_{r,l}))!}\right).$$

Пусть $i\in\{1,\ldots,r\}$, тогда $\sum_{l=1}^{n}t_{i,l}l=\psi_i\leqslant j$; отсюда следует, что $t_{i,l}=0$ при $l>j$, поэтому множители, входящие в полученное произведение, могут отличаться от 1 только при $l\leqslant j$; в итоге это произведение есть многочлен от $a_1(u),\ldots,a_j(u)$ степени $\sum_{l=1}^{j}(t_{1,l}+\ldots+t_{r,l})$, в котором только одночлен $\prod_{l=1}^{j}\frac{1}{t_{1,l}!\cdot\ldots\cdot t_{r,l}!}\prod_{l=1}^{j}a_l(u)^{t_{1,l}+\ldots+t_{r,l}}$ имеет старшую степень. Отсюда мы видим, что величина $\chi_\omega^{\mathrm{h}}(u)$, являющаяся суммой этих многочленов по всем таким наборам $(t_{i,l})_{1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant l\leqslant j}$, что $t_{i,l}\in\mathbb{N}_0$ и $\sum_{l=1}^{j}t_{i,l}l=\psi_i$ для всех $i\in\{1,\ldots,r\}$ и $l\in\{1,\ldots,j\}$, есть одинаковый для любых $n\geqslant j$ многочлен от $a_1(u),\ldots,a_j(u)$; таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Заметим, что $\sum_{l=1}^{j}(t_{1,l}+\ldots+t_{r,l})=\sum_{l=1}^{j}t_{1,l}+\ldots+\sum_{l=1}^{j}t_{r,l}\leqslant\psi_1+\ldots+\psi_r=j$, при этом равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $(t_{i,l})_{1\leqslant l\leqslant j}=(\psi_i,0,\ldots,0)$ для любого $i\in\{1,\ldots,r\}$; это означает, что среди всех одночленов $\prod_{l=1}^{j}\frac{1}{t_{1,l}!\cdot\ldots\cdot t_{r,l}!}\prod_{l=1}^{j}a_l(u)^{t_{1,l}+\ldots+t_{r,l}}$ степень j (то есть старшую степень) имеет только одночлен $\frac{1}{\psi_1!\cdot\ldots\cdot\psi_r!}a_1(u)^j$; отсюда мы получаем второе утверждение теоремы. □

2. Лемма о числах Костки

Теперь мы докажем вспомогательное свойство чисел Костки.

Лемма. *Пусть $j,n\in\mathbb{N}_0$, $\psi\in\mathcal{P}_j$, причем $n\geqslant 2j$; определим отображение на множестве $\{\nu\in\mathcal{Y}_{2j}\mid\nu>(j)\cup\Delta\psi\}$ по правилу $\nu\mapsto\widetilde{\nu}$, где $\widetilde{\nu}$ – диаграмма Юнга, получающаяся при добавлении $n-2j$ клеток в первую строку диаграммы Юнга ν. Тогда*

(1) *это отображение является биекцией между указанным множеством и множеством $\{\widetilde{\nu}\in\mathcal{Y}_n\mid\widetilde{\nu}>(n-j)\cup\Delta\psi\}$;*

(2) *соответствующие числа Костки равны: $\mathcal{K}_{\nu,[j]+\psi}=\mathcal{K}_{\widetilde{\nu},[n-j]+\psi}$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из определения лексикографического порядка (то есть порядка $\geqslant$) на множестве диаграмм. Пусть $\psi = [\psi_1, \dots, \psi_r]$; тогда второе утверждение леммы следует из того, что добавление $n-2j$ клеток в первую строку диаграммы также устанавливает биекцию между такими последовательностями $(j) = \nu_1 \subset \dots \subset \nu_r = \nu$, что для всех $i \in \{2, \dots, r\}$ диаграмма ν_i/ν_{i-1} имеет ψ_i клеток и никакие две ее клетки не лежат в одном столбце, и такими последовательностями $(n-j) = \widetilde{\nu}_1 \subset \dots \subset \widetilde{\nu}_r = \widetilde{\nu}$, что для всех $i \in \{2, \dots, r\}$ диаграмма $\widetilde{\nu}_i/\widetilde{\nu}_{i-1}$ имеет ψ_i клеток и никакие две ее клетки не лежат в одном столбце. $\square$

3. Основная теорема

Наконец, мы готовы доказать основную теорему статьи.

Теорема 2. *Пусть $j \in \mathbb{N}_0$, $\mu \in \mathcal{Y}_j$; тогда существует такой многочлен P^{s}_μ от переменных $a_1, \dots, a_j$ степени j, что*

(1) *для всех таких $n \in \mathbb{N}_0$, что $n \geqslant 2j$, и $u \in \mathrm{S}_n$, обозначая через λ диаграмму $(n-j) \cup \mu \in \mathcal{Y}_n$, мы имеем $\chi^{\mathrm{s}}_\lambda(u) = P^{\mathrm{s}}_\mu(a_1(u), \dots, a_j(u))$;*

(2) *старшую степень j в P^{s}_μ имеет только одночлен $\frac{\chi^{\mathrm{s}}_\mu(\mathrm{id}_j)}{j!} a_1^j$.*

Доказательство. Сначала мы докажем, что существует такой удовлетворяющий первому условию теоремы многочлен от переменных $a_1, \dots, a_j$ степени не больше j, что его член степени j зависит только от a_1. Пусть ψ есть разбиение числа j на длины строк диаграммы μ, а $\omega = [n-j] + \psi$; тогда $\Delta\omega = (n-j) \cup \mu = \lambda$. Воспользуемся ключевой формулой $(*)$ из введения к статье для вычисления величины $\chi^{\mathrm{s}}_{\Delta\omega}(u)$. Применяя к первому члену возникающей таким образом разности теорему 1, а к области суммирования и коэффициентам во втором члене – лемму о числах Костки, мы получим

$$\begin{aligned}\chi^{\mathrm{s}}_{(n-j)\cup\mu}(u) &= \chi^{\mathrm{h}}_{[n-j]+\psi}(u) - \sum\nolimits_{\widetilde{\nu} > (n-j)\cup\mu} \mathcal{K}_{\widetilde{\nu}, [n-j]+\psi} \chi^{\mathrm{s}}_{\widetilde{\nu}}(u) \\ &= P^{\mathrm{h}}_\psi(a_1(u), \dots, a_j(u)) - \sum\nolimits_{\nu > (j)\cup\mu} \mathcal{K}_{\nu, [j]+\psi} \chi^{\mathrm{s}}_{\widetilde{\nu}}(u).\end{aligned}$$

Здесь P^{h}_ψ – многочлен из теоремы 1, а отображение $\nu \mapsto \widetilde{\nu}$ было описано в лемме о числах Костки. Первый член полученной разности – одинаковый для всех $n \geqslant 2j$ многочлен от $a_1(u), \dots, a_j(u)$ степени не больше j, причем его член степени j зависит только от $a_1(u)$. Отсюда следует, что теперь нам нужно показать, что такими же свойствами обладает и второй член этой разности.

Для доказательства сформулированного утверждения воспользуемся индукцией по j. Для $j=0$ оно верно, так как второй член разности равен 0. Проверим этот факт для $j \geqslant 1$, предполагая, что он верен для чисел от 0 до $j-1$; в индукционном переходе воспользуемся индукцией по μ относительно лексикографического порядка на $\mathcal{Y}_j$. Преобразуем второй член указанной выше разности:

$$\sum\nolimits_{\nu>(j)\cup\mu} \mathcal{K}_{\nu,[j]+\psi}\chi^{\mathrm{s}}_{\tilde{\nu}}(u)$$
$$=\sum_{t=0}^{j-1}\sum_{\xi\in\mathcal{Y}_t} \mathcal{K}_{(2j-t)\cup\xi,[j]+\psi}\chi^{\mathrm{s}}_{(n-t)\cup\xi}(u)+\sum_{\xi>\mu}\mathcal{K}_{(j)\cup\xi,[j]+\psi}\chi^{\mathrm{s}}_{(n-j)\cup\xi}(u).$$

Диаграмма $\mu=(j)$ – наибольшая диаграмма относительно лексикографического порядка на $\mathcal{Y}_j$; для нее рассматриваемое выражение сводится к $\sum\limits_{t=0}^{j-1}\sum\limits_{\xi\in\mathcal{Y}_t}\mathcal{K}_{(2j-t)\cup\xi,[j,j]}\chi^{\mathrm{s}}_{(n-t)\cup\xi}(u)=\sum\limits_{t=0}^{j-1}\chi^{\mathrm{s}}_{(n-t,t)}(u)$; по предположению индукции по j величина $\chi^{\mathrm{s}}_{(n-t,t)}(u)$ есть одинаковый для любых $n\geqslant 2t$ многочлен от $a_1(u),\dots,a_t(u)$ степени не больше $t<j$, поэтому указанная сумма – многочлен нужного нам вида.

Проверим требуемое утверждение для диаграммы $\mu\in\mathcal{Y}_j\setminus\{(j)\}$, предполагая, что оно выполнено для всех диаграмм $\xi>\mu$. Для этого заметим, что, как и выше, $\sum\limits_{t=0}^{j-1}\sum\limits_{\xi\in\mathcal{Y}_t}\mathcal{K}_{(2j-t)\cup\xi,[j]+\psi}\chi^{\mathrm{s}}_{(n-t)\cup\xi}(u)$ – многочлен с нужными свойствами по предположению индукции по j, а $\sum\limits_{\xi>\mu}\mathcal{K}_{(j)\cup\xi,[j]+\psi}\chi^{\mathrm{s}}_{(n-j)\cup\xi}(u)$ – по предположению индукции по μ.

Итак, $\chi^{\mathrm{s}}_{(n-j)\cup\mu}(u)$ есть одинаковый для всех $n\geqslant 2j$ многочлен от $a_1(u),\dots,a_j(u)$ степени не больше j, у которого член степени j зависит только от $a_1(u)$; обозначим этот многочлен через P^{s}_μ и проверим второе утверждение теоремы. Делая подстановку $u=\mathrm{id}_n$ (вычисляя $P^{\mathrm{s}}_\mu(n,0,\dots,0)$), заметим, что степень и старший коэффициент возникающего многочлена от n такие же, как у многочлена P^{s}_μ. С другой стороны, по формуле крюков (см. [3, § 4.3]) $\chi^{\mathrm{s}}_{(n-j)\cup\mu}(\mathrm{id}_n)$ есть отношение $n!$ к произведению длин крюков диаграммы $(n-j)\cup\mu$. Делитель этого отношения есть произведение длин крюков, отвечающих клеткам первой строки диаграммы $(n-j)\cup\mu$, и длин крюков диаграммы μ; анализируя это выражение и применяя формулу крюков к вычислению величины $\chi^{\mathrm{s}}_\mu(\mathrm{id}_j)$, легко проверить, что $\chi^{\mathrm{s}}_{(n-j)\cup\mu}(\mathrm{id}_n)$ – многочлен от n, старший член которого имеет нужный нам вид. $\square$

Выведем из теоремы 2 следствие об асимптотике неприводимых характеров групп S_n при периодических вложениях. Напомним, что для всех $l, m \in \mathbb{N}$ периодическое вложение S_l в S_{lm} есть сопоставление каждой перестановке $u \in \mathrm{S}_l$ перестановки $u \sqcap \mathrm{id}_m \in \mathrm{S}_{lm}$, где последняя перестановка определена для всякого $z \in \{0, \dots, lm-1\}$ по формуле $u \sqcap \mathrm{id}_m(z) = m\, u(\lfloor z/m \rfloor) + z \bmod m$. Как было отмечено во введении к статье, индуктивный предел групп S_n относительно периодических вложений (мы считаем, что множество $\mathbb{N}$ упорядочено по отношению делимости) есть группа рациональных перекладываний отрезка, см. [1]. Неразложимые характеры этой группы суть пределы сетей нормированных неприводимых характеров групп S_n; далее мы рассматриваем сеть диаграмм Юнга $(\lambda_n)_{n \in N}$, где N – кофинальное подмножество в $\mathbb{N}$ (то есть множество, содержащее кратные любых чисел), и находим предел соответствующей сети характеров для случая, когда величина $n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)$, где $\mathrm{r}_1(\lambda_n)$ – длина первой строки диаграммы λ_n, имеет конечный предел.

Следствие. *Пусть N – кофинальное подмножество в $\mathbb{N}$, $(\lambda_n)_{n \in N} \in \prod_{n \in N} \mathcal{Y}_n$, $\lim_{n \in N}(n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)) = k \in \mathbb{N}_0$; тогда для всех $l \in N$, $u \in \mathrm{S}_l$ мы имеем $\lim_{m \in (\frac{1}{l}N) \cap \mathbb{N}} \big(\chi^{\mathrm{s}}_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m) / \chi^{\mathrm{s}}_{\lambda_{lm}}(\mathrm{id}_{lm})\big) = \big(a_1(u)/l\big)^k$.*

Доказательство. Начнем доказательство следствия с леммы.

Лемма. *Для любого $k \in \mathbb{N}_0$ существует такая константа C, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathrm{S}_n$ и таких $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, что $n - \mathrm{r}_1(\lambda) \leqslant k$, мы имеем*
$$\left| \frac{\chi^{\mathrm{s}}_\lambda(u)}{\chi^{\mathrm{s}}_\lambda(\mathrm{id}_n)} - \Big(\frac{a_1(u)}{n}\Big)^{n - \mathrm{r}_1(\lambda)} \right| \leqslant \frac{C}{n}.$$

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем предположить, что $n \geqslant 2k$. Обозначим $n - \mathrm{r}_1(\lambda)$ через j; тогда $\lambda = (n-j) \cup \mu$, где μ есть диаграмма Юнга с j клетками и $n \geqslant 2k \geqslant 2j$.

Применяя теорему 2, для всех $u \in \mathrm{S}_n$ мы получаем
$$\left| \frac{\chi_\lambda(u)}{\chi_\lambda(\mathrm{id}_n)} - \Big(\frac{a_1(u)}{n}\Big)^j \right| = \left| \frac{P_\mu(a_1(u), \dots, a_j(u))}{P_\mu(n, 0, \dots, 0)} - \frac{a_1(u)^j}{n^j} \right|$$
$$= \frac{\big| n^j \big(d_\mu a_1(u)^j + R_\mu(a_1(u), \dots)\big) - a_1(u)^j \big(d_\mu n^j + R_\mu(n, 0, \dots)\big)\big|}{n^j P_\mu(n, 0, \dots, 0)}.$$
Здесь P_μ – многочлен, существование которого утверждается в этой теореме (все индексы s опущены), d_μ – его старший коэффициент, а $R_\mu = P_\mu - d_\mu a_1^j$ – многочлен от $a_1, \dots, a_j$ степени меньше j.

Преобразуем числитель полученной дроби, сокращая общее слагаемое $d_\mu n^j a_1(u)^j$ и заменяя все коэффициенты на их модули, а все величины $a_i(u)$ – на их максимальные значения $\frac{n}{i}$, где $i \in \{1, \dots, j\}$; таким образом мы сможем оценить числитель многочленом от n степени меньше $2j$. При этом знаменатель полученной дроби – многочлен от n степени $2j$, поэтому вся дробь оценивается выражением $\frac{C_\mu}{n}$ для всех $n \geqslant 2k$ и некоторой константы C_μ. Для завершения доказательства остается определить константу C как максимум среди констант C_μ для всех диаграмм μ с не более чем k клетками. □

Пусть теперь $(\lambda_n)_{n\in N} \in \prod_{n\in N} \mathcal{Y}_n$ и $\lim_{n\in N}(n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)) = k \in \mathbb{N}_0$; тогда $n - \mathrm{r}_1(\lambda_n) = k$ для любых достаточно больших (в смысле отношения делимости) $n \in N$; используя лемму для перестановки $u \sqcap \mathrm{id}_m$ и диаграммы λ_{lm}, мы получаем, что существует такая константа C, что $\left|\chi^{\mathrm{s}}_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m)/\chi^{\mathrm{s}}_{\lambda_{lm}}(\mathrm{id}_{lm}) - \big(a_1(u)/l\big)^k\right| \leqslant C/(lm)$ для всех достаточно больших $m \in (\frac{1}{l}N) \cap \mathbb{N}$. Переходя в этой оценке к пределу при $m \to \infty$, мы получаем требуемое утверждение. □

Литература

1. Е. Е. Горячко, Ф. В. Петров, *Неразложимые характеры группы рациональных перекладываний отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **378** (2010), 17–31.
2. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* М., Мир (1985).
3. У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии.* М., МЦНМО (2006).

Goryachko E. E. Polynomiality of irreducible characters of the symmetric groups.

Consider Young diagrams differing only by the length of the first row (i.e., the form of diagrams below the first row is fixed). We prove that the values of the irreducible characters of the groups S_n corresponding to these diagrams are given by a polynomial of a special form with respect to natural parameters related to the cycle notation of permutations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: eugene@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2010 г.