Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 378, 2010 г.

Е. Е. Горячко, Ф. В. Петров

НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПЕРЕКЛАДЫВАНИЙ ОТРЕЗКА

Введение

Группа рациональных перекладываний отрезка (группа R) состоит из всех таких автоморфизмов полуинтервала $[0,1)$, снабженного мерой Лебега (далее мы будем называть его "отрезок"), что действие каждого из них есть перекладывание конечного числа полуинтервалов с рациональными концами, образующих разбиение отрезка.

В настоящей работе *дано полное описание неразложимых характеров группы* R. Это сделано в рамках аппроксимативного подхода, развитого А. М. Вершиком и С. В. Керовым в [2, 3].

Наше доказательство легко переносится на случай группы q-ично-рациональных перекладываний отрезка (то есть перекладываний полуинтервалов с q-ично-рациональными концами) для любого $q \in 2\mathbb{N}$, причем список неразложимых характеров этой группы оказывается таким же, как и у R. Отметим, что для $q = 2$ эта группа рассматривается, например, в [1, 7–9]. При этом в работе [1] описаны все инвариантные относительно данной группы неразложимые положительно определенные функционалы в $\mathrm{L}^2([0,1))$ (эта задача тесно связана с нашей), а в статье [8] также приводится полное описание ее неразложимых характеров (метод этой статьи совершенно другой).

Напомним основные определения и факты, относящиеся к группе R (подробное изложение см. в [5]). Для всех $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество $\{x, x+1, \dots, y\}$ обозначим через $[x, y]$. Мы считаем, что симметрическая группа S_n, $n \in \mathbb{N}$, действует на $[0, n-1]$; ее нейтральный элемент мы обозначим через id_n. Пусть $l, m \in \mathbb{N}$, $u \in \mathrm{S}_l$, $v \in \mathrm{S}_m$; тогда *прямое произведение* $u \sqcap v \in \mathrm{S}_{lm}$ есть перестановка, определенная для любых $z \in [0, lm-1]$ по формуле $u \sqcap v(z) = m\, u(\lfloor z/m \rfloor) + v(z \bmod m)$.

Ключевые слова: перекладывания отрезка, неразложимые характеры, периодические вложения, диаграммы Юнга, правило Мурнагана–Накаямы.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00379-а, 09-01-12175-офи_м и 10-01-90411-Укр_а.

Периодическое вложение группы S_l в S_{lm} есть сопоставление любой перестановке $u \in \mathrm{S}_l$ перестановки $u \sqcap \mathrm{id}_m$; ясно, что это отображение – мономорфизм групп. Упорядочивая множество $\mathbb{N}$ по отношению делимости, мы получаем, что группы S_n, $n \in \mathbb{N}$, образуют индуктивное семейство относительно периодических вложений.

Для всех $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathrm{S}_n$ обозначим через g_u рациональное перекладывание, переставляющее полуинтервалы $[0, \frac{1}{n}), \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1)$ согласно действию перестановки u (тогда $g_u(x) = \frac{u(\lfloor xn \rfloor) + \{xn\}}{n}$ для любого $x \in [0, 1)$). Так реализуются все элементы группы R; кроме того, сопоставление $u \mapsto g_u$ инвариантно относительно периодических вложений групп S_n. Отсюда следует, что *группа* R *есть индуктивный предел групп* S_n, $n \in \mathbb{N}$, *относительно этих вложений.*

Итак, мы представили группу R в виде индуктивного предела не более чем счетного семейства конечных групп. В следующих далее двух определениях G – произвольная группа такого вида.

Определение 1. *Комплексная функция χ на G – характер группы G, если она центральна ($\chi(gh) = \chi(hg)$ для всех $g, h \in G$), нормирована ($\chi(1) = 1$), неотрицательно определена (матрица $\left(\chi(g_i g_j^{-1})\right)_{1 \le i,j \le n}$ неотрицательно определена для всех $n \in \mathbb{N}$ и $g_1, \ldots, g_n \in G$).*

Определение 2. *Характер группы G будем называть неразложимым, если его нельзя представить в виде нетривиальной выпуклой комбинации характеров группы G.*

Если $|G| < \infty$, то неразложимые характеры группы G суть нормированные (поделенные на размерность) неприводимые характеры группы G в смысле теории представлений конечных групп.

Определение 3. *Натуральным характером χ_{nat} группы* R *будем называть функцию, значение которой на данном перекладывании – мера множества неподвижных относительно него точек отрезка.*

А. М. Вершик сформулировал гипотезу о том, что *все неразложимые характеры группы* R *суть степени χ_{nat}^k ее натурального характера, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$* (при $k = 0$ мы получаем единичный характер группы R, а при $k = \infty$ – регулярный характер, то есть функцию δ_{id} на группе R). Этот факт является следствием нашей основной теоремы об асимптотике характеров групп S_n при периодических вложениях; таким образом, наша схема рассуждений следует статье [2], где аппроксимативный подход применяется к описанию неразложимых характеров бесконечной симметрической группы.

Раздел 1 статьи начинается с применения к группе R общей теоремы об аппроксимации неразложимых характеров индуктивных пределов конечных групп (теорема 1); далее мы формулируем основную теорему, описывающую предельное поведение неразложимых характеров групп S_n при периодических вложениях, и сводим ее к теореме 2 с более простой формулировкой. Доказательство этой теоремы распадается на два больших и непохожих случая: $k < \infty$ и $k = \infty$, где k – показатель степени натурального характера группы R. Решение рассматриваемой задачи в первом из них получается как следствие представляющего самостоятельный интерес свойства полиномиальности неприводимых характеров групп S_n (см. статью [6] в этом сборнике). Второй случай составляет содержание теоремы 3. В ее доказательстве также возникает отдельный случай перестановок, длины циклов которых не взаимно просты в совокупности. В этом случае решение задачи чисто алгебраическое и следует из мультипликативности неразложимых характеров группы R (раздел 2). Наконец, для всех остальных перестановок рассматриваемая задача решается при помощи классического правила Мурнагана–Накаямы для вычисления неприводимых характеров групп S_n (разделы 3–5).

Авторы глубоко признательны А. М. Вершику за постановку задачи и множество полезных обсуждений и благодарны К. П. Кохасю и Е. М. Рудо за тщательную проверку доказательств.

1. Основная теорема

Ниже мы будем рассматривать сети, занумерованные множеством $\mathbb{N}$, упорядоченным относительно делимости чисел, а также пределы этих сетей в соответствующем обобщенном смысле.

Определение 4. *Сеть $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где χ_n – характер группы S_n для всех $n \in \mathbb{N}$, слабо сходится относительно периодических вложений к характеру χ группы R, если для всех $l \in \mathbb{N}$ и $u \in \mathrm{S}_l$ числовая сеть $\big(\chi_{lm}(u\sqcap\mathrm{id}_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к $\chi(g_u)$ (перекладывание g_u соответствует перестановке u так, как это было описано во введении).*

Теорема 1. *Все неразложимые характеры группы R и только они суть пределы слабо сходящихся относительно периодических вложений сетей неразложимых характеров групп S_n, $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Это утверждение – частный случай общей теоремы об аппроксимации неразложимых характеров (см. [3, § 9]). □

Далее мы будем работать с неразложимыми характерами симметрических групп, используя классическое соответствие между ними и диаграммами Юнга (см. [4, раздел 5]). Для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество диаграмм Юнга с n клетками обозначим через $\mathcal{Y}_n$. Пусть $\lambda \in \mathcal{Y}_n$; неразложимый характер группы S_n, соответствующий диаграмме λ, обозначим через $\overline{\chi}_\lambda$. Также пусть числа $\mathrm{r}_1(\lambda)$ и $\mathrm{c}_1(\lambda)$ суть длины первых строки и столбца диаграммы λ соответственно. Теперь мы готовы сформулировать нашу основную теорему.

Основная теорема. *Пусть $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_n$; тогда слабая сходимость сети неразложимых характеров $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ групп S_n равносильна сходимости числовой сети $\big(n - \max(\mathrm{r}_1(\lambda_n), \mathrm{c}_1(\lambda_n))\big)_{n\in\mathbb{N}}$, причем в случае сходимости данной сети к числу $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ сеть $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к характеру χ^k_{nat} группы* R.

Следствие. *Неразложимые характеры группы* R *суть в точности функции χ^k_{nat}, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.*

Доказательство. По теореме 1 все неразложимые характеры группы R – слабые пределы сетей неразложимых характеров групп S_n, $n \in \mathbb{N}$, но в силу основной теоремы все эти пределы суть функции χ^k_{nat}, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, поэтому все неразложимые характеры группы R являются такими функциями. То, что все характеры χ^k_{nat}, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, являются неразложимыми, было доказано в [5]; впрочем, этот факт также следует из упомянутых теорем, так как для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ легко предъявить такую сеть $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_n$, что $\lim_{n\in\mathbb{N}}\big(n - \max(\mathrm{r}_1(\lambda_n), \mathrm{c}_1(\lambda_n))\big) = k$. □

Заметим, что в основной теореме достаточно доказать, что из сходимости статистики $n - \max(\mathrm{r}_1(\lambda_n), \mathrm{c}_1(\lambda_n))$ к числу k следует сходимость соответствующей сети характеров к характеру χ^k_{nat}; это нужно сделать, однако, не только для сетей, занумерованных множеством $\mathbb{N}$, но и для всех их подсетей (они занумерованы кофинальными подмножествами в $\mathbb{N}$, то есть множествами, содержащими кратные любых чисел). Если это так, то утверждение основной теоремы следует из того, что в случае отсутствия предела указанной статистики для сети диаграмм мы (в силу компактности множества $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$) можем выбрать в ней две подсети с разными пределами этой статистики; тогда мы получим, что соответствующие им подсети характеров имеют разные пределы, поэтому сеть характеров, соответствующая исходной сети диаграмм, также не имеет предела.

Ясно, что условие сходимости сетей $\left(\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m)\right)_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}}$ одновременно для всех $l \in N$ и $u \in \mathrm{S}_l$ (здесь N – кофинальное подмножество в $\mathbb{N}$, $(\lambda_n)_{n\in N} \in \prod_{n\in N}\mathcal{Y}_n)$ не зависит от замены u на $u \sqcap \mathrm{id}_2$, поэтому мы можем проверять это условие только для четных перестановок. Как известно, если перестановка u четная, то значение характера $\overline{\chi}_{\lambda_n}(u)$ не меняется при транспонировании диаграммы Юнга λ_n, и, значит, не умаляя общности, можно предположить, что для всех интересующих нас диаграмм мы имеем $\mathrm{r}_1(\lambda_n) \geq \mathrm{c}_1(\lambda_n)$, а тогда $n - \max(\mathrm{r}_1(\lambda_n), \mathrm{c}_1(\lambda_n)) = n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)$. Итак, мы свели основную теорему к следующей теореме с более простой формулировкой.

Теорема 2. *Пусть N – кофинальное подмножество в $\mathbb{N}$, $(\lambda_n)_{n\in N} \in \in \prod_{n\in N}\mathcal{Y}_n$, $\mathrm{r}_1(\lambda_n) \geq \mathrm{c}_1(\lambda_n)$ для всех $n \in N$, $\lim_{n\in N}(n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)) = k$; тогда сеть $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N}$ слабо сходится к χ^k_{nat}, то есть для всех $l \in N$ и $u \in \mathrm{S}_l$ мы имеем $\lim_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}}\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m) = \chi^k_{\mathrm{nat}}(g_u)$.*

Наше доказательство этой теоремы для случаев $k < \infty$ и $k = \infty$ совершенно разное. В первом случае утверждение теоремы является следствием теоремы о полиномиальности неприводимых характеров симметрических групп (см. [6, раздел 3]). Оставшаяся часть настоящей работы посвящена второму случаю. Переформулируем теорему 2 для $k = \infty$, пользуясь тем, что $\chi^\infty_{\mathrm{nat}} = \delta_{\mathrm{id}}$.

Теорема 3. *Пусть N – кофинальное подмножество в $\mathbb{N}$, $(\lambda_n)_{n\in N} \in \in \prod_{n\in N}\mathcal{Y}_n$, $\mathrm{r}_1(\lambda_n) \geq \mathrm{c}_1(\lambda_n)$ для всех $n \in N$, $\lim_{n\in N}(n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)) = \infty$; тогда сеть $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N}$ слабо сходится к δ_{id}, то есть для любых $l \in N$ и $u \in \mathrm{S}_l \setminus \{\mathrm{id}_l\}$ мы имеем $\lim_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}}\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m) = 0$.*

Явное доказательство этой теоремы будет дано в разделе 5 для перестановок, длины циклов которых взаимно просты в совокупности. Оказывается, что можно чисто алгебраически (без предельного перехода) доказать, что на всех перекладываниях, отвечающих остальным перестановкам, всякий неединичный неразложимый характер группы R обращается в 0. Это алгебраическое доказательство, а также сведение теоремы 3 к этому факту (по модулю упомянутого доказательства из раздела 5) приведены в следующем разделе.

2. Случай перестановок, длины циклов которых не взаимно просты в совокупности

В формулировке следующего общего факта группа G – индуктивный предел не более чем счетного семейства конечных групп.

Предложение 1. *Пусть χ есть характер группы G, тогда множество $\chi^{-1}(1)$ – нормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $g \in G$; легко видеть, что из неотрицательной определенности матрицы, фигурирующей в определении 1 для $g_1 = 1$, $g_2 = g$, следует, что $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Далее пусть $g, h \in G$, причем $\chi(g) = \chi(h) = 1$; рассмотрим аналогичную неотрицательно определенную матрицу для $g_1 = g$, $g_2 = h^{-1}$, $g_3 = gh^{-1}$; ясно, что из неотрицательности определителя этой матрицы следует, что $\chi(gh) = 1$. Таким образом, множество $\chi^{-1}(1)$ – подгруппа группы G; тот факт, что она нормальна, следует из центральности функции χ. □

Далее мы воспользуемся свойством мультипликативности неразложимых характеров группы R, доказанным в [5]; оно состоит в том, что характер χ группы R неразложим, если и только если для всех $l, m \in \mathbb{N}$, $u \in \mathrm{S}_l$ и $v \in \mathrm{S}_m$ мы имеем $\chi(g_{u \sqcap v}) = \chi(g_u)\chi(g_v)$.

Предложение 2. *Пусть χ есть неединичный неразложимый характер группы R, а u есть перестановка, длины циклов которой не взаимно просты в совокупности. Тогда $\chi(g_u) = 0$.*

Доказательство. Пусть число m есть нетривиальный общий делитель длин циклов перестановки u, а перестановка v состоит только из одного цикла длины m; легко проверить, что тогда перестановка $u \sqcap v$ сопряжена с перестановкой $u \sqcap \mathrm{id}_m$ (см. [5, раздел 3]). Отсюда в силу мультипликативности характера χ следует, что $\chi(g_u)\chi(g_v) = \chi(g_u)$; в частности, при $u = v$ мы имеем $\chi(g_v) \in \{0, 1\}$.

Заметим, что группа R простая (это следует из того, что перестановка $w \sqcap \mathrm{id}_2$ четна для всякой перестановки w и, значит, группа R является индуктивным пределом знакопеременных групп степени хотя бы 5, каждая из которых проста). Используя предложение 1 для группы $G = \mathrm{R}$, а также то, что $\chi(g_v) \in \{0, 1\}$ и $\chi \neq 1$, отсюда мы получаем, что $\chi(g_v) = 0$ и потому $\chi(g_u) = \chi(g_u)\chi(g_v) = 0$. □

Докажем, что теорему 3 достаточно проверить только для случая перестановок, длины циклов которых взаимно просты в совокупности (это будет сделано в разделах 3–5). Пусть сначала сеть $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n \in N}$ из ее формулировки сходится; тогда из теоремы 1 и результата разделов 3–5 следует, что ее предел – неразложимый характер группы R, обращающийся в 0 на всех перекладываниях, отвечающих упомянутым перестановкам. По предложению 2 и на остальных неединичных перекладываниях он обращается в 0 и, значит, равен δ_{id}.

Для завершения доказательства покажем, что случай отсутствия предела сети $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N}$ исключен. Предположив противное, построим такое кофинальное подмножество N_0 в N, что сеть $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N_0}$ имеет предел, отличный от δ_{id}; из предыдущего абзаца следует, что все сходящиеся подсети сети $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N}$ должны сходиться к δ_{id}, поэтому таким образом мы получим противоречие. Итак, пусть сеть $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N}$ расходится; определим множество N_0 с помощью следующего индуктивного процесса. База: зафиксируем некоторый полный порядок на $\bigcup_{n\in N}\mathrm{S}_n$ так, что для первой относительно него перестановки $u\in\mathrm{S}_l$ сеть $\big(\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u\sqcap\mathrm{id}_m)\big)_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}}$ расходится. В силу того, что характеры принимают значения в компакте $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1\}$, отсюда следует, что мы можем выбрать в $N\cap l\mathbb{N}$ такое кофинальное подмножество N_1, что подсеть $\big(\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u\sqcap\mathrm{id}_m)\big)_{m\in\frac{1}{l}N_1}$ имеет ненулевой предел. Переход: пусть $u\in\mathrm{S}_l$ – i-я ($i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$) перестановка относительно зафиксированного порядка; выберем в $N_{i-1}\cap l\mathbb{N}$ такое кофинальное подмножество N_i, что сеть $\big(\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u\sqcap\mathrm{id}_m)\big)_{m\in\frac{1}{l}N_i}$ сходится. Положим $N_0=\{\min N_1,\min N_2,\dots\}$; это множество содержит кратные любых чисел, поэтому оно кофинально в N; кроме того, из построения видно, что для всех $l\in N$ и $u\in\mathrm{S}_l$ сеть $\big(\overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u\sqcap\mathrm{id}_m)\big)_{m\in(\frac{1}{l}N_0)\cap\mathbb{N}}$ имеет предел, причем для первой относительно зафиксированного порядка перестановки он отличен от 0. Таким образом, сеть $(\overline{\chi}_{\lambda_n})_{n\in N_0}$ имеет предел, отличный от δ_{id}, что нам и требовалось.

Оставшаяся часть нашей работы посвящена доказательству теоремы 3 для перестановок, длины циклов которых взаимно просты в совокупности. Оно начинается с двух вспомогательных лемм (арифметической и комбинаторной), доказанных в разделах 3 и 4.

3. Арифметическая лемма

До конца статьи зафиксируем перестановку $u\in\mathrm{S}_l\setminus\{\mathrm{id}_l\}$, длины циклов которой взаимно просты в совокупности, и обозначим количество циклов через c и их длины через $l_1,\dots,l_c$; тогда $l_1+\dots+l_c=l$, $\gcd(l_1,\dots,l_c)=1$ и мы можем считать, что $l_1\ge 2$.

Определение 5. *Пусть $m\in\mathbb{N}$; тогда m-порядок есть разбиение отрезка $[1,lm]$ на cm отрезков длин* $\underbrace{l_1,\dots,l_1}_{m\text{ раз}},\underbrace{l_2,\dots,l_2}_{m\text{ раз}},\dots,\underbrace{l_c,\dots,l_c}_{m\text{ раз}}$.

Иначе говоря, m-порядок есть упорядочивание длин циклов перестановки $u\sqcap\mathrm{id}_m$; множество всех m-порядков обозначим через $\mathcal{O}_m$.

Определение 6. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathcal{O}_m$, $x \in [1, lm]$; тогда число x – особое относительно m-порядка σ, если некоторый из отрезков длины l_1, образующих данный m-порядок, начинается с x.*

Лемма 1. *Существует набор $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$, где α_m есть дискретная вероятностная мера на $\mathcal{O}_m$, обладающий свойством: для любых $\varepsilon > 0$ и $s \in \mathbb{N}$ существует такое $t(\varepsilon, s) \in \mathbb{N}$, что для всякого подмножества X отрезка $[1, lm]$, содержащего хотя бы $t(\varepsilon, s)$ элементов, мы имеем*

$$\alpha_m\big(\{\sigma \in \mathcal{O}_m \mid |\{x \in X \mid x \text{ – особое относительно } \sigma\}| < s\}\big) < \varepsilon.$$

Доказательство. Начнем доказательство леммы с подлеммы.

Подлемма. *Существует число $t_0 \in l\mathbb{N}$, удовлетворяющее следующему условию: для всех таких чисел $m, t \in \mathbb{N}$, что $t_0 \leq t \leq lm/2$, найдутся такие натуральные числа $f_1, \dots, f_c < m$, что $t = \sum_{i=1}^{c} f_i l_i$.*

Доказательство. Из того, что $\gcd(l_1, \dots, l_c) = 1$, мы получаем, что существуют такие целые числа $e_1, \dots, e_c$, что $1 = \sum_{i=1}^{c} e_i l_i$. Обозначим $e = \max_i |e_i|$, $t_0 = el^2$; докажем, что число t_0 – искомое. Для этого рассмотрим число $t \geq t_0$ и поделим его на l с остатком: $t = ql + r$. Тогда $el = t_0/l \leq q \leq t/l$ и $0 \leq r < l$; из данных оценок мы получаем, что $t = \sum_{i=1}^{c} f_i l_i$, где $f_i = q + e_i r$, – требуемое представление числа t, так как $0 < q \leq q + e_i r < q + el \leq 2q \leq 2t/l \leq m$. □

Пусть $m \in \mathbb{N}$; назовем некраевыми числами отрезка $[1, lm]$ числа подотрезка $[t_0 + 1, lm - t_0 - l_1 + 1]$, где $t_0 \in l\mathbb{N}$ определено в подлемме. Фиксируя некраевое число x, построим по нему m-порядок, относительно которого число x особое, при помощи следующей процедуры. Разобьем отрезок $[1, lm]$ на три подотрезка, отметив в нем отрезок длины l_1, начинающийся с x (тем самым мы гарантируем, что x особое). Пусть t – длина меньшего из оставшихся подотрезков, тогда $t_0 \leq t \leq lm/2$; используя подлемму, произвольно разобьем этот подотрезок на отрезки длин $l_1, \dots, l_1$ (f_1 раз), $\dots, l_c, \dots, l_c$ (f_c раз). Третий из подотрезков произвольно разобьем при помощи оставшихся $cm - f_1 - \ldots - f_c - 1$ отрезков. Пусть $m \geq 2t_0/l + 1$; тогда множество m-порядков, получающихся описанным образом по всем некраевым числам отрезка $[1, lm]$, непусто, и, значит, мы можем рассмотреть на нем равномерную вероятностную меру; из построения видно, что относительно нее каждое некраевое число отрезка – особое с вероятностью хотя бы $1/(lm)$. Обозначим через β_i, где $m = im_0/2$, $i \in [1, 3]$ и $m_0 = 4t_0/l + 2$, распространение этой меры нулем на $\mathcal{O}_m$.

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и положим $d = \lfloor m/m_0 \rfloor$. Определим независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_d$ на $[1, lm]$ по правилу: величина ξ_i равна ilm_0 или $ilm_0 - lm_0/2$ с вероятностью $1/2$; тогда $\xi_{i+1} - \xi_i \in \in \{lm_0/2, lm_0, 3lm_0/2\}$ для всех $i \in [1, d-1]$ с вероятностью 1. Докажем, что любое число отрезка $[lm_0+1, (d-1)lm_0]$ – некраевое на содержащем его отрезке $[\xi_i+1, \xi_{i+1}]$ с вероятностью хотя бы $1/2$ (некраевые числа этого отрезка определяются с помощью его отождествления с отрезком $[1, lm_0/2]$, $[1, lm_0]$ или $[1, 3lm_0/2]$). Доказательство состоит из разбора трех случаев вида отрезка, которому принадлежит рассматриваемое число: отрезок $[ilm_0+1, ilm_0+t_0]$ для подходящего $i \in [1, d-2]$ – тогда число некраевое, как только $\xi_i = ilm_0 - lm_0/2$; отрезок $[ilm_0+t_0+1, (i+1)lm_0 - t_0 - l_1 + 1]$ – тогда число некраевое, как только $\xi_{i+1} = (i+1)lm_0$; отрезок $[(i+1)lm_0 - t_0 - l_1 + 2, (i+1)lm_0]$ – тогда число некраевое, как только $\xi_{i+1} = (i+1)lm_0 - lm_0/2$.

Теперь мы можем определить вероятностную меру α_m на множестве $\mathcal{O}_m$ следующим образом. Рассмотрим случайное разбиение отрезка $[1, lm]$ на отрезки $[1, \xi_1], [\xi_1+1, \xi_2], \dots, [\xi_{d-1}+1, \xi_d], [\xi_d+1, lm]$. Каждый из них, кроме, может быть, последнего, есть сдвиг отрезка $[1, lm_0/2]$, $[1, lm_0]$ или $[1, 3lm_0/2]$. Мера α_m определяется путем независимого выбора случайного (относительно вероятностной меры β_1, β_2 или β_3) $m_0/2$-, m_0- или $3m_0/2$-порядка на каждом отрезке этого разбиения, кроме, может быть, последнего; на отрезке $[\xi_d+1, lm]$ порядок можно выбрать произвольным образом.

Проверим два ключевых свойства меры α_m. Для любого x из отрезка $[lm_0+1, (d-1)lm_0]$ мы обозначим через $\mathcal{O}_{m,x}$ множество таких $\sigma \in \mathcal{O}_m$, что x – особое относительно σ. Проверим, что $\alpha_m(\mathcal{O}_{m,x}) \geq \geq 1/(3lm_0)$ и множества $\mathcal{O}_{m,x}$ и $\mathcal{O}_{m,y}$ независимы для всяких таких $x, y \in [lm_0+1, (d-1)lm_0]$, что $|x-y| \geq 3lm_0$. Первое свойство доказывается так: пусть число x – некраевое на содержащем его отрезке $[\xi_i+1, \xi_{i+1}]$ (как было доказано выше, это так с вероятностью хотя бы $1/2$), тогда число x – особое с вероятностью хотя бы $2/(3lm_0)$ по мере β_1, β_2 или β_3 в зависимости от длины данного отрезка; в итоге число x – особое с вероятностью хотя бы $1/(3lm_0)$ по мере α_m. Второе свойство получается из того, что если $x \in [ilm_0+1, (i+1)lm_0]$ и $y \in [jlm_0+1, (j+1)lm_0]$, где $i, j \in [1, d-2]$, то событие "число x (число y соответственно) особое" зависит только от величин $\xi_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}$ ($\xi_j, \xi_{j+1}, \xi_{j+2}$ соответственно); при этом условие $|x-y| \geq 3lm_0$ означает, что эти наборы случайных величин не пересекаются и потому независимы и, значит, указанные события тоже независимы.

Докажем, что набор мер $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию из формулировки леммы. Обозначим указанное в ней подмножество в $\mathcal{O}_m$, меру которого нужно оценить, через $\mathcal{O}_{m,X,s}$. Пусть $t = |X|$; найдем условие на $t(\varepsilon, s) \in \mathbb{N}$, гарантирующее, что $\alpha_m(\mathcal{O}_{m,X,s}) < \varepsilon$, если $t \geq t(\varepsilon, s)$. Легко доказать, что в X можно так выбрать подмножество X', что $t' = |X'| \geq \lceil t/(3lm_0)\rceil - 1$ и все элементы множества X' принадлежат отрезку $[lm_0 + 1, (d-1)lm_0]$ и имеют одинаковый остаток по модулю $3lm_0$. Ясно, что $\mathcal{O}_{m,X,s} \subseteq \mathcal{O}_{m,X',s}$, поэтому $\alpha_m(\mathcal{O}_{m,X,s}) \leq \alpha_m(\mathcal{O}_{m,X',s})$. Множество $\mathcal{O}_{m,X',s}$ – дизъюнктное объединение множеств $\{\sigma \in \mathcal{O}_m \mid |\{x \in X' \mid x \text{ – особое относительно } \sigma\}| = r\}$ по всем $r \in [0, s-1]$. Каждое из этих множеств – дизъюнктное объединение множеств $\bigcap_{x\in Y} \mathcal{O}_{m,x} \cap \bigcap_{x\in X'\setminus Y}(\mathcal{O}_m \setminus \mathcal{O}_{m,x})$ по всем таким подмножествам Y в X', что $|Y| = r$. В силу свойств меры α_m, доказанных в предыдущем абзаце, и определения множества X', мера последнего множества не превосходит $(1 - 1/(3lm_0))^{t'-r}$, поэтому $\alpha_m(\mathcal{O}_{m,X,s}) \leq st'^s(1 - 1/(3lm_0))^{t'-s}$. Искомое условие на $t(\varepsilon, s)$ состоит в том, что полученное выражение должно быть меньше ε. □

4. Комбинаторная лемма

Далее мы работаем с диаграммами Юнга, считая, что их строки растут слева направо, а столбцы – сверху вниз. Напомним, что таблица формы $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, есть такое заполнение числами из отрезка $[1, n]$ клеток диаграммы λ, что числа по строкам и столбцам возрастают; множество всех таблиц формы λ обозначим через $\mathcal{T}_\lambda$.

Определение 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, $\tau \in \mathcal{T}_\lambda$, $x \in [1, n]$; тогда число x – важное относительно таблицы τ, если число $x + 1$ не стоит в клетках диаграммы λ, соседних справа или снизу с той клеткой, в которой стоит число x.*

Это определение будет мотивировано в разделе 5 (когда мы применим правило Мурнагана–Накаямы). До конца статьи фиксируем такие кофинальное подмножество N в $\mathbb{N}$ и сеть $(\lambda_n)_{n\in N} \in \prod_{n\in N} \mathcal{Y}_n$, что $\mathrm{r}_1(\lambda_n) \geq \mathrm{c}_1(\lambda_n)$ для всех $n \in N$ и $\lim_{n\in N}(n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)) = \infty$.

Лемма 2. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $t \in \mathbb{N}$ существует такое $n(\varepsilon, t) \in N$, что для всех $n \in N \cap (n(\varepsilon, t)\mathbb{N})$ имеет место оценка*

$$\left|\left\{\tau \in \mathcal{T}_{\lambda_n} \mid |\{x \in [1, n] \mid x \text{ – важное относительно } \tau\}| < t\right\}\right| < \varepsilon|\mathcal{T}_{\lambda_n}|.$$

Доказательство. Начнем доказательство леммы с подлеммы.

Подлемма. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, $\mathrm{r}_1(\lambda) \geq \mathrm{c}_1(\lambda)$; *тогда мы имеем*

$$|\mathcal{T}_\lambda| \geq \frac{1}{\left\lceil \sqrt{n - \mathrm{r}_1(\lambda)} \right\rceil !} \, n^{\frac{\left\lceil \sqrt{n - \mathrm{r}_1(\lambda)} \right\rceil - 1}{2}}.$$

Доказательство. Ясно, что $|\mathcal{T}_\lambda| \geq |\mathcal{T}_\mu|$ для любой поддиаграммы μ в λ. Число таблиц мы будем вычислять по формуле крюков. Длину второй строки диаграммы λ обозначим через $\mathrm{r}_2(\lambda)$.

Пусть μ состоит из первых двух строк диаграммы λ; тогда

$$|\mathcal{T}_\mu| = \frac{1}{\mathrm{r}_1(\lambda)} \, \frac{(\mathrm{r}_1(\lambda) - \mathrm{r}_2(\lambda) + 1)(\mathrm{r}_1(\lambda) + \mathrm{r}_2(\lambda))}{\mathrm{r}_1(\lambda) + 1} \binom{\mathrm{r}_1(\lambda) + \mathrm{r}_2(\lambda) - 1}{\mathrm{r}_2(\lambda)} \geq$$
$$\geq \frac{1}{\mathrm{r}_1(\lambda)} \binom{\mathrm{r}_1(\lambda) + \mathrm{r}_2(\lambda) - 1}{\mathrm{r}_2(\lambda)} \geq \frac{\mathrm{r}_1(\lambda)^{\mathrm{r}_2(\lambda) - 1}}{\mathrm{r}_2(\lambda)!}.$$

Пусть μ состоит из первых строки и столбца диаграммы λ; тогда

$$|\mathcal{T}_\mu| = \binom{\mathrm{r}_1(\lambda) + \mathrm{c}_1(\lambda) - 2}{\mathrm{c}_1(\lambda) - 1} \geq \frac{\mathrm{r}_1(\lambda)^{\mathrm{c}_1(\lambda) - 1}}{(\mathrm{c}_1(\lambda) - 1)!} \geq \frac{\mathrm{r}_1(\lambda)^{\mathrm{c}_1(\lambda) - 2}}{(\mathrm{c}_1(\lambda) - 1)!}.$$

Выражение $\frac{1}{x!}\, \mathrm{r}_1(\lambda)^{x-1}$ не убывает по x на множестве $[0, \mathrm{r}_1(\lambda)]$, поэтому из полученных оценок следует, что

$$|\mathcal{T}_\lambda| \geq \frac{1}{\max(\mathrm{r}_2(\lambda), \mathrm{c}_1(\lambda) - 1)!} \, \mathrm{r}_1(\lambda)^{\max(\mathrm{r}_2(\lambda), \mathrm{c}_1(\lambda) - 1) - 1}.$$

Так как $\max(\mathrm{r}_2(\lambda), \mathrm{c}_1(\lambda) - 1)^2 \geq \mathrm{r}_2(\lambda)(\mathrm{c}_1(\lambda) - 1) \geq n - \mathrm{r}_1(\lambda)$, в последней оценке мы можем заменить $\max(\mathrm{r}_2(\lambda), \mathrm{c}_1(\lambda) - 1)$ на $\left\lceil \sqrt{n - \mathrm{r}_1(\lambda)} \right\rceil$. Наконец, $\mathrm{r}_1(\lambda)^2 \geq n$ (используем то, что $\mathrm{r}_1(\lambda) \geq \mathrm{c}_1(\lambda)$), значит, основание степени $\mathrm{r}_1(\lambda)$ в этой оценке можно заменить на $\sqrt{n}$. $\square$

Так как $\lim_{n \in N}(n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)) = \infty$, существует такое число $n' \in N$, что для любых $n \in N \cap (n'\mathbb{N})$ мы имеем $\left\lceil \sqrt{n - \mathrm{r}_1(\lambda_n)} \right\rceil \geq 4t + 1$; применяя подлемму, для всех этих n мы получим, что $|\mathcal{T}_{\lambda_n}| \geq \frac{1}{(4t+1)!}\, n^{2t}$. Обозначим указанное в формулировке леммы подмножество в $\mathcal{T}_{\lambda_n}$, порядок которого нужно оценить, через $\mathcal{T}_{\lambda_n, t}$; далее будет доказано, что $|\mathcal{T}_{\lambda_n, t}| \leq (2n^2)^{t-1}$. Таким образом, утверждение леммы получается из того, что верхняя оценка на $|\mathcal{T}_{\lambda_n, t}|$ бесконечно мала по сравнению с нижней оценкой на $|\mathcal{T}_{\lambda_n}|$ при $n \to \infty$.

Для всякой таблицы $\tau \in \mathcal{T}_{\lambda_n}$ определим граф Γ_τ, вершины которого – клетки диаграммы λ_n и две клетки соединены ребром, если они соседние и стоящие в них числа различаются на 1.

Построенный граф обладает свойствами: Γ_τ – несвязное объединение нескольких путей в диаграмме λ_n, каждый из которых является горизонтальным или вертикальным рядом клеток; числа, стоящие в конечных клетках путей (самой правой или самой нижней соответственно), – в точности важные числа относительно таблицы τ; таблица τ однозначно восстанавливается по графу Γ_τ. Ясно, что количество путей описанного вида в диаграмме λ_n не превосходит $2n^2$ (n способами выбираются начальная клетка и длина пути, а двумя способами – направление пути). В силу второго свойства графа Γ_τ для всех $\tau \in \mathcal{T}_{\lambda_n,t}$ этот граф содержит менее t путей, поэтому количество графов не превосходит $(2n^2)^{t-1}$ и, значит, $|\mathcal{T}_{\lambda_n,t}| \leq (2n^2)^{t-1}$. $\square$

5. Основная часть доказательства теоремы 3

Теперь мы готовы полностью доказать теорему 3. Для этого нам нужно проверить, что $\lim_{m\in(\frac{1}{l}N)\cap\mathbb{N}} \overline{\chi}_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m) = 0$ (перестановка u фиксирована в разделе 3, сеть $(\lambda_n)_{n\in N}$ – в разделе 4). Обозначим ненормированный неприводимый характер группы S_{lm}, отвечающий диаграмме λ_{lm}, через $\chi_{\lambda_{lm}}$; тогда $\overline{\chi}_{\lambda_{lm}} = \chi_{\lambda_{lm}}/\chi_{\lambda_{lm}}(\mathrm{id}_{lm})$. Используя это обозначение и расшифровывая определение предела, мы получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ нам нужно указать такое $m(\varepsilon) \in (\frac{1}{l}N) \cap \mathbb{N}$, что $|\chi_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m)| < \varepsilon\chi_{\lambda_{lm}}(\mathrm{id}_{lm})$ для всех $m \in (\frac{1}{l}N) \cap (m(\varepsilon)\mathbb{N})$.

Как было отмечено в разделе 3, любой m-порядок $\sigma \in \mathcal{O}_m$ задает упорядочивание длин циклов перестановки $u \sqcap \mathrm{id}_m$; i-ю из этих длин, где $i \in [1, cm]$ и c – число циклов в u, обозначим через σ_i.

Определение 8. *Пусть $\sigma \in \mathcal{O}_m$; тогда σ-замощение ζ – такая последовательность диаграмм $(0) = \lambda_0^\zeta \subset \ldots \subset \lambda_{cm}^\zeta = \lambda_{lm}$, что для всех $i \in [1, cm]$ мы имеем: $\lambda_i^\zeta/\lambda_{i-1}^\zeta$ – косой крюк (связная косая диаграмма, не содержащая диаграммы $(2,2)$), состоящий из σ_i клеток (здесь (0) – пустая диаграмма, а $(2,2)$ – квадрат из четырех клеток).*

Для всякого $\sigma \in \mathcal{O}_m$ множество всех σ-замощений обозначим через $\mathcal{Z}(\sigma)$. Вычисляя величину $\chi_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m)$ с помощью классического правила Мурнагана–Накаямы (см. [4, раздел 8]), мы имеем

$$\chi_{\lambda_{lm}}(u \sqcap \mathrm{id}_m) = (-1)^{cm} \sum\nolimits_{\zeta\in\mathcal{Z}(\sigma)} (-1)^{\sum_{i=1}^{cm}(\text{высота крюка } \lambda_i^\zeta/\lambda_{i-1}^\zeta)}.$$

Отсюда следует, что $|\chi_{\lambda_{lm}}(u\sqcap \mathrm{id}_m)|\le|\mathcal{Z}(\sigma)|$ для всех $\sigma\in\mathcal{O}_m$; переходя к математическому ожиданию по мере α_m, построенной в лемме 1, функции $\sigma\mapsto|\mathcal{Z}(\sigma)|$ на $\mathcal{O}_m$, мы имеем $|\chi_{\lambda_{lm}}(u\sqcap \mathrm{id}_m)|\le \mathrm{E}|\mathcal{Z}(\cdot)|$.

Хорошо известно, что $\chi_{\lambda_{lm}}(\mathrm{id}_{lm})=|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}|$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что величина $\mathrm{E}|\mathcal{Z}(\cdot)|$ бесконечно мала по сравнению с $|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}|$ при $m\to\infty$.

Определение 9. *Назовем косой крюк линейным, если он является горизонтальным или вертикальным рядом клеток.*

Пусть $\sigma\in\mathcal{O}_m$, $\zeta\in\mathcal{Z}(\sigma)$ и z есть количество нелинейных крюков среди $\lambda_i^\zeta/\lambda_{i-1}^\zeta$, $i\in[1,cm]$; тогда мы можем сопоставить σ-замощению ζ в точности 2^z таблиц формы λ_{lm}, заполняя для всех $i\in[1,cm]$ косой крюк $\lambda_i^\zeta/\lambda_{i-1}^\zeta$ числами отрезка $[\sum_{j=1}^{i-1}\sigma_j+1,\sum_{j=1}^{i}\sigma_j]$ сверху вниз по строкам или слева направо по столбцам (для линейных крюков и только для них эти заполнения совпадают). Ясно, что все построенные таблицы попарно различны, поэтому для всякого $s\in\mathbb{N}$ количество таких σ-замощений ζ, что среди крюков $\lambda_i^\zeta/\lambda_{i-1}^\zeta$, $i\in[1,cm]$, есть хотя бы s нелинейных, не превосходит $(1/2^s)|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}|$. Для каждого из оставшихся σ-замощений выберем одну из построенных таблиц и сопоставим ее данному σ-замощению. Обозначим множество полученных таблиц через $\mathcal{T}(\sigma,s)$. Зафиксируем $s\in\mathbb{N}$ так, что $1/2^s<\varepsilon/3$; из нашего рассуждения следует, что $|\mathcal{Z}(\sigma)|<(\varepsilon/3)|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}|+|\mathcal{T}(\sigma,s)|$, откуда мы получаем, что $\mathrm{E}|\mathcal{Z}(\cdot)|<(\varepsilon/3)|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}|+\mathrm{E}|\mathcal{T}(\cdot,s)|$. Преобразуем последнее слагаемое в правой части полученной оценки:

$$\mathrm{E}|\mathcal{T}(\cdot,s)|=\sum\nolimits_{\sigma\in\mathcal{O}_m}|\mathcal{T}(\sigma,s)|\alpha_m(\sigma)=\sum\nolimits_{\sigma\in\mathcal{O}_m,\,\tau\in\mathcal{T}(\sigma,s)}\alpha_m(\sigma)=$$
$$=\sum\nolimits_{\tau\in\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}}\alpha_m\big(\{\sigma\in\mathcal{O}_m\mid\tau\in\mathcal{T}(\sigma,s)\}\big).$$

Для всех $\tau\in\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}$ обозначим множество важных относительно τ чисел отрезка $[1,lm]$ через $X(\tau)$. Пусть $\sigma\in\mathcal{O}_m$, $\tau\in\mathcal{T}(\sigma,s)$ и ζ есть σ-замощение, которому сопоставлена таблица τ согласно построению из предыдущего абзаца; легко видеть, что если число – особое относительно σ и важное относительно τ, то содержащая его клетка диаграммы λ_{lm} принадлежит нелинейному косому крюку вида $\lambda_i^\zeta/\lambda_{i-1}^\zeta$, причем каждому из данных крюков принадлежит не более одной такой клетки; σ-замощение ζ было определено так, что таких крюков меньше s штук, поэтому чисел, обладающих описанным свойством, также меньше s штук. Итак, мы имеем импликацию $\tau \in \mathcal{T}(\sigma, s) \implies |\{x \in X(\tau) \mid x$ – особое относительно $\sigma\}| < s$, из которой получается новая верхняя оценка на величину $\mathrm{E}|\mathcal{T}(\cdot, s)|$. Вот эта оценка: $\sum_\tau \alpha_m\bigl(\{\sigma \in \mathcal{O}_m \mid |\{x \in X(\tau) \mid x$ – особое относительно $\sigma\}| < s\}\bigr)$.

Применяя лемму 1, фиксируем число $t(\varepsilon/3, s) \in \mathbb{N}$; тогда мы получим, что для любых таких $\tau \in \mathcal{T}_{\lambda_{lm}}$, что $|X(\tau)| \geq t(\varepsilon/3, s)$, мы имеем $\alpha_m\bigl(\{\sigma \in \mathcal{O}_m \mid |\{x \in X(\tau) \mid x$ – особое относительно $\sigma\}| < s\}\bigr) < \varepsilon/3$. В силу последней оценки на $\mathrm{E}|\mathcal{T}(\cdot, s)|$ отсюда мы получаем

$$\mathrm{E}|\mathcal{T}(\cdot, s)| < (\varepsilon/3)|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}| + \bigl|\{\tau \in \mathcal{T}_{\lambda_{lm}} \mid |X(\tau)| < t(\varepsilon/3, s)\}\bigr|.$$

Применяя лемму 2, фиксируем число $n(\varepsilon/3, t(\varepsilon/3, s)) \in N$ и определим число $m(\varepsilon) \in (\frac{1}{l}N) \cap \mathbb{N}$ как $\min\bigl((\frac{1}{l}N) \cap (n(\varepsilon/3, t(\varepsilon/3, s))\mathbb{N})\bigr)$; тогда $(\frac{1}{l}N) \cap (m(\varepsilon)\mathbb{N}) \subseteq \frac{1}{l}(N \cap (n(\varepsilon/3, t(\varepsilon/3, s))\mathbb{N}))$ и, значит, для любого $m \in (\frac{1}{l}N) \cap (m(\varepsilon)\mathbb{N})$ последнее слагаемое в правой части полученной оценки на $\mathrm{E}|\mathcal{T}(\cdot, s)|$ меньше $(\varepsilon/3)|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}|$, откуда окончательно мы получаем, что $\mathrm{E}|\mathcal{Z}(\cdot)| < \varepsilon|\mathcal{T}_{\lambda_{lm}}|$ и, таким образом, число $m(\varepsilon)$ – искомое. Теорема 3 и вместе с ней основная теорема статьи доказаны.

Литература

1. А. М. Вершик, *Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп.* — ДАН СССР **218**, вып. 4 (1974), 749–752.
2. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анал. и его прил. **15**, вып. 4 (1981), 15–27.
3. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и* K_0*-функтор.* — В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения **26**. М., ВИНИТИ (1985), сс. 3–56.
4. А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, *Новый подход к теории представлений симметрических групп. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 57–98.
5. Е. Е. Горячко, K_0*-функтор и характеры группы рациональных перекладываний отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 124–138.
6. Е. Е. Горячко, *Полиномиальность неприводимых характеров симметрических групп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **378** (2010), 32–39.
7. P. J. Cameron, S. Tarzi, *Limits of cubes.* — Topology Appl. **155**, no. 14 (2008), 1454–1461.
8. A. V. Dudko, *Characters on the full group of the odometer*, `arXiv:1005.4289v1`.
9. N. V. Kroshko, V. I. Sushchansky, *Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings.* — Arch. Math. (Basel) **71**, no. 3 (1998), 173–182.

Goryachko E. E., Petrov F. V. Indecomposable characters of the group of rational rearrangements of the segment.

We present a description of all indecomposable characters of the group of rational rearrangements of the segment. We use the Vershik–Kerov approach consisting in the approximation of indecomposable characters of countable groups by indecomposable characters of finite groups.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: eugene@pdmi.ras.ru
fedyapetrov@gmail.com

Поступило 29 сентября 2010 г.