Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 378, 2010 г.

А. М. Вершик

НЕСВОБОДНЫЕ ДЕЙСТВИЯ СЧЕТНЫХ ГРУПП И ИХ ХАРАКТЕРЫ

Памяти Риты

1. Определения

Пусть G – счетная группа, действующая на пространстве Лебега с непрерывной мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Для любого элемента группы $g \in G$ обозначим через X_g (измеримое) множество его неподвижных точек: $G_x = \{x : gx = x\}$. Как известно, действие называется свободным, если $\mu X_g = 0$ для $g \neq \mathrm{id}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_G$ сигма-подалгебру сигма-алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную всеми такими множествами: $\mathfrak{A}_G = \sigma\text{-}\operatorname{alg}\{X_g; g \in F\}$. Эта сигма-алгебра тривиальна в случае свободного действия.

Определение 1. *Действие группы G называется вполне несвободным, если сигма-алгебра $\mathfrak{A}_G$ совпадает со всей исходной сигма-алгеброй: $\mathfrak{A}_G = \mathfrak{A}$.*

Аналогичное определение можно дать для произвольных (несчетных) групп, но тогда надо предполагать, что действие индивидуально (т.е. есть множество полной меры, на всех точках которого действие всех элементов группы определено).

Рассмотрим *решетку* (относительно естественного порядка) $L(G)$ *всех подгрупп группы* G. Эта решетка интенсивно изучалась с чисто групповой точки зрения, начиная с 30-х гг прошлого века и даже ранее в XIX веке (см. недавнюю монографию [2]). На решетке $L(G)$ естественно вводится слабая топология (окрестность данной подгруппы есть семейство всех подгрупп, в которых множество слов длины не более заданной совпадает с таким же множеством для данной подгруппы) и соответствующая ей борелевская структура. Очевидно, что

Ключевые слова: несвободные действия, решетка подгрупп, характеры, фактор-представления.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 08-01-00379-а и 09-01-12175-офи-м.

решетка $L(G)$ компактна в слабой топологии и в интересных для нас случаях является вполне несвязным несчетным сепарабельным канторовским множеством. Группа G непрерывно действует на $L(G)$ сопряжением, это действие иногда называют *присоединенным.* Мы будем изучать борелевские, инвариантные относительно сопряжения, вероятностные меры на решетках подгрупп. По-видимому, вопросы, связанные с этими мерами и с динамикой действия группы на $L(G)$, до сих пор не исследовались.

Сопоставим почти каждой точке $x \in X$ ее стабилизатор, т.е. подгруппу $G_x = \{g : gx = x\}$, рассматриваемую как элемент решетки, и обозначим это отображение $\Psi_G : X \to L(G)$:

$$\Psi_G : x \mapsto G_x.$$

Отображение Ψ_G, очевидно, борелевски измеримо.

Обозначим сигма-алгебру, порожденную этим отображением (т.е. прообраз сигма-алгебры борелевских множеств на $L(G)$), через $\mathfrak{A}^G$.

Лемма 2.
$$\mathfrak{A}_G \subset \mathfrak{A}^G.$$

Действительно, если сигма-алгебра $\mathfrak{A}_G$ тривиальна, то включение доказано. Пусть $\mathfrak{A}_G$ нетривиальна и ξ – измеримое разбиение (отношение эквивалентности), соответствующее сигма-алгебре $\mathfrak{A}_G$. Очевидно, что две точки, лежащие в одном блоке измеримого разбиения ξ, в силу определения последнего имеют одну и ту же стабильную подгруппу и, тем самым, лежат в прообразе одной и той же точки при отображении Ψ_G.

Следствие 3. *Если действие группы G вполне несвободно, то отображение Ψ_G есть мономорфизм $\mathrm{mod}0$; иначе говоря, сигма-алгебра $\mathfrak{A}_G$ совпадает с $\mathfrak{A}^G$.*

Определение 4. *Назовем действие группы экстремально несвободным, если отображение Ψ_G мономорфно; иначе говоря, если сигма-алгебра $\mathfrak{A}^G$ совпадает со всей сигма-алгеброй $\mathfrak{A}$. В терминах действия это означает, что почти все точки имеют различные стабильные подгруппы.*

Легко привести пример, различающий полную и экстремальную несвободу действий. Например (правда, группа в этом примере непрерывна), группа $SO(3)$ действует на сфере S^2 экстремально несвободно, но не вполне несвободно.

Рассмотрим образ ν_μ меры μ на решетке $L(G)$ при отображении Ψ_G. Очевидно, что мера ν_μ инвариантна относительно сопряжения. Отметим следующий простой, но важный факт.

Теорема 5. *В классе экстремально несвободных действий группы G мера ν_μ, определенная выше, есть полный метрический инвариант действия. Иначе говоря, два экстремально несвободных действия группы G в пространствах $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(X', \mathfrak{A}', \mu')$ метрически изоморфны тогда и только тогда, когда меры ν_μ и $\nu_{\mu'}$ на решетке $L(G)$ совпадают.*

Это мгновенно следует из мономорфности отображения Ψ_G, которое изоморфно переводит экстремально несвободное действие из произвольного пространства Лебега на решетку $L(G)$.

2. Экстремально несвободные действия

Мы будем рассматривать инвариантные относительно сопряжения меры на решетке подгрупп. Примером таких мер служит дельта-мера в единице или атомическая мера на множестве сопряженных между собой подгрупп с нормализатором конечного индекса. Более того, для любого действия группы G с инвариантной мерой μ на произвольном пространстве $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ отображение Ψ_G переводит меру μ в меру на решетке $L(G)$, инвариантную относительно сопряжения. Нас интересуют лишь непрерывные (и нетранзитивные в случае непрерывных групп) эргодические вероятностные меры.

Проблема 1. *Для каких счетных групп существуют непрерывные эргодические вероятностные меры, инвариантные относительно сопряжения? Описать все такие меры.*

Примерами таких групп являются бесконечная симметрическая и подобные ей группы; список всех таких мер для них известен (см. далее). Как недавно показано в работе [4] в качестве ответа на поставленный выше вопрос, на некоммутативных свободных и близких к ним группах такие меры существуют, но полного описания их пока нет.

Предположим, что ν – такая мера на решетке $L(G)$. Верно ли, что действие группы G на пространстве $(L(G), \nu)$ экстремально несвободно? Вообще говоря, это не так; более того, простые примеры показывают, что даже если действие группы G на пространстве (X, μ)

экстремально несвободно, то Ψ_G-образ ν_μ меры μ, вообще говоря, таков, что действие группы G на пространстве $(L(G), \nu_\mu)$ не является экстремально несвободным. Причина в том, что, поскольку стабилизатор подгруппы H как элемента решетки $H \in L(G)$ есть ее нормализатор $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$, вполне возможно, что у разных подгрупп нормализаторы совпадают. Если же действие группы G сопряжением на решетке $L(G)$ с некоторой мерой ν экстремально несвободно, то будем и саму меру ν называть *экстремально несвободной*.

Определение 6. *Подгруппа H произвольной группы G называется анормальной,*[1] *если она совпадает со своим нормализатором.*

Предложение 7. *Инвариантная относительно сопряжения мера на $L(G)$ экстремально несвободна тогда и только тогда, когда мера множества анормальных подгрупп равна единице.*

Доказательство. Предположим, что мера ν экстремально несвободна, но некоторое множество положительной ν-меры состоит из анормальных подгрупп, т.е. из таких подгрупп H, для каждой из которых можно найти элемент $h_H \in N(H) \setminus H$. В силу счетности группы G найдется элемент h, для которого последнее условие выполнено для всех подгрупп из множества положительной меры. Тогда для подгруппы H из этого множества имеем $hHh^{-1} \neq H$, но в то же время нормализаторы обеих подгрупп, которые являются стабилизаторами для присоединенного действия, совпадают, что противоречит экстремальной несвободе. Обратное очевидно. □

Введем на решетке подгрупп операцию нормализации $\mathcal{N}$, сопоставляющую каждой подгруппе ее нормализатор: $\mathcal{N}(H) = N(H)$. Эту операцию можно продолжить до операции на мерах: $\mathcal{N}_*(\nu)(E) = \nu(\mathcal{N}(E))$. Очевидно, если мера ν инвариантна, то и образ ее есть инвариантная мера. Если мера $\mathcal{N}_*(\nu)$ экстремально несвободна, то будем говорить, что мера ν редуцированно экстремально несвободна; этот случай встречается часто и поэтому должен быть выделен. Как следует из доказанного предложения, на групповом языке это означает, что мера ν сосредоточена на подгруппах H, которые удовлетворяют условию

$$N(N(H) = N(H)), \quad \text{или} \quad \mathcal{N}^2(H) = \mathcal{N}(H).$$

[1]Автор не знает, имеется ли у таких подгрупп общепринятое название.

Однако так бывает не всегда, и процесс нормализации, вообще говоря, не стабилизируется ни после первого, ни после конечного числа шагов.[2]

Так или иначе, нас интересуют в первую очередь экстремально несвободные меры на решетках.

Проблема 2. *Для каких счетных групп существуют непрерывные эргодические вероятностные экстремально несвободные меры, инвариантные относительно сопряжения?*

По-видимому, класс таких групп существенно у́же, чем класс групп, решающих первую проблему.

3. Вполне несвободные действия

Вполне несвободные действия определены выше как действия, для которых совокупность всех множеств неподвижных точек различных элементов группы порождает полную сигма-алгебру; эти действия, как мы видели, являются экстремально несвободными, поэтому их можно изучать на решетках подгрупп. Рассмотрим экстремально несвободную меру ν на решетке $L(G)$ подгрупп группы G. Эта мера сосредоточена на множестве анормальных подгрупп; сформулируем условие полной несвободы. Следуя намеченной традиции переносить термин действия на соответствующие меры, *назовем меру ν на решетке $L(G)$ вполне несвободной, если присоединенное действие группы G на пространстве с мерой $(L(G),\nu)$ вполне несвободно.* Для элемента группы $g \in G$ обозначим через $L_g \subset L(G)$ множество подгрупп, его содержащих.

Предложение 8. *Экстремально несвободная мера на решетке $L(G)$ вполне несвободна тогда и только тогда, когда совокупность тех множеств L_g, $g \in G$, которые имеют положительную ν-меру, порождает полную сигма-алгебру пространства $(L(G),\nu)$; иначе говоря, почти любую по мере ν пару различных подгрупп можно различить с помощью некоторого множества L_g положительной ν-меры.*

Действительно, множество неподвижных точек для элемента группы есть множество подгрупп, нормализаторы которых его содержат;

[2]Автор не знает соответствующих примеров, но, по-видимому, стабилизации может не быть и после бесконечного и даже счетного числа шагов.

но почти все по экстремально несвободной мере подгруппы анормальны, т.е. совпадают со своими нормализаторами, а значит, это есть множество подгрупп, содержащих этот элемент.

Наиболее интересные проблемы относятся ко вполне несвободным действиям.

Проблема 3. *Для каких счетных групп существуют непрерывные эргодические вероятностные вполне несвободные меры на решетке подгрупп, инвариантные относительно сопряжения? Описать все такие меры. В более общей формулировке: для каких групп существуют вполне несвободные действия? Описать все такие действия с точностью до изоморфизма.*

Как будет ясно из следующего параграфа, именно этот класс групп важен в теории представлений. Примерами являются бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, группа $GL(\infty, q)$ бесконечных матриц над конечным полем и др.

4. Связь с представлениями и теорией характеров

Всякое действие группы G с инвариантной мерой на пространстве (X, μ) порождает ее унитарное представление в пространстве $L^2_\mu(X)$ по формуле $[U_g(f)](x) = f(gx)$ (купмановское представление). Вопрос о том, каким может быть это представление и каково его разложение на неприводимые, сложен уже для группы $\mathbb{Z}$ (этим вопросом и занимается спектральная теория динамических систем). Поскольку мера конечна, имеется инвариантное одномерное подпространство констант. Но следующая проблема остается нерешенной.

Проблема 4. *В каких случаях купмановское представление в подпространстве, ортогональном к константам, является неприводимым?*

Очевидно, эргодичность действия является необходимым условием, так как разложение на эргодические компоненты задает разложение гильбертова пространства $L^2_\mu(X)$ в прямой интеграл (или прямую сумму) инвариантных подпространств.

Проблему можно сформулировать более конкретно. Рассмотрим эргодическое действие группы G на пространстве (X, μ) с инвариантной мерой μ и W^*-алгебру операторов, порожденных операторами умножения на ограниченные измеримые функции и операторами действия. Эту алгебру можно рассматривать как образ скрещенного произведения $l^1(G) \leftthreetimes L^\infty(X)$ групповой алгебры группы G и алгебры операторов умножения $L^\infty(X)$. Оказывается, она совпадает с алгеброй всех ограниченных операторов, так как алгебра операторов умножения есть максимальная коммутативная самосопряженная подалгебра алгебры всех ограниченных операторов и, кроме того, в ней нет отличных от констант мультипликаторов, коммутирующих с действием группы, в силу эргодичности, а значит, коммутант этой алгебры скалярен и наше утверждение следует из теоремы фон Неймана о бикоммутанте. Поэтому проблему 4 можно сформулировать эквивалентным образом так.

Проблема 4$'$. *В каких случаях W^*-алгебра, натянутая на операторы действия группы, содержит все мультипликаторы с нулевым интегралом?*

Скорее всего, проблема 4 является весьма сложной. Известные автору примеры положительного ответа на нее весьма немногочисленны.

Существует еще одно каноническое представление, порожденное сохраняющим меру действием групп и восходящее к фон Нейману (см., например, [3]). Его можно назвать *траекторным*, или *группоидным* — см., например, [5]. Рассмотрим график П действия группы, т.е. множество пар $\{(x,y) : y = gx,\ g \in G\}$, как измеримое подмножество в $X \times X$, снабдим его сигма-конечной мерой M, которая на обоих сомножителях $X \times *$ и $* \times X$ индуцирует меру μ, а в слоях над точками – $(*, y)$ и $(x, *)$ – индуцирует (в качестве условных мер) считающую (т.е. равномерную бесконечную) меру для всех x и y. Тогда на П определены два коммутирующих действия группы G с инвариантной мерой M – левое, $(x,y) \mapsto (gx,y)$, и правое, $(x,y) \mapsto (x,gy)$. Соответственно, в пространстве $L^2_M(\Pi)$ определены два унитарных представления группы G и два $*$- представления указанного скрещенного произведения. Хорошо известно, что если действие группы G на пространстве (X,μ) эргодично, то оба представления скрещенного произведения суть фактор-представления типа II_1, при этом левый и правый фактор суть взаимные коммутанты. Характеристическая функция диагонали $\Delta = \{(x,x), x \in X\}$, т.е. элемент $1_\Delta \in L^2_M(\Pi)$, является бициклическим вектором для факторов. Эта конструкция представления скрещенного произведения называется фон неймановской, или группоидной, или траекторной (поскольку слои суть траектории действия группы). Для свободного действия конструкция предложена и изучена в основополагающих работах фон Неймана, несвободные действия рассматривались В. Кригером и др. Случай же экстремально несвободного действия впервые встретился в [7], где он рассмотрен как конкретный пример, связанный с фактор-представлениями бесконечной симметрической группы и родственных с ней групп.

Как и в предыдущем примере, мы можем ограничивать это представление на саму группу, и так же, как в предыдущей проблеме, можно поставить аналогичный вопрос про такие представления.

Проблема 5. *В каких случаях ограничение группоидного представления на группу порождает весь фактор? Или, эквивалентным образом, когда W^*-алгебра, натянутая на операторы группы, содержит все мультипликаторы и, тем самым, совпадает со всем фактором?*

Напомним, что комплексная функция ϕ на группе называется характером, если она неотрицательно определена, центральна, нормирована:

$$\{\phi(g_i g_j^{-1})\}_{i,j=1}^n \geq 0, \quad \phi(ghg^{-1}) = \phi(h), \quad \phi(\mathrm{id}) = 1.$$

Характеры образуют выпуклый компакт в слабой топологии, и его экстремальные точки называются неразложимыми характерами.

Важность проблемы 5 видна из следующего соответствия между неразложимостью характера и факторностью.

Теорема 9. *Рассмотрим эргодическое действие группы G на пространстве (X, μ) с инвариантной мерой; функция*

$$\phi(g) = \mu(X_g) = \mu\{x : gx = x, x \in X\} \qquad (*)$$

есть характер группы. Если ограничение группоидного представления на группу порождает весь фактор, то этот характер неразложим.

Доказаательство. Прежде всего, имеет место формула

$$< U_g 1_\Delta, 1_\Delta >= \mu(X_g),$$

из которой следует первое утверждение. Неразложимость следа (т.е. его непредставимость в виде выпуклой комбинации других следов) на W^*-алгебре, как известно из теории алгебр фон Неймана, эквивалентна факторности соответствующего представления. След в нашем случае в точности соответствует характеру группы. $\square$

Тем самым, открывается возможность искать характеры с помощью действий групп. Мы увидим, что иногда этот способ с некоторыми дополнениями позволяет описать все характеры группы.

В противоположность проблеме 4, проблема 5, оказывается, имеет очень ясное решение, которое и составляет основной результат этой работы.

Теорема 10. *Для того чтобы характер группы, определяемый по формуле* $(*)$, *был неразложимым и, тем самым, порождал фактор-представление группы* G *типа* II_1, *необходимо и достаточно, чтобы действие группы было вполне несвободным.*

Доказательство. Приведем основную схему рассуждений. Рассмотрим для определенности левое фактор-представление группы G в пространстве $L^2_M(\Pi)$, где множество $\Pi \subset X \times X$ и мера M построены выше. Мы докажем, что циклическая оболочка характеристической функции диагонали 1_Δ относительно операторов левого действия группы совпадает со всем пространством $L^2_M(\Pi)$ тогда и только тогда, когда действие группы G на пространстве (X, μ) вполне несвободно.

Сначала рассмотрим “диагональное подпространство” H_Δ тех функций из $L^2_M(\Pi)$, носитель которых лежит на диагонали $\Delta = \{(x,x), x \in X\}$, и пусть $R_\Delta \equiv R$ – ортогональный проектор на подпространство H_Δ. Покажем, что, если действие группы вполне несвободно, и только в этом случае, линейная оболочка проекций образов вектора под действием группы G – $\mathrm{Span}\{R[g(1_\Delta)]; g \in G\}$ – всюду плотна в подпространстве H_Δ. Заметим, что проекция $R[g(1_\Delta)]$, как функция на диагонали, есть в точности индикатор множества X_g неподвижных точек для действия элемента g. Линейная оболочка таких индикаторов совпадает с линейной оболочкой индикаторов подмножеств, входящих в подалгебру множеств, порожденных подмножествами неподвижных точек для всех элементов группы G. Действительно, в этой линейной оболочке содержатся индикаторы дополнений к подмножествам неподвижных точек – как разности константы 1 и индикатора подмножества; а также индикаторы пересечений таких подмножеств, поскольку пересечение $X_g \cap X_h$ совпадает с X_{gh}, если $gx \neq h^{-1}x$ почти всюду, что можно предполагать, не умаляя общности. Поэтому индикатор объединения двух подмножеств неподвижных точек также входит в эту линейную оболочку, а значит, в нее входят индикаторы всех множеств сигма-подалгебры.

Если действие вполне несвободно, и только в этом случае, эта сигма-подалгебра, порожденная подмножествами неподвижных точек, по определению плотна в сигма-алгебре всех измеримых множеств, и, тем самым, линейная оболочка $\mathrm{Span}\{R[g(1_\Delta)]; g \in G\}$ всюду плотна в подпространстве H_Δ. Образ индикатора диагонали можно разложить на два слагаемых: $g[(1_\Delta)] = R[g(1_\Delta)] + (I - R_\Delta)[g(1_\Delta)]$. Носитель второго слагаемого лежит вне диагонали, и, применяя действия элементов группы, его можно "убрать на бесконечность", т.е. можно сдвигать носитель (x, gx), меняя g. При этом первое слагаемое будет по-прежнему принадлежать подпространству H_Δ, а второе будет слабо стремиться к нулю. В результате в пределе мы получим элемент с носителем на диагонали из линейной оболочки, о которой сказано выше. Но ограниченные функции с носителем на диагонали в левом (а также в правом) представлении действуют как мультипликаторы. Таким образом, мы доказали, что в случае вполне несвободного действия группы, и только в этом случае, слабому замыканию алгебры операторов группового действия принадлежат все мультипликаторы, а это и означает, что представление группы уже порождает весь фактор, образованный скрещенным произведением групповой алгебры и абелевой алгебры мультипликаторов. $\square$

Таким образом, понятие вполне несвободного действия позволяет решить проблему 5, но оно не дает решения проблемы 4: можно привести примеры вполне несвободных действий двух групп, дающих как положительный, так и отрицательный ответ на проблему 4. Дело в том, что для положительного решения проблемы 5 нужно доказать цикличность только одного вектора 1_Δ, определяющего след, а в проблеме 4 требуется доказать цикличность любого вектора, не совпадающего с константами и не ортогонального им, что является более сложной задачей.

Вместе с теоремой 9 теорема 10 дает метод нахождения неразложимых характеров групп: надо искать вполне несвободные действия группы, и тогда мера множества неподвижных точек данного элемента и есть значение характера на нем. У этой конструкции есть еще один резерв: если существуют не когомологичные единице коциклы группы со значениями в окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то их можно использовать в рамках описанной схемы как мультипликаторы и получать не эквивалентные предыдущим представления и новые характеры. Так происходит в случае бесконечной симметрической группы. Важной является следующая проблема.

Проблема 6. *Для каких групп эта конструкция дает все неразложимые характеры группы?*

Оказывается, для бесконечной симметрической группы это так, что вытекает из нового прочтения работ С. В. Керова и автора 80-х гг. ([7] и др.).

Попутно отметим (это относится к конструкции фактор-представлений), что делавшееся в [7] и последующих работах выделение случая равных частот в теореме Тома в качестве особого оказалось ненужным. Дело в том, что в прежней конструкции использовался группоид последовательностей с бернуллиевской мерой, а в нынешнем изложении – группоид подгрупп; поэтому независимо от значений вероятности, применяя теорему 9, мы получаем весь фактор, а не его собственный подфактор, как было в случае равных частот в работе [7].

По-видимому, так же обстоит дело с группами $GLB(q)$, $GL(\infty, F_q)$, группой рациональных перекладываний отрезка и др. Заметим также, что наши рассмотрения применимы к бесконечномерным группам $U(\infty)$, $O(\infty)$, к так называемой траекторной группе Дая [8] и др.; для непрерывных групп следует немного подправить некоторые из приведенных определений и доказательств. Переход к группоиду сопряженных подгрупп делает конструкцию представлений полностью инвариантной. Вообще же, этот группоид представляет самостоятельный интерес.

В готовящейся работе [1] мы описываем все экстремально несвободные и вполне несвободные действия бесконечной симметрической группы, т.е. фактически соответствующие меры на решетке подгрупп этой группы, и показываем, как отсюда вывести список всех характеров этой группы. Это будет еще одним, на сей раз "динамическим" (т.е. использующим действия группы) доказательством теоремы Тома о характерах. Такое же доказательство дается для близких групп. Оказывается, список вполне несвободных мер на решетке подгрупп исчерпывается мерами Бернулли на подгруппах Юнга с бесконечными блоками – этот результат есть еще один аналог известной теоремы де Финетти.

В заключение подчеркнем, что классы введенных здесь действий счетных групп и сами группы, для которых такие действия, и соответствующие меры на решетках подгрупп, существуют, интересны и вне связи с теорией представлений и характеров. По-видимому, такие группы выделяются и другими свойствами.

Литература

1. A. Vershik, *Non-free actions of countable groups and their representations*, in preparation.
2. R. Schmidt, *Subgroup Lattices of Groups*. Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1994.
3. J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leur representations*. Gauthier-Villars, Paris, 1964.
4. D. D'ngeli, A. Donno, M. Matter, T. Nagnibeda, *Schreier graphs of the Basilica group*. — J. Modern Dynamics **4**, no. 1 (2010), 167–205.
5. M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Vol. 3. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
6. J. Renault, *Groupoid Approach to C^*-Algebras*. Lect. Notes in Math. **793**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980.
7. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы*. — ДАН СССР **257**, вып. 5 (1981), 1037–1040.
8. H. Dye, *On groups of measure preserving transformations*. I, II. — Amer. J. Math. **81**, No. 1 (1959), 119–159; **85**, No. 4 (1963), 551–576.

Vershik A. M. Nonfree actions of countable groups and their characters.

We introduce a number of definitions of nonfree actions of groups. The most important of them is that of a totally nonfree action; it is naturally related to the theory of characters of groups and their factor representations. This short note is a brief exposition of a part of a more detailed paper on this subject, which is now in preparation.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 6 октября 2010 г.