Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

Ф. А. Шамоян

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ КОРНИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЖОРАНТОЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Пусть $\mathbf{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг в $\mathbf{C}$. Через $H(\mathbf{C})$, $H(\mathbf{D})$ обозначим соответственно множество всех целых и всех голоморфных в круге $\mathbf{D}$ функций. Пусть, далее, λ – монотонно растущая положительная функция на $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$. Введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$H(\lambda) = \big\{f \in H(\mathbf{C}) : \ \ln|f(z)| \leqslant C_f \lambda(|z|), \ z \in \mathbf{C}\big\},$$
$$A(\lambda) = \left\{f \in H(\mathbf{D}) : \ \ln|f(z)| \leqslant C_f \lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \ z \in \mathbf{D}\right\}.$$

В заметке мы будем предполагать, что $\lambda \in \mathbf{C}^{(1)}(0, +\infty)$, при этом существует предел
$$\alpha_\lambda = \lim_{r \to +\infty} \frac{\lambda'(r)\, r}{\lambda(r)}. \tag{1}$$

Последнее условие, в известном смысле, является естественным, если учесть, что функция $r \mapsto \ln M(r, f)$, где, как обычно, $M(r, f) = \max\limits_{|z| \leqslant r} |f(z)|$, $f \in H(\lambda)$ (или $f \in A(\lambda)$), является логарифмически выпуклой функцией, при этом существует последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $a_k < a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = +\infty$, такая, что функция $r \mapsto \ln M(r, f)$ является функцией из класса $\mathbf{C}^\infty(a_k, a_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. [1]).

В дальнейшем, если $f \in H(\mathbf{C})$ или $f \in H(\mathbf{D})$, то $Z_f = \{z : \ f(z) = 0\}$ – множество корней функции f. В работах [2] и [3] установлено, что если $\alpha_\lambda = +\infty$, то существует функция $f \in H(\lambda)$ с множеством нулей $Z_f = \{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, такая, что для любой функции $g \in H(\lambda)$ из условий

Ключевые слова: Целая функция, множество нулей, условие Линделёфа.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (No. 09-01-97517р центр-а).

$g(|z_k|) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, следует, что $g(z) = 0$ при всех $z \in \mathbf{C}$. Аналогичное утверждение доказано для класса $A(\lambda)$ (см. [3]) при условии, что $0 < \alpha_\lambda \leqslant +\infty$.

В этой заметке мы получим полное описание множеств нулей функций из класса $H(\lambda)$ и класса $A(\lambda)$, расположенных на луче, исходящем из начала координат, и, соответственно, на радиусе круга $\mathbf{D}$.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что луч совпадает с $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$, при этом обозначим через Z_f^+ множество положительных нулей функции f. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_\lambda = +\infty$, $\lambda \in \mathbf{C}^{(2)}(0, +\infty)$, *при этом функция* $\psi(x) = \ln \lambda\,(e^x)$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\psi''(x)}{(\psi'(x))^{2-\delta}} = O(1), \quad 0 < \delta < 1 \quad (x \to +\infty);$$

пусть ещё дана последовательность $Z = \{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $r_k \leqslant r_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k = +\infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) *последовательность* $Z = \{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *можно представить в виде* $Z = Z_f^+$ *для некоторой функции* $f \in H(\lambda)$;

(b) $n(r) = \operatorname{card}\{r_k : r_k < r\} \leqslant C\lambda(r), \quad r \in \mathbf{R}_+.$ (2)

Теорема 2. *Пусть* $Z = \{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $r_k \in (0, 1)$, $r_k \leqslant r_{k+1}$, $r_k \to 1 - 0$ *при* $k \to +\infty$, $1 < \alpha_\lambda \leqslant +\infty$; *если* $\alpha_\lambda = +\infty$, *то будем предполагать, что* λ *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда для того, чтобы последовательность* Z *можно было представить в виде* $Z = Z_f^+$ *для некоторой функции* $f \in A(\lambda)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$n(r) = \operatorname{card}\{r_k : r_k < r\} \leqslant C\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \in (0, 1). \tag{3}$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 1, вообще говоря, неверно, если $\alpha_\lambda < +\infty$. Действительно, если положить $\lambda(x) = x^\rho$, $0 \leqslant x < +\infty$, ρ – натуральное число, то, как известно, при описании множеств нулей функции класса $H(\lambda)$ возникает условие Линделёфа, из которого следует, что в этом случае оценка (2) не характеризует корни функции класса $H(\lambda)$, расположенные на вещественной полуоси. При $0 < \alpha_\lambda < +\infty$ описание множеств нулей функции из класса $H(\lambda)$

легко получить, если воспользоваться понятием уточненного порядка (см. [4, 5]).

Замечание 2. Если функция λ удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{1/2} dx < +\infty, \tag{4}$$

то вещественные корни функций из класса $A(\lambda)$ фактически описываются условием Бляшке $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1 - r_k) < +\infty$. Но если интеграл (4) расходится, то такое описание неверно (см. [6]). При $1 < \alpha_\lambda < +\infty$ утверждение теоремы 2 следует из результатов работы [7] (см. также [8]). Поэтому теорему 2 докажем только при $\alpha_\lambda = +\infty$.

Доказательство теоремы 1. (a) $\Longrightarrow$ (b). В работе [2] установлено, что если $f \in H(\lambda)$, $f \neq 0$, при этом λ удовлетворяет условиям теоремы 1, то справедлива оценка $n(r) \leqslant C\lambda(r)$, $r \in (0, +\infty)$.

Докажем обратное утверждение, т.е. (b) $\Longrightarrow$ (a). Пусть дана последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $0 < r_k \leqslant r_{k+1}$, $r_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, при этом

$$n(r) = \operatorname{card}\left\{r_k : r_k < r\right\} \leqslant C\lambda(r), \quad r \in (0, +\infty).$$

Докажем, что существует функция $f \in H(\lambda)$ такая, что $Z_f^+ = \{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Напомним, что Z_f^+ – множество положительных нулей функции f. Положим $\lambda_*(r) = (\lambda(r))^{2/3}$, $r > 0$. Очевидно, что $\dfrac{\lambda_*'(r)r}{\lambda_*(r)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\lambda'(r)r}{\lambda(r)}$, поэтому $\dfrac{\lambda_*'(r)r}{\lambda_*(r)} \uparrow +\infty$ при $r \to +\infty$. Из результатов работы [9] следует, что существует функция $g \in H(\mathbf{C})$, $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, $a_k \geqslant 0$, такая, что $M(r, g) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$, при этом $C_1 \leqslant \dfrac{\lambda_*(r)}{M(r,g)} \leqslant C_2$ при некоторых положительных C_1, C_2. Поэтому $H(\lambda, +\infty) = H(g, +\infty)$, где

$$H(g, +\infty) = \{f \in H(\mathbf{C}) : \ln|f(z)| \leqslant C_f\, g(|z|)\}.$$

Так как функция $g(r)$ строго монотонно растёт на $(0, +\infty)$, то существует обратная функция. Положим $v(r) = g^{-1}(r)$, $r \in (0, +\infty)$ и $\rho = g(r)$, $r = v(\rho)$. Из условия теоремы получим:

$$n(v(\rho)) = \operatorname{card}\left\{r_k : r_k < v(\rho)\right\} \leqslant C\lambda(v(\rho)).$$

Положив $\rho_k = g(r_k)$, т.е. $r_k = v(\rho_k)$, из последней оценки приходим к неравенству:

$$n_1(\rho) = n(v(\rho)) = \operatorname{card}\left\{\rho_k : v(\rho_k) < v(\rho)\right\} \leqslant C\,(\lambda_*(v(\rho)))^{3/2} \leqslant C_1\rho^{3/2}$$

или

$$n_1(\rho) = \operatorname{card}\left\{\rho_k : \rho_k < \rho\right\} \leqslant C_1\rho^{3/2}. \tag{5}$$

По теореме Ж. Адамара (см. [4]) существует целая функция $G(z)$ порядка $3/2$ и нормального типа такая, что $Z_G = \left\{\rho_k\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Положим теперь $f(z) = G(g(z))$, $z \in \mathbf{C}$. Очевидно, что $f \in H(\mathbf{C})$. Докажем, что функция G удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Действительно, $f(r_k) = G(g(r_k)) = G(\rho_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, при этом ввиду строгой монотонности функции $g(r)$ на $(0, +\infty)$, $f(r) \neq 0$ при $r \neq r_k$, $k = 1, 2, \ldots$, т.е. $Z_f^+ = \{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$,

$$\begin{aligned}\ln M(r,f) = \ln\max_{|z|\leqslant r}|G(g(z))| &\leqslant C\,|g(z)|^{3/2}\\ &\leqslant C\,(g(r))^{3/2} \leqslant C_1\,(\lambda_*(r))^{3/2} = C_1\,\lambda(r),\end{aligned}$$

$r \in (0, +\infty)$. □

Доказательство теоремы 2. Используя результаты работы [3], легко установить необходимость условия (3). Докажем достаточность. Снова, не ограничивая общности, положим $\lambda_*(r) = g(r)$, где $g(r)$ – целая функция, построенная выше, а $\lambda_*(r) = (\lambda(r))^{2/3}$. Пусть G – целая функция порядка $3/2$ нормального типа с нулями $\rho_k = G\left(\frac{1}{1-r_k}\right)$. Нетрудно установить, что из (3) следует (5), поэтому построение функции G следует из вышеуказанной теоремы Ж. Адамара. Положим $f(z) = G\left(g\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)$, $z \in \mathbf{D}$. Очевидно, что $f \in H(\mathbf{D})$. Докажем, что функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Ясно, что $f(r_k) = G(\rho_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и $f(r) \neq 0$, $0 < r < 1$, $r \neq r_k$, $k = 1, 2, \ldots$. В то же время

$$\begin{aligned}\ln|f(z)| = \ln\left|G\left(g\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)\right| &\leqslant C\left|g\left(\frac{1}{1-z}\right)\right|^{3/2}\\ &\leqslant C\left(g\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right)^{3/2} \leqslant C_1\lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad z \in \mathbf{D}.\end{aligned}$$

□

Литература

1. Ж. Валирон, *Аналитические функции*, Гостехиздат, М., 1957.
2. С. В. Быков, Ф. А. Шамоян, *О нулях целых функций с мажорантой бесконечного порядка.* — Алгебра и Анализ **21** (2009), No. 6, 66–79.
3. Ф. А. Шамоян, *О нулях аналитических в круге функций с заданной мажорантой вблизи его границы.* — Матем. заметки **85** (2009), Вып. 2, 300–312.
4. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций.* — Гостехиздат, М., 1956.
5. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций.* Наука, М., 1970.
6. W. K. Hayman, B. Korenblum, *A critical growth rate for functions regular in a disk.* — Michigan Math. J. **27** (1980), 21–30.
7. Ф. А. Шамоян, *Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста.* — Изв. АН АрмССР, математика **13** (1978), 405–422.
8. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, *Topics in the theory of A^p_α spaces.* — Leipzig: BSB Teubner (1988).
9. J. Clunie, *On the integral functions having preseribed asymptotic growth.* — Canad. J. Math. **17** (1965), 396–404.

Shamoyan F. A. Real zeros for certain classes of analytic functions determined by a majorant of infinite order.

Certain classes of entire functions or of functions analytic in the unit disk are treated; they are defined in terms of a radial majorant λ that grows sufficiently fast. Under certain assumptions on λ, the zero sets for such a class are described that lie on $\mathbb{R}_+$ (respectively, on the segment $[0,1)$).

Брянский государственный университет
им. акад. И. Г. Петровского
ул. Бежицкая 14, 241036 Брянск, Россия
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru

Поступило 7 июня 2010 г.