Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

А. М. Чириков

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ С БЫСТРО УБЫВАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

0. Введение и формулировка результата

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – аналитическая в единичном круге D функция. Существует много результатов о согласованности поведения функции f внутри круга D с поведением её коэффициентов Тейлора. В данной работе речь идёт о связи возможной скорости убывания функции $f(x)$ при $x \to 1-0$ с возможной скоростью убывания коэффициентов a_n. Эта связь проявляется, лишь если функция $f(x)$ убывает достаточно быстро. Например, если $f_N(z) = (1-z)^N$, то коэффициенты Тейлора функции f_N равны нулю при $n > N$ и $f_N(x) = e^{N\log(1-x)}$. Таким образом, скорость убывания функции с оценкой $e^{C\log(1-x)}$ при $x \in (0,1)$ не накладывает ограничений на возможную скорость убывания её коэффициентов.

Тем не менее, оказалось, что если

$$|f(x)| \leqslant C_0 e^{-C_1|\log(1-x)|^\lambda}, \quad \lambda > 1, \quad C_1 > 0, \tag{$*$}$$

то коэффициенты a_n не могут убывать слишком быстро, если $f \not\equiv 0$.

В [1, гл. 3] доказано, что при выполнении оценки ($*$) неравенства

$$|a_n| \leqslant C_1 e^{-C\sqrt{n}}, \quad C > 0, \tag{$**$}$$

влекут $f \equiv 0$. Иными словами, если $f \not\equiv 0$ и справедливо соотношение ($*$), то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|a_n|}{\sqrt{n}} \geqslant 0 \tag{1.1}$$

(в (1.1) принято соглашение $\log 0 = -\infty$).

В настоящей работе условия, наложенные на функцию f, аналогичные ограничениям ($**$), ослаблены (а условия, аналогичные (1.1), соответственно, усилены). Справедлива следующая

Ключевые слова: коэффициенты Тейлора, степенные ряды, убывание на радиусе, теоремы единственности для аналитических функций.

Теорема. *Пусть функция* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *аналитична в круге* D. *Предположим, что существуют постоянные* $\lambda > 1$, C_0, C_1, C_2, $C_3 > 0$ *такие, что выполняются условия*

$$|f(x)| \leqslant C_0 \exp\left(-C_1 \left|\log(1-x)\right|^{\lambda}\right), \quad \frac{1}{2} < x < 1, \tag{1.2}$$

$$|a_n| \leqslant C_2 \exp\left(-C_3 \frac{\sqrt{n}}{\log(n+2)}\right), \quad n \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Тогда $f(x) \equiv 0$.

1. Начало доказательства

Положим $F(s) = f\left(e^{-s}\right)$, где функция f обладает свойствами (1.2) и (1.3). Ясно, что при $s \in [0, \infty)$ функция $F(s)$ ограничена. Пусть

$$\varphi(\zeta) = \int\limits_0^{\infty} F(s) e^{s\zeta} ds, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0. \tag{1.4}$$

Используя (1.3), при $\operatorname{Re}\zeta < 0$ получаем равенство

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\infty} e^{-ns+s\zeta} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n-\zeta}. \tag{1.5}$$

Для дальнейшего существенную роль будет играть множество

$$T \stackrel{\text{def}}{=} [-1-i, -1+i] \bigcup [-1-i, +\infty+i] \bigcup [-1+i, +\infty+i].$$

Если мы распространим функцию $\varphi(\zeta)$ с полуплоскости $\{\zeta : \operatorname{Re}\zeta < 0\}$ на множество $\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \neq n,\ n \geqslant 0,\ n$ – целое$\}$, пользуясь правой частью равенства (1.5), то при $\zeta \in T$, $n \geqslant 0$ имеем $|n-\zeta| \geqslant 1$, поэтому формула (1.5) влечет оценку

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{|n-\zeta|} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \\ &\leqslant C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-C_3 \frac{\sqrt{n}}{\log(n+2)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} A_1, \end{aligned} \tag{1.6}$$

если $\zeta \in T$. Если $\zeta = -u + iv$, u достаточно велико, то условие (1.2) даёт возможность улучшить оценку для $\varphi(\zeta)$. Используя неравенства $\frac{e^s}{e^s-1} > \frac{1}{s}$ при $0 < s < 1$ и $\frac{e^s}{e^s-1} > 1$ при $s \geqslant 1$ и применяя метод Лапласа [2, гл. 2], с помощью (1.2) находим, что

$$\begin{aligned} |\varphi(-u+iv)| \leqslant C_0 \int\limits_0^1 e^{-C_1\left(\log \frac{1}{s}\right)^\lambda} ds \\ + C_0 \int\limits_1^\infty e^{-su} ds \leqslant C_4 e^{-C_5 (\log u)^\lambda}, \quad u \geqslant 2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Введём следующую рациональную функцию $h_N(\zeta)$:

$$h_N(\zeta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n-\zeta}. \tag{1.8}$$

Так как, в соответствии с (1.5) и (1.8), справедливо равенство

$$\varphi(\zeta) - h_N(\zeta) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n-\zeta},$$

то при $|\zeta - k| \geqslant \frac{1}{2}$, $k \geqslant N+1$, найдём, что

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta) - h_N(\zeta)| \leqslant 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} C_2 \exp\left(-C_3 \frac{\sqrt{n}}{\log(n+2)}\right) \\ \leqslant C_6 \exp\left(-\frac{C_3}{2}\,\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}\right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

В последующих оценках предполагаем, не умаляя общности, что $N \geqslant 4$. Если $\zeta = -u + iv$, то (1.7) и (1.9) влекут неравенства

$$\begin{aligned} |h_N(\zeta)| &\leqslant |\varphi(\zeta)| + |\varphi(\zeta) - h_N(\zeta)| \\ &\leqslant C_4 e^{-C_5 (\log u)^\lambda} + C_6 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из соотношения (1.10) следует, что при $|\zeta| \geqslant \frac{27}{16} N$ и при $|\arg\zeta + \pi| \leqslant \theta_{abs}$ с некоторым $\theta_{abs} > 0$ выполнено соотношение

$$|h_N(\zeta)| \leqslant C_4 e^{-C_5\left(\log \frac{8}{9}|\zeta|\right)^\lambda} + C_6 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}. \tag{1.11}$$

Так как в силу (1.6) при $|\zeta| \geqslant \frac{3}{2}N$ справедлива оценка $|h_N(\zeta)| \leqslant A_1$, то субгармоничность функции $\log|h_N(\zeta)|$ при $|\zeta| \geqslant \frac{3}{2}N$ и классические оценки интеграла Пуассона [3, гл. 2] показывают, что с некоторой постоянной $C_7 > 0$, зависящей лишь от C_5 и λ, выполнено соотношение

$$|h_N(\zeta)| \leqslant C_4 e^{-C_7\left(\log \frac{3}{4}|\zeta|\right)^\lambda} + C_6 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}, |\zeta| \geqslant 2N. \tag{1.12}$$

Выберем ρ_N из равенства

$$C_4 e^{-C_7\left(\log \frac{3}{4}\rho_N\right)^\lambda} = C_6 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}. \tag{1.13}$$

Из соотношений (1.12) и (1.13) замечаем, что при $|\zeta| \geqslant \rho_N$ будет справедлива оценка

$$|h_N(\zeta)| \leqslant 2C_6 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}. \tag{1.14}$$

Равенство (1.13) показывает, что при соответствующем выборе постоянной C_8 при выборе величины $\widetilde{\rho_N}$ из равенства

$$\log \widetilde{\rho_N} = C_8 N^{\frac{1}{2\lambda}} \tag{1.15}$$

будет справедливо соотношение $\widetilde{\rho_N} \geqslant \rho_N$, и поэтому при $|\zeta| = \widetilde{\rho_N}$ оценка (1.14) выполняется.

Применим теперь теорему Адамара о трёх кругах ([4, гл. 6]) к функции $h_N(\zeta)$ и окружностям $\Gamma_1 = \{\zeta : |\zeta| = 2N\}$, $\Gamma_2 = \{\zeta : |\zeta| = 4N\}$ и $\Gamma_3 = \{\zeta : |\zeta| = \widetilde{\rho_N}\}$.

Учитывая неравенства

$$|h_N(\zeta)| \leqslant A_1 \quad \text{при} \quad \zeta \in \Gamma_1,$$
$$|h_N(\zeta)| \leqslant 2C_6\, e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}} \quad \text{при} \quad \zeta \in \Gamma_3,$$

получаем оценку

$$|h_N(\zeta)| \leqslant A_1^{\alpha_1}\left(2C_6 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}\right)^{\alpha_2} \quad \text{при} \quad \zeta \in \Gamma_2, \tag{1.16}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\log \frac{\widetilde{\rho_N}}{4N}}{\log \frac{\widetilde{\rho_N}}{2N}} = \frac{C_8 N^{\frac{1}{2\lambda}} - \log(4N)}{C_8 N^{\frac{1}{2\lambda}} - \log(2N)}, \tag{1.17}$$

$$\alpha_2 = \frac{\log \frac{4N}{2N}}{\log \frac{\widetilde{\rho_N}}{2N}} = \frac{\log 2}{C_8 N^{\frac{1}{2\lambda}} - \log(2N)}. \tag{1.18}$$

Из (1.16)–(1.18) находим, что при $|\zeta| \geqslant 4N$ с некоторыми постоянными $C_9 > 0$ и $C_{10} > 0$ выполняется неравенство

$$|h_N(\zeta)| \leqslant C_9 e^{-C_{10}\frac{N^\mu}{\log(N+2)}}, \tag{1.19}$$

где $\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$.

2. Окончание доказательства

Определим теперь величину $\rho_{N(1)}$ из равенства

$$C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}} = C_9 e^{-C_{10}\frac{\left(\frac{\rho_{N(1)}}{4}\right)^\mu}{\log\frac{\rho_{N(1)}}{4}}}. \tag{2.1}$$

При большом N соотношение (2.1) влечёт

$$\frac{\rho_{N(1)}^\mu}{\log \rho_{N(1)}} = C_{11}\frac{\sqrt{N}}{\log N}(1 + o(1)). \tag{2.2}$$

Учтём, что $\frac{1}{2\mu} = \frac{\lambda}{\lambda-1} > 1$, поэтому из формулы (2.2) следует равенство

$$\frac{\rho_{N(1)}}{N} = C_{12}N^{\frac{1}{\lambda-1}}(1 + o(1)), \tag{2.3}$$

откуда вытекает, что при достаточно больших N справедливо соотношение

$$\frac{\rho_{N(1)}}{N} < C_{13}N^{\frac{1}{\lambda-1}}. \tag{2.4}$$

Пусть

$$\widetilde{\rho_{N(1)}} = \left[C_{13}N^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\right] + 1, \tag{2.5}$$

где в (2.5) $[\ \ ]$ – знак целой части. В силу выбора (2.1)–(2.5) величин $\rho_{N(1)}$ и $\widetilde{\rho_{N(1)}}$, при $|\zeta| \geqslant \widetilde{\rho_{N(1)}}$ справедливо соотношение

$$\left|h_{\widetilde{\rho_{N(1)}}}(\zeta)\right| \leqslant C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}. \tag{2.6}$$

Но при $|\zeta| \geqslant \widetilde{\rho_{N(1)}} + 1$ в силу (1.14) выполнена оценка

$$\left|h_{\widetilde{\rho_{N(1)}}}(\zeta) - h_N(\zeta)\right| \leqslant C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}, \tag{2.7}$$

поэтому неравенства (2.6) и (2.7) влекут, что при $|\zeta| \geqslant \widetilde{\rho_{N(1)}}+1$ справедливо неравенство

$$|h_N(\zeta)| \leqslant 2C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}. \tag{2.8}$$

К функции h_N опять применим теорему о трёх кругах с радиусами $r = 2N$, $\rho = 4N$, $R = 2\widetilde{\rho_{N(1)}}$. Продолжая применять оценку (1.6) и воспользовавшись новой оценкой (2.8), находим, что при $|\zeta| = 4N$ выполнено соотношение

$$|h_N(\zeta)| \leqslant C_{14}\biggl(\exp\biggl(-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}\biggr)\biggr)^{\frac{\log 2}{\log \widetilde{\rho_{N(1)}}}}. \tag{2.9}$$

Из (2.5) и (2.9) теперь следует, что при $|\zeta| = 4N$ (а, значит, и при $|\zeta| \geqslant 4N$) имеется оценка

$$|h_N(\zeta)| \leqslant C_{14}\exp\biggl(-C_{15}\frac{\sqrt{N}}{\log^2 N}\biggr). \tag{2.10}$$

Приступим к последней итерации процесса. Выберем величину $\rho_{N(2)}$ из равенства

$$C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}} = C_{14} e^{-C_{15}\frac{\sqrt{\rho_{N(2)}}}{\log^2\rho_{N(2)}}}, \tag{2.11}$$

т.е.

$$\frac{\sqrt{\rho_{N(2)}}}{\log^2\rho_{N(2)}} = C_{16}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)} + C_{17},$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_{N(2)}}{\log^4\rho_{N(2)}} = C_{16}^2\frac{N}{\log^2(N+2)} + 2C_{16}C_{17}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)} + C_{17}^2,\\ \frac{\rho_{N(2)}}{N} = C_{16}^2\frac{\log^4\rho_{N(2)}}{\log^2(N+2)} + 2C_{16}C_{17}\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\log^4\rho_{N(2)}}{\log(N+2)}\\ + C_{17}^2\frac{\log^4\rho_{N(2)}}{N} < C_{18}\frac{\log^4\rho_{N(2)}}{\log^2(N+2)}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

При достаточно больших N (а, значит, и $\rho_{N(2)}$) из соотношений (2.10) и (2.11) следует, что при $|\zeta| = 8\rho_{N(2)}$ выполняется неравенство

$$\Bigl|h_{[8\rho_{N(2)}]}(\zeta)\Bigr| \leqslant C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}; \tag{2.13}$$

при этом при $|\zeta| = 8\rho_{N(2)}$ имеем соотношение

$$\left|h_{[8\rho_{N(2)}]}(\zeta) - h_N(\zeta)\right| \leqslant C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}}. \tag{2.14}$$

Поэтому (2.13) и (2.14) влекут, что

$$|h_N(\zeta)| \leqslant 2C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}} \tag{2.15}$$

при $|\zeta| = 8\rho_{N(2)}$. Опять применим теорему о трёх кругах к функции $h_N(\zeta)$ и кругам радиусом $r = 8N$, $\rho = 16N$, $R = 8\rho_{N(2)}$. Тогда (1.6) и (2.15) влекут

$$|h_N(\zeta)| \leqslant C_{19}\biggl(\exp\biggl(-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{N}}{\log(N+2)}\biggr)\biggr)^{\frac{\log 2}{\log\frac{\rho_{N(2)}}{N}}}. \tag{2.16}$$

С учётом (2.12) из (2.16) находим, что

$$|h_N(\zeta)| \leqslant C_{19}\exp\biggl(-C_{20}\frac{\sqrt{N}}{\log N\log\log N}\biggr) \tag{2.17}$$

при $|\zeta| \geqslant 16N$ и достаточно больших N. Соотношение (2.17) при достаточно больших $N \geqslant N_0$ можно упростить следующим образом: если $16N \leqslant |\zeta| \leqslant 16(N+1)$, то в силу (2.17),

$$\begin{aligned}
|h_N(\zeta)| &\leqslant C_{19}\exp\biggl(-C_{20}\frac{\sqrt{N}}{\log N\log\log N}\biggr)\\
&\leqslant C_{19}\exp\left(-C_{20}\frac{\sqrt{\frac{|\zeta|}{16}-1}}{\log\left(\frac{|\zeta|}{16}-1\right)\log\log\left(\frac{|\zeta|}{16}-1\right)}\right)\\
&\leqslant C_{19}\exp\biggl(-C_{21}\frac{\sqrt{|\zeta|}}{\log|\zeta|\log\log|\zeta|}\biggr)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

с некоторой постоянной $C_{21} > 0$. Кроме того, при $16N \leqslant |\zeta| \leqslant 16(N+1)$ и $N \geqslant N_2$ имеем

$$C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{16N}}{\log(16N+2)}} \leqslant C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{16|\zeta|-16}}{\log(16|\zeta|-14)}} < C_2 e^{-C_3\frac{\sqrt{|\zeta|}}{\log|\zeta|}}. \tag{2.19}$$

Следовательно, (2.18) и (2.19) дают, что при $\zeta \in T$, $16N \leqslant |\zeta| \leqslant 16N+16$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)-h_{16N}(\zeta)| &= \biggl|\sum_{k=16N+1}^{\infty}\frac{a_k}{\zeta-k}\biggr| \leqslant \sum_{k=16N+1}^{\infty}|a_k| \\ &< C_2 e^{-\frac{C_3}{2}\frac{\sqrt{16N}}{\log(16N+2)}} < C_2 e^{-C_3\frac{\sqrt{|\zeta|}}{\log|\zeta|}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

и

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)| &\leqslant |\varphi(\zeta)-h_{16N}(\zeta)| + |h_{16N}(\zeta)| < C_2 e^{-C_3\frac{\sqrt{|\zeta|}}{\log|\zeta|}} \\ &\quad + C_{19} e^{-C_{21}\frac{\sqrt{|\zeta|}}{\log|\zeta|\log\log|\zeta|}} \\ &\quad < 2C_{19}\exp\biggl(-C_{21}\frac{\sqrt{|\zeta|}}{\log|\zeta|\log\log|\zeta|}\biggr), \end{aligned} \tag{2.21}$$

если N достаточно велико.

Пусть I – полуполоса, ограниченная контуром T; тогда при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus I$ имеем

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{|\zeta-n|} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = A_1. \tag{2.22}$$

Используя формулу Кристоффеля–Шварца ([5, гл. 2]), отобразим верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ на область $\mathbb{C}\setminus I$ с помощью функции $\psi(w)$ так, что $\psi(iv) \to -\infty$ при $v \to +\infty$; при $v \to \pm\infty$ будет выполняться соотношение

$$\psi(v) = v^2(1+o(1)). \tag{2.23}$$

Положим

$$\Psi(w) = \varphi(\psi(w)). \tag{2.24}$$

Из соотношения (2.22) следует, что $|\Psi(w)| \leqslant A_1$ при $w \in \mathbb{C}_+$. Далее, (2.21), (2.23) и (2.24) влекут при вещественном v, $|v| \geqslant v_0$, неравенство

$$\begin{aligned} |\log|\Psi(v)|| &\geqslant C_{21}\frac{\sqrt{|\psi(v)|}}{\log|\psi(v)|\log\log|\psi(v)|} - \log 2C_{19} \\ &\geqslant C_{22}\frac{|v|}{\log|v|\log\log|v|} \end{aligned} \tag{2.25}$$

с некоторой постоянной $C_{22} > 0$. Оценка (2.25) влечёт соотношение

$$\int\limits_R \frac{|\log|\Psi(v)||}{1+v^2}dv \geqslant \int\limits_{|v|\geqslant v_0} C_{22}\frac{|v|}{(1+v^2)\log|v|\log\log|v|}dv = +\infty. \quad (2.26)$$

Из (2.24) и (2.26) следует, что $\Psi \equiv 0$, отсюда следует, что $a_n = 0$ для всякого n, что даёт $f(z) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Литература

1. N. A. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary.* — Lect. Notes Math., Springer-Verlag **1312**, 1988.
2. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* Москва, 2010.
3. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1950.
4. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций.* Том 2. Изд. 2, Наука, Москва, 1967.
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексной переменной.* Наука, Москва, 1965.

Chirikov A. M. Power series with fast decreasing coefficients.

Let $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ be an analytic function in the unit disc such that for some $\lambda > 1$, C_0, C_1, C_2, $C_3 > 0$ we have

$$|f(x)| \leqslant C_0 \exp\left(-C_1|\log(1-x)|^\lambda\right), \quad \frac{1}{2} < x < 1$$

and

$$|a_n| \leqslant C_2 \exp\left(-C_3\frac{\sqrt{n}}{\log(n+2)}\right), \quad n \geqslant 0.$$

Then $f \equiv 0$.

РГПУ им. А. И. Герцена
кафедра математического анализа
наб. р. Мойки 48, 191186
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: maugll@mail.ru

Поступило 12 мая 2010 г.