УДК 512.752+511.515

О сингулярных поверхностях дель Пеццо, являющихся эквивариантными компактификациями. Деренталь У., Лугран Д. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 26–43.

Описываются сингулярные поверхности дель Пеццо, являющихся эквивариантными компактификациями группы G_n^2, что позволяет доказать для таких поверхностей гипотезу Манина. Приводится пример сингулярной квартики дель Пеццо, являющихся эквивариантными компактификациями группы $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} \rtimes \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Библ. – 32 назв.

УДК 512.754

О модулярности жестких трехмерных многообразий Калаби–Яу: эпилог. Дьёлёфе Л. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 44–49.

В недавней работе Ф. Гувиа и Н. Юи подробно описывается идея Серра (“patching argument”), позволяющая вывести модулярность любого жесткого трехмерного определенного над $\mathbb{Q}$ многообразия Калаби–Яу из (недавно доказанной) гипотезы Серра о модулярности. В этой заметке приводится другое доказательство этой импликации. В отличие от доказательства Серра, использующего приведенную модулярность для бесконечного числа простых, мы пользуемся приведенной модулярностью лишь для одного подходящего простого числа и эффективной версией теоремы Чеботарева. Библ. – 13 назв.

УДК 510.5+511.5

Теоремы о представимости рекурсивно-перечислимых множеств и одна гипотеза, связанная с описанным Пуненым “большим” подкольцом поля $\mathbb{Q}$. Дэвис М. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 50–54.

Отметив, что результаты об алгоритмической неразрешимости различных проблем часто удается усилить, доказав новую теорему о представимости рекурсивно-перечислимых множеств, мы показываем, что анализ доказательства неразрешимости 10-ой проблемы Гильберта над построенным Б. Пуненым “большим” подкольцом поля $\mathbb{Q}$ позволяет доказать теоремы о представимости р.п. множеств, приводящую к новой гипотезе о простых множествах. Из этой гипотезы следует, в частности, неразрешимость 10-ой проблемы Гильберта над $\mathbb{Q}$. Библ. – 7 назв.

УДК 512.757

Несингулярные точки на определенных над $\mathbb{F}_q$ гиперповерхностях. Захид Я. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 55–62.

В этом обзоре исследуются гиперповерхности, определенные над конечным полем. Мы описываем гиперповерхности, имеющие несингулярные точки над достаточно большим полем, и оцениваем снизу количество элементов поля, в котором такая гиперповерхность имеет хоть одну несингулярную точку. Библ. – 11 назв.

УДК 512.752+511.515

Одно обобщение детерминантного метода Бомбьери–Пила. Мармон О. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 63–77.

В 1989 г. Бомбьери и Пила развили так называемый детерминантный метод для подсчета числа целых точек ограниченной высоты на плоских аффинных кривых. В нашей работе рассматривается обобщение этого метода на многообразия произвольной размерности, дающее чисто вещественно-аналитическое доказательство "Теоремы 14" из известной работы Хис-Брауна. Библ. – 11 назв.

УДК 511.5+510.53

К конечнократным диофантовым представлениям. Матиясевич Ю. В.— В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 78–90.

Замечательная теорема, доказанная Мартином Дейвисом, Хилари Патнамом и Джулией Робинсон в 1961 году утверждает, что у каждого эффективно перечислимого множества натуральных чисел существует экспоненциально диофантово представление. Эта теорема была усилена автором в двух направлениях:

до существования диофантова представления,

до существования так называемого *однократного* экспоненциально диофантова представления.

Однако до сих пор неизвестно, могут ли этих два усиления быть объединены, то есть ли верно ли, что каждое эффективно перечислимое множество имеет однократное (или по крайней мере конечнократное) диофантово представление.

В статье обсуждаются известные результаты об однократных экспоненциально диофантовых представлениях, их применения, возможные подходы к усилению для случая диофантовых представлений, а также, какие следствия можно получить из невозможности такого усиления. Библ. – 27 назв.

УДК 511.342+512.647.2

Круговой метод с “весами” и представление целых чисел квадратичными формами. Нидермовве Н. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 91–110.

При подсчете диофантовых объектов часто, во избежание технических трудностей, используются сглаженные характеристические функции; однако при этом восстановление искомых результатов о точном (невзвешенном) числе представлений может оказаться не легким делом. В этой работе изучается представление целых чисел квадратичными формами от 4-х и более переменных. Мы получаем асимптотическую форму для числа точек в расширяющейся области с весами. Более того, выбрав подходящие весовые функции, нам удается получить нетривиальные оценки остаточного члена. Библ. – 9 назв.

УДК 511.522+510.53

Проблема Бюхи (обзор, новые точки зрения и некоторые нерешенные задачи). Пастен Г., Фейдас Т., Видо Х. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 111–140.

Последовательность элементов коммутативного кольца с единицей, вторые конечные разности последовательности квадратов элементов которой образуют постоянную последовательность (2), называется последовательностью Бюхи.

Последовательность x_n, для которой $x_n = (x+n)^2$ при фиксированном x, является последовательностью Бюхи; мы называем эту последовательность тривиальной. Понятие тривиальности последовательности зависит от поставленной задачи, например, нас часто интересуют последовательности, не все элементы которых лежат в некотором подкольце рассматриваемого кольца (скажем, последовательности элементов поля рациональных функций $F(z)$, не лежащие в поле F). Проблема Бюхи для данного кольца – выяснить, существует ли такое число M, что любая последлвательность Бюхи элементов этого кольца длиной не меньше M тривиальна.

Эта работа – обзор по проблеме Бюхи и ее аналогов для конечных разностей и степеней выше второй. В работе приводятся старые и новые открытые проблемы, несколько новых результатов и идеи доказательства некоторых известных результатов (например, условное доказательство Войта для кольца целых чисел и довольно детальное доказательство для полиномиальных колецнулевой характеристики). Приводится также новое короткое доказательство теоремы Хенсли, утверждающей, что проблема Бюхи имеет положительное решение для простых конечных полей. Обсуждаются приложения к логике, послужившие исходной мотивировкой рассматриваемых в этом обзоре проблем. Библ. – 30 назв.

УДК 512.772.7

О кривых над глобальными полями, для которых локально-глобальный принцип не имеет места. Пунен Б. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 141–147.

Существует алгоритм, по любому глобальному полю k выдающий определенную над k кривую, для которой нарушается локально-глобальный принцип. Кроме того, по любому глобальному полю k и целому неотрицательному числу n можно эффективно построить определенную над k кривую X с $\#X(k) = n$. Библ. – 26 назв.

УДК 512.74+517.986.6

Замена базы для гильбертовых собственных многообразий унитарной группы. Фликер Ю. З. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 148–198.

Мы обобщаем принадлежащую Шеневье конструкцию собственных многообразий на гильбертовы модулярные формы, т.е. на унитарные группы над вполне вещественными полями, инизотропные во всех вещественных точках этих полей. Это позволяет нам задаться вопросом о том, как соотносятся построенные нами собственные многообразия для двух вполне вещественных полей, одно из которых является циклическим расширением другого. Библ. – 23 назв.

УДК 511.33

Оценки кубических сумм Вейля. Хис-Браун Д. Р. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 199–216.

В предположении гипотезы abc усиливается вейлевская оценка кубических тригонометрических сумм, параметризованных квадратичными иррациональностями. Точнее говоря, мы доказываем, что

$$\sum_{n\leqslant N} e(\alpha n^3) \ll_{\varepsilon,\alpha} N^{5/7+\varepsilon}$$

при $\varepsilon > 0$, где α пробегает квадратичные иррациональности, $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Классическая (безусловная) оценка для таких α дает показатель степени $3/4+\varepsilon$. Библ. – 5 назв.

УДК 511.36

О количественной форме теоремы о подпространстве. Эвертсе Я.-Г. — В кн.: Исследования по теории чисел. 10. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 377) СПб., 2010, с. 217–240.

В этом обзоре описываются усиления теоремы о подпространстве, полученные в совместной с Феррети работе. Формулируется также новый “принцип дыры (gap principle)”, позволяющий оценить число подпространств, содержащих малые решения рассматриваемой системы неравенств. В начале работы обсуждается количественная версия теоремы Рота. Библ. – 28 назв.