Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

Д. В. Руцкий

ЗАМЕЧАНИЯ О ВМО-РЕГУЛЯРНОСТИ И АК-УСТОЙЧИВОСТИ

Начнём с очень сжатого описания содержания статьи (все необходимые определения и более детальные формулировки будут даны позже).

В этой работе рассматриваются свойства BMO-регулярности пар квазинормированных решеток измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$, обладающих свойством Фату, и обсуждается связь между BMO-регулярностью и АК-устойчивостью – известным достаточным, и, по-видимому, близким к необходимому условием для "хорошей" интерполяции между соответствующими аналитическими подпространствами. Даётся положительный ответ на выдвинутую в [8] гипотезу о том, что введённое там же свойство слабой BMO-регулярности для пар решеток (X, Y) совпадает с обычным свойством BMO-регулярности, что обеспечивает характеризацию BMO-регулярности пары решеток (X, Y) в терминах BMO-регулярности решетки XY', самодвойственность свойства BMO-регулярности пары решеток, и устойчивость свойства BMO-регулярности пары решеток относительно деления на решетку. Доказательство опирается на выпуклость, замкнутость, и монотонность множества BMO-мажорант в определённом смысле, что позволяет применить теорему Ки Фана–Какутани о неподвижной точке.

Полученные в [14, 8] критерии BMO-регулярности пары решеток (X, Y) в терминах АК-устойчивости пар решеток вида $(X(l^p), Y(l^q)(w_\lambda))$ $(1 \leqslant q < p \leqslant \infty)$ на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega \times \mathbb{Z}$ с экспоненциальным весом по последней переменной $w_\lambda(\cdot, \cdot, j) = \lambda^j$, $\lambda > 1$, допускают обобщение на случай $p = q$, и на случай пары без степенного веса $(X(l^\infty), Y(l^1))$. Приведённые построения выявляют некоторую связь между весовыми и векторными утверждениями подобного рода.

Ключевые слова: BMO-регулярность, пространства типа Харди, АК-устойчивость, К-замкнутость, интерполяция, теорема Ки Фана–Какутани о неподвижной точке.

Обсуждается ограниченная AK-устойчивость – ещё одно естественное усиление свойства AK-устойчивости, когда в свойстве аналитической K-устойчивости для пары функций (f, g) можно брать разбиение вида $(f+g)U + (f+g)(1-U)$, где U – ограниченная аналитическая функция. Оно является следствием BMO-регулярности, но, по крайней мере в случае $Y = \mathrm{L}_\infty$, его удаётся получить и из AK-устойчивости. Это свойство интересно тем, что если им обладает пара решеток (X, Y), то им также обладает пара решеток (X^α, Y^α) при всех $0 < \alpha < 1$; про обычную AK-устойчивость известно обратное утверждение в случае, когда решетки X и Y банаховы (см. [8, теорема 2]).

Рассматривается случай ограниченной AK-устойчивости пары (X, L_∞) для решетки X, обладающей следующим свойством: если

$$\|f_j\| \leqslant \sum_k \lambda^{-|j-k|} \|g_k\|,$$

то $\left\| \bigvee_j |f_j| \right\| \leqslant C \left\| \sum_j |g_j| \right\|$ (число $\lambda > 1$ фиксировано). Показывается, что тогда ограниченно AK-устойчива пара (XF, L_∞) для любой BMO-регулярной решетки F.

Обсуждается конкретный вид функции U в случае $Y = \mathrm{L}_\infty$. Если решетка X BMO-регулярна, то подходящую функцию U можно получить линейным преобразованием из аналитического разложения единицы, согласованного с соответствующей BMO-мажорантой. Оказывается, что если пара (X, L_∞) AK-устойчива, то каждый набор функций U, соответствующий заданной функции $f \in X$, получается тем же самым преобразованием из некоторого аналитического разложения единицы, понимаемого особым образом.

1. Формулировки основных результатов

Все основные используемые понятия и свойства со ссылками на доказательства можно найти в [14] и [8], здесь они приводятся без каких-либо оговорок. Пусть (Ω, μ) – измеримое пространство с σ-конечной мерой μ, m — нормированная мера Лебега на единичной окружности $\mathbb{T}$. Число $m(F)$ иногда будет обозначаться через $|F|$. Основными объектами теории являются квазинормированные решетки X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$. При этом всегда предполагается, что $\operatorname{supp} X = \mathbb{T} \times \Omega$. Говорят, что решетка X обладает свойством Фату, если из того, что для любых $f_n \in X$, таких, что $\|f_n\|_X \leqslant 1$ и f_n сходится к f почти всюду, верны соотношения $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant 1$. Свойство Фату эквивалентно порядковой рефлексивности решетки X, т.е. соотношению $X'' = X$, если решетка X банахова. Также свойство Фату решетки X эквивалентно тому, что замкнутый единичный шар B_X решетки X замкнут по мере $m \times \mu$, см. [13]. Для любых двух квазинормированных решеток измеримых функций на измеримом пространстве множество поточечных произведений их элементов $XY = \{fg \mid f \in X, g \in Y\}$ также является квазинормированной решеткой с квазинормой

$$\|h\|_{XY} = \inf_{h=fg} \|f\|_X \|g\|_Y.$$

Если решетки X и Y обладают свойством Фату, то решетка XY также обладает свойством Фату. Произведение квазинормированных решеток ассоциативно: если X, Y, Z — решетки измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, то $(XY)Z = X(YZ)$. По известной теореме Лозановского о факторизации (см. [11]) имеет место разложение $XX' = \mathrm{L}_1$ для любой банаховой решетки X, обладающей свойством Фату.

Для любого числа $\delta > 0$ степень X^δ квазинормированной решетки X определяется как решетка измеримых функций f, нормы $\|f\|_{X^\delta} = \|\,|f|^{1/\delta}\|_X^\delta$ которых конечны. В частности, $\mathrm{L}_p^\delta = \mathrm{L}_{p/\delta}$. Для произведения XY квазинормированных решеток и $\delta > 0$ имеет место формула $(XY)^\delta = X^\delta Y^\delta$ (здесь и далее, если не оговорено иное, равенство квазинормированных решеток означает совпадение соответствующих множеств функций и соответствующих норм); если решетка X обладает свойством Фату, то решетка X^δ также обладает свойством Фату. Если $\delta \leqslant 1$ и X – банахова решетка, то решетка X^δ также будет банаховой. Если X, Y — банаховы решетки, то для любого $0 < \delta < 1$ решетка $X^{1-\delta}Y^\delta$ также будет банаховой. Для решетки измеримых функций X через X_+ обозначается множество $\{f \in X \mid f \geqslant 0 \text{ п.в.}\}$.

1.1. Слабая BMO-регулярность

Понятие BMO-регулярности было введено в работе [6] (в несколько более общем контексте) и в дальнейшем обобщено на случай пары пространств в [2].

Определение 1. *Квазинормированная решетка X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ называется* BMO-*регулярной с константами (C,m), если для любой функции $f \in X$,*

$f \neq 0$, *существует такая функция* $g \in X$, *называющаяся* BMO-*мажорантой для* f *с константами* (C, m), *что* $|f| \leqslant g$ *почти всюду*, $\|g\|_X \leqslant m\|f\|_X$ *и* $\|\log g(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ *при почти всех* $\omega \in \Omega$.

Определение 2. *Пара решеток* (X, Y) *измеримых функций на измеримом пространстве* $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ *называется* BMO-*регулярной с константами* (C, m), *если для любой пары функций* (f, g), $f \in X$, $g \in Y$, *отличных от нуля, существует пара функций* (u, v), $u \in X$, $v \in Y$, *называющаяся* BMO-*мажорантой для пары* (f, g), *такая, что* $|f| \leqslant u$, $|g| \leqslant v$ *п.в.*, $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$, $\|v\|_Y \leqslant m\|g\|_Y$ *и* $\|\log(u(\cdot,\omega)/v(\cdot,\omega))\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ *при почти всех* $\omega \in \Omega$.

BMO-регулярность связана с некоторыми вопросами интерполяции пространств типа Харди, а также с ограниченностью оператора гармонического сопряжения $\mathcal{H}$, действующего по первой переменной; подробнее см. [2, 8, 15], а также следующий подраздел 1.2. В [8, определение 3] было введено понятие слабой BMO-регулярности. В силу [8, теорема 1] в случае, когда решетки X, Y обладают свойством Фату, исходное определение эквивалентно следующему, которым мы и будем пользоваться.

Определение 3. *Пара решеток* (X, Y) *измеримых функций на измеримом пространстве* $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ *называется слабо* BMO-*регулярной с константами* (C, m), *если с теми же константами* BMO-*регулярна пара* $(X\,\mathrm{L}_1, Y\,\mathrm{L}_1)$.

Слабая BMO-регулярность, как и просто BMO-регулярность, является достаточным условием для “хорошей” интерполяции соответствующих аналитических подпространств. Введение этого понятия было мотивировано тем, что в случае наличия свойства Фату оно самодвойственно и допускает деление на решетку (см. [8, 15]). Самодвойственность означает, что пары (X, Y) и (X', Y') банаховых решеток, обладающих свойством Фату, слабо BMO-регулярны лишь одновременно. Факторизация, или делимость, означает, что для любых решеток X, Y, и F, обладающих свойством Фату, из того что слабо BMO-регулярна пара решеток (XF, YF) следует, что пара (X, Y) также слабо BMO-регулярна. Для обычной BMO-регулярности проверить эти свойства не удавалось, однако в той же работе [8] была высказана гипотеза о том, что для пар решеток, обладающих свойством Фату, слабая BMO-регулярность совпадает с обычной. Здесь эта гипотеза будет доказана.

Теорема 1. *Пусть* (X,Y) *— пара банаховых решеток измеримых функций на измеримом пространстве* $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$. *Предположим, что обе решетки обладают свойством Фату. Пара* (X,Y) BMO-*регулярна тогда и только тогда, когда она слабо* BMO-*регулярна.*

BMO-регулярность тривиальным образом влечёт слабую BMO-регулярность, поскольку для любых квазинормированных решеток X, Y и F из BMO-регулярности пары (X,Y) следует BMO-регулярность пары (XF,YF). Доказательство обратного утверждения приводится в разделе 4. Не вдаваясь пока в не очень прозрачные детали, отметим, что оно основано на следующей простой идее. Пусть дана пара ненулевых функций $f\in X$, $g\in Y$. Для каждой пары положительных почти всюду функций $u_1,u_2\in \mathrm{L}_1$, $\|u_1\|_{\mathrm{L}_1}=\|u_2\|_{\mathrm{L}_1}=1$, можно образовать пару функций $fu_1\in X\,\mathrm{L}_1$, $gu_2\in Y\,\mathrm{L}_1$, для которой найдётся BMO-мажоранта (u,v) в паре $(X\,\mathrm{L}_1, Y\,\mathrm{L}_1)$. Тогда для некоторых положительных почти всюду функций v_1, $v_2\in\mathrm{L}_1$, $\|v_1\|_{\mathrm{L}_1}=1$, $\|v_2\|_{\mathrm{L}_1}=1$, и константы c, имеют место оценки

$$\|uv_1^{-1}\|_X\leqslant c\|f\|_X,\quad \|vv_2^{-1}\|_Y\leqslant c\|g\|_Y.$$

Если возможно выбрать функции u_j и v_j, $j\in\{1,2\}$, таким образом, что $u_j=v_j$ и $\log(u_1/u_2)\in\mathrm{BMO}$, то пара (uv_1^{-1}, vv_2^{-1}) будет BMO-мажорантой для исходной пары функций (f,g) в паре решеток (X,Y). Это, по существу, и будет в конце концов проделано в разделе 4 с помощью теоремы Ки Фана–Какутани о неподвижной точке, применённой к специальным образом сконструированному отображению.

1.2. AK-устойчивость с дополнительной переменной

Для каждой решетки X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ можно определить соответствующее аналитическое подпространство $X_A=\{f\in X\mid f(\cdot,\omega)\in \mathrm{N}^+\quad \text{п.в.}\quad \omega\in\Omega\}$, где N^+ – граничный класс Смирнова (подробнее см. [12]). Известным примером являются весовые пространства Харди $(\mathrm{L}_p(w))_A=\mathrm{H}_p(w)$; мы используем следующее определение весовой решетки $X(w)$ с почти всюду положительным весом w: $X(w)=\{wf\mid f\in X\}$ с нормой $\|f\|_{X(w)}=\|fw^{-1}\|_X$. Если решетка X обладает свойством Фату, то из теоремы Хинчина–Островского (см. [12, 14]) вытекает, что X_A является замкнутым подпространством в X. Для решеток X рассматриваемого типа часто будет предполагаться наличие следующего свойства:

$$\begin{aligned}&\text{для каждой функции} \quad f \in X, \quad f \neq 0, \quad \text{существует такая}\\ &\text{мажоранта} \quad g \in X, \quad g \geqslant |f|, \quad \text{что} \quad \log g(\cdot,\omega) \in \mathrm{L}_1\\ &\text{при п. в.} \quad \omega \in \Omega \quad \text{и} \quad \|g\|_X \leqslant c_*\|f\|_X,\end{aligned} \tag{$*$}$$

где константа c_* не зависит от f. Часто используемым следствием свойства $(*)$ является то, что в решетке X “достаточно много” функций из X_A: для любой функции $f \in X$, $f \neq 0$, построенная по соответствующей мажоранте g внешняя функция $F = \exp(\log g + i\mathcal{H} \log g)$ принадлежит пространству X_A, и при этом справедливы оценки $|f| \leqslant |F|$, $\|F\|_X \leqslant c\|f\|_X$.

Определение 4. *Пара (X, Y) квазинормированных решеток измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ называется* AK*-устойчивой с константой c, если пара (X_A, Y_A) K-замкнута в (X, Y) с константой c, т. е. для любых функций $f \in X_A + Y_A$, $g_0 \in X$, $h_0 \in Y$, таких, что $f = g_0 + h_0$, существуют функции $g \in X_A$, $h \in X_A$, такие, что $f = g + h$ и $\|g\|_X \leqslant c\|g_0\|_X$, $\|h\|_Y \leqslant c\|h_0\|_Y$. Пара (X, Y) называется сильно* AK*-устойчивой, если такое разложение имеет место лишь при условии $f \in (X + Y)_A$ вместо $f \in X_A + Y_A$.*

Для удобства введём также следующее определение по аналогии с BMO-регулярностью для одного пространства.

Определение 5. *Решетка X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ называется (сильно)* AK*-устойчивой, если (сильно)* AK*-устойчива пара (X, L_∞).*

Если решетки X и Y обладают свойством Фату, то по [8, лемма 3] пара (X, Y) AK-устойчива тогда и только тогда, когда она сильно AK-устойчива. Свойство AK-устойчивости представляет интерес в связи с вещественной интерполяцией аналитических пространств. Например, для AK-устойчивых пар решеток (X, Y) верна формула $(X_A, Y_A)_{\theta p} = ((X, Y)_{\theta p})_A$, позволяющая вычислять соответствующие вещественные интерполяционные пространства для аналитических подпространств.

Хорошо известно, что BMO-регулярность достаточна для сильной AK-устойчивости. Известное доказательство, которое сейчас будет для полноты приведено, использует AK-устойчивость BMO-регулярной пары весовых пространств L_∞; к несколько более детальной характеризации этой AK-устойчивости мы обратимся далее в разделе 8. Если пара решеток (X, Y) BMO-регулярна с константами (C, m), то для любой пары функций $f \in X$, $g \in Y$, такой, что $f + g \in (X + Y)_A$, и соответствующих BMO-мажорант $u \geqslant |f|$, $v \geqslant |g|$, имеем $f + g \in (\mathrm{L}_\infty(u) + \mathrm{L}_\infty(v))_A$. Пара $(\mathrm{L}_\infty(u), \mathrm{L}_\infty(v))$ сильно AK-устойчива с константой, зависящей только от величины

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \left\| \log \frac{u(\cdot, \omega)}{v(\cdot, \omega)} \right\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$$

(см. [5, 2]), поэтому существуют такие функции

$$F \in \mathrm{H}_\infty(u) \subset X_A,$$
$$G \in \mathrm{H}_\infty(v) \subset Y_A,$$

что $f + g = F + G$, и имеют место оценки

$$\|F\|_{\mathrm{L}_\infty(u)} \leqslant c\|f\|_{\mathrm{L}_\infty(u)} \leqslant c,$$

$$\|G\|_{\mathrm{L}_\infty(v)} \leqslant c\|g\|_{\mathrm{L}_\infty(v)} \leqslant c,$$

для некоторой константы c, не зависящей от f и g. Отсюда сразу получаем, что

$$\|F\|_X \leqslant \|F\|_{\mathrm{L}_\infty(u)} \|u\|_X \leqslant cm\|f\|_X,$$

$$\|G\|_Y \leqslant \|G\|_{\mathrm{L}_\infty(v)} \|v\|_Y \leqslant cm\|g\|_Y.$$

Таким образом, пара (X, Y) сильно AK-устойчива, как и утверждалось.

Пока неизвестно, является ли BMO-регулярность следствием AK-устойчивости в общем случае. Среди частных результатов по этому вопросу выделяются относительно недавно полученные в [14, 8] критерии BMO-регулярности, которые выражены в терминах AK-устойчивости пар решеток определённого вида, построенных из исходной пары введением дополнительной переменной. Стандартная техника позволяет несколько обобщить эти результаты, что будет проделано в разделе 6. Основной результат сформулирован ниже в виде теоремы 2. Напомним, что для решетки X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ и решетки измеримых функций Ξ на σ-конечном измеримом пространстве (Ω_1, μ_1), решетка

$X(\Xi)$ определяется как максимальное линейное множество измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega\times\Omega_1, m\times\mu\times\mu_1)$, таких, что соответствующая векторная норма $\|f\|_{X(\Xi)} = \|g\|_X$, $g(t,\omega) = \|f(t,\omega,\cdot)\|_\Xi$, определена и конечна. При работе с решетками такого вида могут возникать трудности с измеримостью. Используя теорему Фубини, нетрудно убедиться, что в используемом в этой работе случае σ-конечного измеримого пространства Ω_1 и $\Xi = \mathrm{L}_p$, $0 < p \leqslant \infty$, функция g будет измеримой для любой измеримой функции f, однако неясно, будет ли так в общем случае. Если решетки X и Ξ обладают свойством Фату, то решетка $X(\Xi)$ также обладает свойством Фату. Пусть $\lambda > 0$ – некоторое число. Обозначим через $l^p_\lambda = l^p(\lambda^j)$ решетку l^p с весом $j \mapsto \lambda^j$.

Теорема 2. *Пусть (X,Y) – пара решеток измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающих свойством Фату и свойством $(*)$, причём XY' является банаховой решеткой. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Пара (X,Y)* ВМО-*регулярна.*

(2) *Пара $(X(l^p_\lambda), Y(l^q))$* АК-*устойчива при некоторых $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ и $\lambda > 1$.*

(3) *Пара $(X(l^p_\lambda), Y(l^q))$* АК-*устойчива при всех $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ и $\lambda > 1$.*

(4) *Пара $(X(l^\infty), Y(l^1))$* АК-*устойчива.*

По сравнению с упомянутыми результатами, полученными в [8, 14], новой здесь является достаточность условия 2 при $p = q$ и достаточность условия 4. Отметим, что в условиях теоремы 2 из АК-устойчивости пары (X,Y) следует АК-устойчивость пары $(X(l^p), Y(l^p))$ для любого $0 < p < \infty$ (см. далее предложение 20), а условие 2 теоремы 2 при $p = q$ внешне отличается от АК-устойчивости пары $(X(l^p), Y(l^p))$ всего лишь наличием степенного веса по последней переменной. Ещё предстоит выяснить, можно ли вообще избавиться от дополнительной переменной в подобном утверждении.

Доказательство теоремы 2, приводимое в разделе 6, сводит всё к известному случаю $p < q = \infty$ (см. [14]); при этом выявляется и используется некоторая связь между весовой и векторной АК-устойчивостью (см. предложение 23). С. В. Кисляков сообщил автору, как доказательство из [14] можно непосредственно обобщить на случай $p = q = \infty$, при этом оно значительно упрощается в технических деталях. Вероятно, это доказательство появится в будущей работе.

1.3. Ограниченная АК-устойчивость

Из приведённого в разделе 1.2 доказательства можно заметить, что из BMO-регулярности вытекает следующее свойство, формально более сильное, чем АК-устойчивость.

Определение 6. *Будем называть пару решеток (X, Y) измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ ограниченно* АК-*устойчивой с константой c, если для любых функций $f \in X$ и $g \in Y$ существует такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$, что $\|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c$ и*

$$\|gU\|_X \leqslant c\|f\|_X,$$
$$\|f(1-U)\|_Y \leqslant c\|g\|_Y.$$

Введение этого свойства оправдано уже тем, что в ряде ситуаций с ним проще работать; оно так или иначе использовалось ранее. Другим преимуществом можно считать следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть пара квазинормированных решеток (X, Y) измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ ограниченно* АК-*устойчива. Тогда для любого числа $0 < \delta < 1$ ограниченно* АК-*устойчива и пара (X^δ, Y^δ).*

Действительно, пусть в условиях этого предложения даны произвольные функции $f \in X^\delta$ и $g \in Y^\delta$. Тогда $|f|^{\frac{1}{\delta}} \in X$, $|g|^{\frac{1}{\delta}} \in Y$, и в силу ограниченной АК-устойчивости пары (X, Y) найдётся такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$, что

$$\|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c,$$
$$\|\,|g|^{\frac{1}{\delta}}U\|_X \leqslant c\|\,|f|^{\frac{1}{\delta}}\|_X,$$
$$\|\,|f|^{\frac{1}{\delta}}(1-U)\|_Y \leqslant c\|\,|g|^{\frac{1}{\delta}}\|_Y$$

для некоторой постоянной c, не зависящей от функций f и g. Но тогда, используя ограниченность функции U, легко получить оценки

$$\|gU\|_{X^\delta} = \|\,|g|^{\frac{1}{\delta}}|U|^{\frac{1}{\delta}}\|_X^\delta \leqslant c^{1-\delta}\|\,|g|^{\frac{1}{\delta}}U\|_X^\delta \leqslant c\|\,|f|^{\frac{1}{\delta}}\|_X^\delta = c\|f\|_{X^\delta},$$

$$\begin{aligned}\|f(1-U)\|_{Y^\delta} &= \|\,|f|^{\frac{1}{\delta}}|1-U|^{\frac{1}{\delta}}\|_Y^\delta \leqslant (c+1)^{1-\delta}\|\,|f|^{\frac{1}{\delta}}(1-U)\|_Y^\delta \\ &\leqslant (c+1)\|\,|g|^{\frac{1}{\delta}}\|_Y^\delta = (c+1)\|g\|_{Y^\delta},\end{aligned}$$

откуда следует ограниченная АК-устойчивость пары (X^δ, Y^δ) с константой $c+1$. По-видимому, для АК-устойчивости при некоторых условиях были известны только варианты обратного утверждения, а именно что из АК-устойчивости пары (X^δ, Y^δ) следует АК-устойчивость пары (X, Y) (см. [8, теорема 2]).

Ограниченная АК-устойчивость, как и обычная (см. [8, лемма 4]), выдерживает умножение на решетку.

Предложение 2. *Пусть X, Y и F – квазинормированные решетки измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, и пара (X, Y) ограниченно* АК*-устойчива. Тогда пара (XF, YF) также ограниченно* АК*-устойчива.*

Действительно, если в условиях этого предложения даны произвольные функции $f \in XF$ и $g \in YF$, то найдутся такие измеримые разложения $f = f_1 f_2$ и $g = g_1 g_2$, что выполнены условия $\|f_1\|_X \leqslant 2\|f\|_{XF}$, $\|g_1\|_Y \leqslant 2\|g\|_{YF}$, $\|f_2\|_F = \|g_2\|_F = 1$. Тогда в силу ограниченной АК-устойчивости пары (X, Y) найдётся такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathrm{L}_\infty} &\leqslant c, \\ \|g_1 U\|_X &\leqslant c\|f_1\|_X, \\ \|f_1(1-U)\|_Y &\leqslant c\|g_1\|_Y \end{aligned}$$

для некоторой постоянной c, не зависящей от функций f_1 и g_1. Но тогда легко получить оценки

$$\|gU\|_{XF} \leqslant \|g_1 U\|_X \leqslant c\|f_1\|_X \leqslant 2c\|f\|_{XF},$$

$$\|f(1-U)\|_{YF} \leqslant \|f_1(1-U)\|_Y \leqslant c\|g_1\|_Y \leqslant 2c\|g\|_{YF},$$

откуда следует, что пара (XF, YF) ограниченно АК-устойчива с константой $2c$. Отметим, что нетрудно показать, что она на самом деле ограниченно АК-устойчива с константой $c+\varepsilon$ для любого числа $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о связи между свойствами ограниченной АК-устойчивости и “обычной” АК-устойчивости. Нетрудно показать, что в случае пары (X, L_∞) для решетки X, обладающей свойством Фату и свойством $(*)$, ограниченная АК-устойчивость совпадает с АК-устойчивостью и даже с немного более сильным условием. Поэтому нет нужды вводить по аналогии с определением 5 понятие ограниченной АК-устойчивости для одной решетки, хотя далее мы иногда будем использовать этот термин. Мы оформим эту эквивалентность в виде следующих двух предложений 3 и 4.

Предложение 3. *Пусть X – квазинормированная решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающая свойством $(*)$. Если пара (X, L_∞) сильно АК-устойчива с некоторой константой $c \geqslant 1$, то для любого числа $\lambda > 0$ и функции $f \in X$, $f \geqslant 0$, найдётся такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$, что*

$$\begin{gathered} \|Uf\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda, \\ \|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c, \quad \|(f\vee\lambda)|1-U|\|_X \leqslant c\|f\chi_{\{f>\lambda\}}\|_X. \end{gathered} \tag{1}$$

Докажем предложение 3. Пусть пара (X, L_∞) сильно АК-устойчива, и функция $f \in X$ удовлетворяет его условиям. Можно образовать внешнюю функцию

$$F = \exp\left(\log(f\vee\lambda) + i\mathcal{H}\log(f\vee\lambda)\right)$$

(напомним, что $\mathcal{H}$ – преобразование Гильберта по первой переменной); $|F| = f\vee\lambda$. Имеет место разложение

$$F = g + h, \quad h = F\chi_{\{f>\lambda\}} = F\chi_{\{|F|>\lambda\}};$$

$\|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \lambda$, $\|h\|_X \leqslant \|f\chi_{\{f>\lambda\}}\|$. Таким образом, $F \in (X+\mathrm{L}_\infty)_A$. Вследствие сильной АК-устойчивости пары (L_∞, X), для некоторой константы $c \geqslant 1$, не зависящей от f, существуют функции $G \in \mathrm{H}_\infty$ и $H \in X_A$, такие, что $F = G + H$ и $\|G\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda$, $\|H\|_X \leqslant c\|f\chi_{\{f>\lambda\}}\|_X$. Положим $U = \frac{G}{F}$. Тогда $\|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c$, $\|Uf\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \|G\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda$ и

$$\|(f\vee\lambda)|1-U|\|_X = \|F(1-U)\|_X = \|H\|_X \leqslant c\|f\chi_{\{f>\lambda\}}\|_X.$$

Предложение 4. *Пусть X — квазинормированная решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$. Если существует такая константа c, что для любого числа $\lambda > 0$ и функции $f \in X$ найдётся такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$, что*

$$\|Uf\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda, \quad \|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c, \quad \|\lambda|1-U|\|_X \leqslant c\|f\|_X, \tag{2}$$

то пара (X, L_∞) *сильно* АК*-устойчива с константой* $2(c+1)d$*, где* d – *константа в неравенстве треугольника для квазинормы решетки* X.

Действительно, пусть $F \in (X + \mathrm{L}_\infty)_A$ и $F = h + g$, $h \in X$, $g \in \mathrm{L}_\infty$. Положим $\lambda = \|g\|_{\mathrm{L}_\infty}$. Тогда по условию предложения 4 найдётся такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty$, что выполнены условия

$$\|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c, \quad \|hU\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda, \quad \|\lambda|1-U|\|_X \leqslant c\|h\|_X.$$

Положим $G = FU$ и $H = F(1-U)$. Тогда

$$\|G\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant d\,[\|hU\|_{\mathrm{L}_\infty} + \|gU\|_{\mathrm{L}_\infty}] \leqslant 2c\lambda = 2cd\|g\|_{\mathrm{L}_\infty}$$

и

$$\begin{aligned}\|H\|_X &\leqslant d\,[\|h(1-U)\|_X + \|g(1-U)\|_X] \\ &\leqslant (c+1)d\,[\|h\|_X + \|\lambda|1-U|\|_X] \leqslant 2(c+1)c\|h\|_X,\end{aligned}$$

поэтому $F = H + G$ является требуемым разложением, и, таким образом, пара (X, L_∞) сильно АК-устойчива.

Предложения 3 и 4 удобно переформулировать в виде следующего утверждения.

Предложение 5. *Пусть зафиксировано число* $\lambda > 1$*, а* X – *квазинормированная решетка измеримых функций на измеримом пространстве* $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$*, обладающая свойством* $(*)$*. Тогда пара* (X, L_∞) *сильно* АК*-устойчива в том и только в том случае, когда для любой функции* $f \in X$ *найдётся такая последовательность функций* $U_k \in \mathrm{H}_\infty(m \times \mu)$*,* $k \in \mathbb{Z}$*, что при всех* $k \in \mathbb{Z}$ *справедливы неравенства*

$$\|U_k\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c,$$

$$\|U_k f\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda^k, \tag{3}$$

$$\big\|\lambda^k|1-U_k|\big\|_X \leqslant c\|f\|_X. \tag{4}$$

При этом константа c *и константа* АК*-устойчивости решетки* X *оцениваются друг через друга.*

Пока не удалось исследовать связь между АК-устойчивостью и ограниченной АК-устойчивостью в общем случае; также непонятно, выдерживает ли свойство ограниченной АК-устойчивости переход к порядково сопряженным и деление на решетку. Можно пытаться действовать аналогично доказательству, приведённому в разделе 4 для такого же вопроса про ВМО-регулярность, однако технические детали проработать не удалось. Конечно, можно в связи с этим вопросом ввести понятие слабой ограниченной АК-устойчивости пары (X,Y) как ограниченной АК-устойчивости пары $(X\,\mathrm{L}_1, Y\,\mathrm{L}_1)$ по аналогии с [8], которое будет обладать этими свойствами. Так или иначе, многие интересные результаты можно получить сведением к случаю $Y=\mathrm{L}_\infty$, при котором в условиях предложений 3 и 4, как это уже отмечалось, ограниченная АК-устойчивость совпадает с обычной. Следующее утверждение показывает, что если подходящая пара банаховых решеток (X,Y) АК-устойчива, то пара банаховых решеток $\left(X^{\frac12}\,\mathrm{L}_1^{\frac12}, Y^{\frac12}\,\mathrm{L}_1^{\frac12}\right)$ будет ограниченно АК-устойчивой, и во многих вопросах можно переходить к рассмотрению этой пары вместо исходной.

Предложение 6. *Пусть банаховы решетки X и Y измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ обладают свойством Фату и свойством $(*)$, причём решетка XY' банахова. Если пара (X,Y) АК-устойчива, то пара $(X\,\mathrm{L}_1, Y\,\mathrm{L}_1)$ ограниченно АК-устойчива.*

Действительно, пусть в условиях предложения 6 пара (X,Y) АК-устойчива. Тогда по [8, лемма 4] пара $(XY', YY') = (XY', \mathrm{L}_1)$ также АК-устойчива. Переходя к порядковым сопряжённым (см. [14, лемма 7]), получаем, что АК-устойчива пара $((XY')', \mathrm{L}_\infty)$, которая по предложению 3 будет также ограниченно АК-устойчивой. Умножая её на решетку
$$(XY')Y = X(Y'Y) = X\,\mathrm{L}_1,$$
с помощью предложения 2 получаем, что ограниченно АК-устойчива пара
$$((XY')'(XY')Y, X\,\mathrm{L}_1) = (Y\,\mathrm{L}_1, X\,\mathrm{L}_1),$$
а значит, заменяя функцию U на $1-U$ в определении 6, видим, что ограниченно АК-устойчива пара $(X\,\mathrm{L}_1, Y\,\mathrm{L}_1)$, как и утверждалось.

2. Шары пространства BMO

Принадлежность множествам вида
$$\exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}}) = \left\{e^f \mid f\in\gamma B_{\mathrm{BMO}}\right\}, \quad \gamma\geqslant 0, \tag{5}$$

где $B_{\mathrm{BMO}} = \{f \mid \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\|f(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1\}$, характеризует ВМО-мажоранты, поэтому такие множества представляют значительный интерес в связи с рассматриваемыми вопросами. Оказывается, что по крайней мере с одной известной нормировкой пространства ВМО, которую мы введём чуть позднее, и для малых значений γ, множества вида (5) обладают достаточно простой геометрической структурой. В анализе используется много различных эквивалентных нормировок пространства ВМО на единичной окружности $\mathbb{T}$, и в определениях 1 и 2 замена одной нормировки на эквивалентную влияет лишь на константы. Отметим, что "стандартной" нормировкой, которая легко обобщается на общий случай пространств однородного типа, является нормировка

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}'} = \sup_I \int\limits_I \left|f(t) - \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(s)ds\right| dm(t), \tag{6}$$

где супремум берётся по всем дугам $I \subset \mathbb{T}$. В этой работе будет использоваться следующая нормировка (см. [6]):

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \inf\left\{p > 0 \mid \|\mathbb{P}\|_{\mathrm{L}_2(\exp(f/p))} \leqslant c_1\right\}, \tag{7}$$

где через $\mathbb{P}$ обозначен проектор Рисса (вместо которого, вообще говоря, можно взять достаточно произвольный сингулярный интегральный оператор на $\mathbb{T}$, см. по этому поводу [9, Часть 5]). В этом разделе для удобства используется "классическое" определение весового пространства $\mathrm{L}_2(w)$:

$$\|f\|_{\mathrm{L}_2(w)} = \left(\int |f|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Константу $c_1 > \|\mathbb{P}\|_{\mathrm{L}_2} = 1$ можно выбрать произвольно. Как будет видно из дальнейшего, инфинум (7) достигается. Однородность выражения $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ очевидна, а в аддитивности нетрудно убедиться с помощью комплексной интерполяции, применяя формулу

$$\left(\mathrm{L}_2\left(\exp\left(\frac{f_1}{p_1}\right)\right), \left(\mathrm{L}_2\left(\exp\left(\frac{f_2}{p_2}\right)\right)\right)_{\frac{p_2}{p_1+p_2}} = \mathrm{L}_2\left(\exp\left(\frac{f_1+f_2}{p_1+p_2}\right)\right),$$

из которой следует, что

$$\|\mathbb{P}\|_{\mathrm{L}_2\left(\exp\left(\frac{f_1+f_2}{p_1+p_2}\right)\right)} \leqslant \|\mathbb{P}\|^{\frac{p_2}{p_1+p_2}}_{\mathrm{L}_2\left(\exp\left(\frac{f_1}{p_1}\right)\right)} \|\mathbb{P}\|^{\frac{p_1}{p_1+p_2}}_{\mathrm{L}_2\left(\exp\left(\frac{f_2}{p_2}\right)\right)} \leqslant c_1,$$

если $\|f_1\|_{\mathrm{BMO}} = p_1$, $\|f_2\|_{\mathrm{BMO}} = p_2$, откуда получается, что

$$\|f_1 + f_2\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant p_1 + p_2.$$

Таким образом, выражение $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ действительно определяет нормировку в пространстве BMO. Эквивалентность этой нормировки "стандартной" нормировке (6) хорошо известна и получается из того, что функции f, $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 1$, являются логарифмами весов Макенхаупта класса A_2 (см. [9, гл. 5]). Отметим, что эквивалентность другой распространённой нормировке пространства BMO

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}''} = \inf\left\{\|u\|_{\mathrm{L}_\infty} + \|v\|_{\mathrm{L}_\infty} \mid f = u + \mathcal{H}v + c,\ c \in \mathbb{R}\right\},$$

где $\mathcal{H}$ — преобразование Гильберта, можно получить непосредственно из классического результата Хельсона–Сегё (см. также [6, предложение 5.4]).

Предложение 7. *Множество* $\exp(B_{\mathrm{BMO}})$ *является выпуклым конусом. Для любого* $\gamma \geqslant 0$ *замыкание по мере* $m \times \mu$*, т.е. в пространстве* $\mathrm{S}(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$*, множества* $\exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}})$ *совпадает (с точностью до эквивалентности измеримых функций, равных почти всюду) с множеством*

$$E_\gamma = \{f\chi_F \mid f \in \exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}}),\\ F - \mu\text{-измеримое подмножество множества } \Omega\},$$

где через χ_F *обозначена характеристическая функция множества* F *по второй переменной:* $\chi_F(t,x) = \chi_F(x)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{T}$.

Однородность множества $\exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}})$ при любом $\gamma > 0$ вытекает из того, что BMO-норма констант нулевая. Проверим, что оно выпукло при $\gamma = 1$. Пусть заданы веса $w_j \in \exp(B_{\mathrm{BMO}})$, $j \in \{0,1\}$, и $0 < \theta < 1$; нужно показать, что вес $w = (1-\theta)w_0 + \theta w_1$ тоже принадлежит множеству $\exp(B_{\mathrm{BMO}})$. Поскольку для любого $p > 1$ выполнены соотношения $\|\mathbb{P}\|_{\mathrm{L}_2(w_j^{1/p})} \leqslant c_1$, они выполнены также и при $p = 1$ (что легко проверяется соответствующим предельным переходом, см. также приводимое далее доказательство замкнутости по мере). Для любой функции $f \in \mathrm{L}_2(w)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |\mathbb{P}f(t,\omega)|^2 w(t,\omega)dm(t) = (1-\theta)\int\limits_{\mathbb{T}} |\mathbb{P}f(t,\omega)|^2 w_0(t,\omega)dm(t)$$

$$+\theta\int\limits_{\mathbb{T}}|\mathbb{P}f(t,\omega)|^2w_1(t,\omega)dm(t)\leqslant c_1\int\limits_{\mathbb{T}}|f(t,\omega)|^2w(t,\omega)dm(t),$$

при почти всех $\omega\in\Omega$, что означает, что $\|\mathbb{P}\|_{\mathrm{L}_2(w)}\leqslant c_1$, и $w\in\exp(B_{\mathrm{BMO}})$, как и утверждалось.

Проверим теперь утверждение про замыкание по мере множества $\exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}})$. Мы сделаем это в духе [6, лемма 4.2]. Пусть последовательность $w_j\in\exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}})$ сходится по мере к некоторой функции w. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что w_j сходится к w почти всюду. Для любого $p>1$ имеем $\|\mathbb{P}\|_{\mathrm{L}_2(w_j^{1/p\gamma})}\leqslant c_1$. Пусть $f\in\mathrm{L}_2(M^{1/p\gamma})$, $M=\sup_j w_j$. Очевидно, что $f\in\mathrm{L}_2(w_j^{1/p\gamma})$ для всех j. По условию имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}}|\mathbb{P}f(t,\omega)|^2w_j^{\frac{1}{p\gamma}}(t,\omega)dm(t)\leqslant c_1\int\limits_{\mathbb{T}}|f(t,\omega)|^2w_j^{\frac{1}{p\gamma}}(t,\omega)dm(t)\tag{8}$$

при почти всех $\omega\in\Omega$ для всех j. Переходя к пределу в (8) с использованием теоремы Фату и теоремы Лебега о мажорированной сходимости, получаем, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{T}}|\mathbb{P}f(t,\omega)|^2w^{\frac{1}{p\gamma}}dm(t)\\&\qquad\leqslant\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{T}}|\mathbb{P}f(t,\omega)|^2w_j^{\frac{1}{p\gamma}}(t,\omega)dm(t)\\&\qquad\leqslant\lim_{j\to\infty}c_1\int\limits_{\mathbb{T}}\left[\frac{w_j(t,\omega)}{M(t,\omega)}\right]^{\frac{1}{p\gamma}}|f(t,\omega)|^2M^{\frac{1}{p\gamma}}(t,\omega)dm(t)\\&\qquad=c_1\int\limits_{\mathbb{T}}|f(t,\omega)|^2w^{\frac{1}{p\gamma}}(t,\omega)dm(t)\end{aligned}\tag{9}$$

при почти всех $\omega\in\Omega$. Поскольку множество $\mathrm{L}_2(M^{1/p\gamma})$ плотно в пространстве $\mathrm{L}_2(w^{1/p\gamma})$, оценка (9) справедлива для всех $f\in\mathrm{L}_2(w^{1/p\gamma})$ и $p>1$. Из (9) в силу свойств весовых оценок для сингулярного интегрального оператора $\mathbb{P}$ (см. [9, Гл. 5]; веса w, такие что оператор $\mathbb{P}$ ограничен в пространстве $\mathrm{L}_2(w)$, должны удовлетворять условию A_2) следует, что при почти всех $\omega\in\Omega$ либо $w(\cdot,\omega)=0$ почти всюду, либо почти всюду $w(\cdot,\omega)>0$. Обозначив через F множество, на котором выполнено последнее условие, видим, что $w \in E_\gamma$, и, таким образом, замыкание множества $\exp(\gamma B_{\text{BMO}})$ по мере содержится в E_γ. Заметим, что для произвольного измеримого множества $F \subset \Omega$ и измеримой функции f, такой, что $f(\cdot,\omega) \in \exp(\gamma B_{\text{BMO}})$ при почти всех $\omega \in \Omega$, последовательность

$$f_n = f\chi_F + \frac{1}{n}\chi_{\Omega\setminus F}$$

принадлежит множеству $\exp(\gamma B_{\text{BMO}})$ и сходится почти всюду к $f\chi_F$. Таким образом, включение множества E_γ в замыкание по мере множества $\exp(\gamma B_{\text{BMO}})$ имеет место. Предложение 7 доказано.

Приведём альтернативное доказательство включения замыкания по мере множества $\exp(\gamma B_{\text{BMO}})$ в множество E_γ. Оно может оказаться полезным, поскольку не опирается на свойства весовых оценок сингулярных интегральных операторов, хотя использует при этом свойства стандартной нормировки (6) пространства BMO. Сначала проверим следующее утверждение.

Предложение 8. *Множество B_{BMO} замкнуто по мере $m \times \mu$, т.е. в пространстве $\mathrm{S}(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$, причём то же самое верно и для множества*

$$B_{\text{BMO}'} = \left\{ f \mid \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|f(\cdot,\omega)\|_{\text{BMO}'} \leqslant 1 \right\},$$

полученного из стандартной нормировки (6) *пространства* BMO. *Если последовательность $f_n \in$ BMO ограничена и сходится почти всюду к некоторой функции $f \in \mathrm{S}(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$, то последовательность средних*

$$a_n(x) = \int\limits_{\mathbb{T}} f_n(t,x)\,dm(t)$$

ограничена при почти всех $x \in \Omega$.

Проверим предложение 8 сначала для стандартной нормировки. Достаточно проверить, что для последовательности $f_n \in B_{\text{BMO}'}$, сходящейся к некоторой функции $f \in \mathrm{S}(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ почти всюду, последовательность средних a_n ограничена почти всюду, и f принадлежит $B_{\text{BMO}'}$.

Действительно, пусть последовательность средних a_n неограничена на некотором множестве $E' \subset \Omega$ положительной меры. Для некоторого его подмножества $E \subset E'$ положительной меры имеет место оценка $\|f_n(\cdot,x)\|_{\mathrm{BMO}'} \leqslant 1$ при всех n и $x \in E$, а также выполнено условие $|\{|f(\cdot,x)| < \infty\}| = 1$. Выберем произвольный элемент $x \in E$ и положим $g_n(t) = f_n(t,x)$, $t \in \mathbb{T}$. Поскольку последовательность $a_n(x)$ неограничена, для некоторой подпоследовательности n' последовательность $a_{n'}(x)$ расходится к положительной или отрицательной бесконечности. Пусть для определённости $a_{n'}(x) \to +\infty$ (случай расходимости к $-\infty$ рассматривается аналогично). Тогда найдётся последовательность n_j такая, что $a_{n_j}(x) > 2^{j+3}$. Имеем

$$\bigl|\{|g_{n_j} - a_{n_j}(x)| > 2^{j+2}\}\bigr| \leqslant 2^{-j-2} \int\limits_{\mathbb{T}} |g_{n_j} - a_{n_j}(x)| \leqslant 2^{-j-1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, с учётом неравенства $a_{n_j}(x) > 2^{j+3}$, что

$$\begin{aligned} |\{g_{n_j} \leqslant 2^{j+2}\}| \leqslant |\{|g_{n_j} - a_{n_j}(x)| > 2^{j+2}\} \\ \cup \{|g_{n_j} - a_{n_j}(x)| \leqslant 2^{j+2},\, g_{n_j} \leqslant 2^{j+2}\}| \\ \leqslant |\{|g_{n_j} - a_{n_j}(x)| > 2^{j+2}\} \cup \{g_{n_j} > 2^{j+2},\, g_{n_j} \leqslant 2^{j+2}\}| \\ = |\{|g_{n_j} - a_{n_j}(x)| > 2^{j+2}\}| \leqslant 2^{-j-1}. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\Bigl|\bigcup_j \{g_{n_j} \leqslant 2^{j+2}\}\Bigr| \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда

$$\Bigl|\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{g_{n_j} > 2^{j+2}\}\Bigr| \geqslant \frac{1}{2}, \qquad (10)$$

что противоречит тому, что последовательность g_n сходится почти всюду к конечному пределу.

Таким образом, для каждого x из некоторого множества $F \subset \Omega$ полной меры μ последовательность $a_n(x)$ ограничена, и одновременно с этим $f_n(t,x) \to f(t,x)$ при почти всех $t \in \mathbb{T}$. Зафиксируем $x \in F$ и покажем, что $\|f(\cdot,x)\|_{\mathrm{BMO}'} \leqslant 1$. Для этого достаточно показать, что некоторая последовательность функций g_n, принадлежащих множеству $B_{\mathrm{BMO}'}$, сходится к $f(\cdot,x)$ в $\mathrm{L}_1(\mathbb{T})$. По неравенству Джона–Ниренберга и в силу ограниченности последовательности средних $a_n(x)$, последовательность $f_n(\cdot,x)$ ограничена в пространстве $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$, а потому у неё есть слабо сходящаяся подпоследовательность $f_{n'}(\cdot, x)$, причём её предел должен совпадать с $f(\cdot, x)$ почти всюду. Поэтому некоторые выпуклые комбинации $g_n \in B_{\mathrm{BMO}}$ последовательности $f_{n'}(\cdot, x)$ сходятся к $f(\cdot, x)$ в пространстве $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$, и, таким образом, предложение доказано для множества $B_{\mathrm{BMO}'}$. Замкнутость по мере множества B_{BMO} доказывается в [6, лемма 4.2] для произвольных операторов вместо $\mathbb{P}$, и проверяется теми же рассуждениями, что и замкнутость по мере множества $\exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}})$ в первом доказательстве.

Покажем теперь с помощью предложения 8, что замыкание по мере множества $\exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}})$ содержится в множестве E_γ. Пусть последовательность

$$f_n \in \exp(\gamma B_{\mathrm{BMO}})$$

сходится к некоторой функции $f \in \mathrm{S}(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$. Поскольку $f_n > 0$ почти всюду, должно быть $f \geqslant 0$. Множество

$$F = \bigl\{x \in \Omega \mid m\{t \mid f(t,x) = 0\} > 0\bigr\}$$

является μ-измеримым. По предложению 8 логарифм сужения функции f на множество $\Omega \setminus F$ принадлежит множеству сужений функций BMO на то же множество $\Omega \setminus F$. Зафиксируем произвольную точку $x \in F$. Пусть $g_n(t) = \log f_n(t,x)$, $t \in \mathbb{T}$; достаточно показать, что некоторая подпоследовательность последовательности g_n стремится к $-\infty$ почти всюду. Применяя предложение 8 к последовательности $g_n^+ = g_n \vee 0 \in 2B_{\mathrm{BMO}}$ и дельта-мере μ в точке x, получаем, что средние $a_n^+ = \int g_n^+$ равномерно ограничены. Поэтому, поскольку $g_n(t)$ стремится к $-\infty$ на множестве положительной меры, средние $a_n = \int g_n$ расходятся к $-\infty$. Так же, как и при доказательстве предложения 8, для $N \in \mathbb{N}$ итеративно построим последовательность $n_0^N = 0$ и $n_j^N > n_{j-1}^N$ – такое число, что $a_{n_j^N} < -2^{N+j+2}$. Тогда

$$m\{|g_{n_j^N} - a_{n_j^N}| > 2^{N+j+1}\} \leqslant 2^{-N-j-1} \int |g_{n_j^N} - a_{n_j^N}| \leqslant \gamma 2^{-N-j-1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Складывая эти неравенства как и раньше (см. вывод оценки (10)), получаем

$$m\Biggl(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \Bigl\{g_{n_j^N} < -2^{N+j+1}\Bigr\}\Biggr) \geqslant \bigl(1 - \gamma 2^{-N}\bigr).$$

Поэтому диагональная последовательность $g_{n_N^N}$ расходится к $-\infty$ почти всюду, что завершает альтернативное доказательство требуемого включения.

3. Вспомогательные утверждения

В этом разделе мы приведём основные используемые результаты и некоторые вспомогательные утверждения.

Теорема (Ки Фан–Какутани [1]). *Пусть K – компактное выпуклое множество в локально-выпуклом топологическом векторном пространстве. Пусть Φ – отображение из K в множество непустых выпуклых компактов, содержащихся в K. Если график отображения Φ замкнут, то у отображения Φ есть неподвижная точка, т.е. существует такая точка $x \in K$, что $x \in \Phi(x)$.*

Теорема 3 [13, теорема 3, гл. X, §6]). *Пусть X – банахова решетка измеримых функций, обладающая свойством Фату, и $\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ – центрированное семейство выпуклых, ограниченных и замкнутых по мере множеств в X. Тогда его пересечение $\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} V_\xi$ непусто.*

Эти два результата будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Теорема 3 показывает, что при наличии свойства Фату ограниченные, выпуклые, и замкнутые по мере множества обладают некоторыми свойствами компактных множеств. В частности, убывающая последовательность таких множеств имеет непустое пересечение. В этой статье теорема Ки Фана–Какутани будет применяться для пространств L_p, $1 < p < \infty$, со слабой топологией, что может вызывать значительные технические трудности при проверке замкнутости соответствующих отображений. Не приводя ссылок на обширную литературу по теории неподвижных точек, отметим, что по-видимому имеется много результатов, позволяющих ослабить условия этой классической теоремы; например, рассматривать отображения с ациклическими значениями и композиции таких отображений. При этом от условий замкнутости и компактности сложно избавиться, и в общем случае "компактности" в смысле теоремы 3 явно недостаточно. Для любого бесконечномерного нормированного пространства X существует липшицево отображение $T : B_X \to B_X$ замкнутого единичного шара B_X пространства X на себя, такое, что $\inf\{\|Tx - x\|_X \mid x \in B_X\} > 0$ (см. [10]).

Следующее предложение позволяет заменять функции на почти всюду положительные с незначительным увеличением нормы.

Предложение 9. *Пусть X – банахова решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$. Тогда для каждой функции*

$f \in X$, $f \neq 0$, и $\varepsilon > 0$, существует такая функция $g \in X$, что $g > |f|$ почти всюду, и имеет место оценка $\|g\|_X \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|_X$.

Действительно, существует представление $\mathbb{T} \times \Omega = \bigcup_j A_j$ для возрастающей последовательности множеств A_j конечной меры, таких, что $\chi_{A_j} \in X$ (см., например, [13, гл. IV, §3, следствие 2]), и можно положить

$$g = |f| + \varepsilon \sum_{j \geqslant 1} 2^{-j} \frac{\chi_{A_j}}{\|\chi_{A_j}\|_X}.$$

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [14, 1.2]).

Предложение 10. *Пусть X – банахова решетка измеримых функций, обладающая свойством Фату, и $F \subset X$ – ограниченное, выпуклое и замкнутое подмножество в X. Тогда для любой последовательности $f_n \in F$ найдётся такая последовательность конечных выпуклых комбинаций*

$$g_n = \sum_{k \geqslant n} \alpha_k^{(n)} f_k, \quad \alpha_k^{(n)} \geqslant 0, \quad \sum_{k \geqslant n} \alpha_k^{(n)} = 1,$$

что последовательность g_n сходится к некоторой функции f из F почти всюду.

Достаточно рассмотреть убывающую последовательность множеств

$$F_n = \operatorname{clos} \operatorname{co}_{k \geqslant n}\{f_k\},$$

где через clos обозначено замыкание по мере, а через co обозначена выпуклая оболочка. По условиям предложения $F_n \subset F$ при всех n, и по теореме 3 множество $\cap_n F_n$ непусто. Пусть $f \in \cap_n F_n$. Тогда $f \in F$, и для любого n найдётся последовательность $g_k^n \in \operatorname{co}_{k \geqslant n}\{f_k\}$, такая, что g_k^n сходится к f по мере при $k \to \infty$. Поскольку сходимость по мере метризуема, найдётся последовательность k_n, такая, что последовательность $g_{k_n}^n$ сходится к f по мере. Поэтому некоторая её подпоследовательность сходится к f почти всюду, и предложение 10 доказано.

Следующее предложение показывает, что BMO-регулярность достаточно проверять на множествах функций из некоторого плотного по мере множества. В частности, достаточно проверять её на всех срезках функций $f\chi_{\{x<|f|<y\}}$, $0 < x < y < \infty$.

Предложение 11. *Пусть X – банахова решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающая свойством Фату. Пусть множество $F \subset S_+ = \{f \in X_+ \mid \|f\|_X = 1\}$ таково, что для всех функций $f \in F$ существуют BMO-мажоранты с константами (C, m). Тогда для всех ненулевых функций из $S_+ \cap \overline{F}$, где $\overline{F}$ – замыкание множества F по мере, существуют BMO-мажоранты с теми же константами.*

Сначала отметим, что отображение $x \mapsto x^\delta$ образует монотонный изоморфизм между множествами X_+ и X_+^δ в соответствующих решетках при $\delta > 0$. Поэтому если функция g является BMO-мажорантой с постоянными (C, m) функции f, $f > 0$ почти всюду, т.е. $g \geqslant f$, $\|g\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $g \in \exp(CB_{\mathrm{BMO}})$, то $g^\delta \geqslant f^\delta$, $\|g^\delta\|_{X^\delta} \leqslant m^\delta\|f^\delta\|_{X^\delta}$ и $g^\delta \in \exp(\delta CB_{\mathrm{BMO}})$, т.е. функция g^δ является BMO-мажорантой функции f^δ с постоянными $(\delta C, m^\delta)$. Поэтому, переходя к решетке $X^{\frac{1}{C}}$ вместо X, можно считать, что $C = 1$. Пусть функция $f \in S_+$ принадлежит замыканию по мере множества F. Тогда найдётся такая последовательность $f_n \in F$, что f_n сходится к f почти всюду. Пусть g_n – BMO-мажоранты функций f_n с постоянными $(1, m)$, т.е. $\|g_n\|_X \leqslant m$ и $g_n \in \exp(B_{\mathrm{BMO}})$. По предложению 10 найдётся такая функция $g \in X$, $\|g\|_X \leqslant m$, что некоторая последовательность $G_n = \sum\limits_{j\geqslant n} \alpha_j^{(n)} g_n$ выпуклых комбинаций функций g_n сходится к g почти всюду. Но $G_n \in \exp(B_{\mathrm{BMO}})$ по предложению 7, и $G_n \geqslant F_n = \sum\limits_{j\geqslant n} \alpha_j^{(n)} f_n$. В силу сходимости почти всюду и замкнутости по мере множества $\exp(B_{\mathrm{BMO}})$ отсюда следует, что $g \geqslant f$ и $g \in \exp(B_{\mathrm{BMO}})$, т.е. функция g является BMO-мажорантой для функции f с постоянными $(1, m)$. Предложение 11 доказано.

Предложение 12. *Пусть X – нормированная решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающая свойством Фату. Если монотонно убывающая последовательность весов w_n сходится к некоторому весу w почти всюду, то имеет место соотношение*

$$\bigcap_n X(w_n) = X(w).$$

Действительно, поскольку $w_n \geqslant w$ почти всюду для любого n, имеет место вложение $X(w) \subset X(w_n)$, и $X(w) \subset \bigcap_n X(w_n)$. Обратное включение имеет место в силу свойства Фату: для любой функции

$f \in \bigcap_n X(w_n)$ имеем оценку

$$\|f\|_{X(w)} = \|fw^{-1}\|_X \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|fw_n^{-1}\|_X \leqslant \sup_n \|fw_n^{-1}\|_X = \|f\|_{\bigcap_n X(w_n)}.$$

Предложение 13. *Пусть X, Y – нормированные решетки измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающие свойством Фату. Если для монотонно убывающей последовательности весов w_n пары $(X(w_n), Y)$ AK-устойчивы с одной и той же константой c и последовательность весов w_n сходится к некоторому весу w почти всюду, то пара $(X(w), Y)$ также AK-устойчива с константой c.*

Предложение 13 (очень похожее на [8, лемма 3]) верно и без предположения монотонного убывания последовательности весов w_n, это предположение введено здесь для простоты. Пусть $F \in (X(w)+Y)_A$, $F = h + g$, $h \in X(w) \subset X(w_n)$, $g \in Y$. Тогда для каждого n найдётся разложение

$$F = H_n + G_n, \quad H_n \in (X(w_n))_A, \quad G_n \in Y_A, \tag{11}$$

такое, что $\|H_n\|_{X(w_n)} \leqslant c\|h\|_{X(w_n)} \leqslant c\|h\|_{X(w)}$, $\|G_n\|_Y \leqslant c\|g\|_Y$. По предложению 10 найдутся конечные выпуклые комбинации

$$\begin{aligned}
H'^{(j)} &= \sum_{n\geqslant j} \alpha_n^{(j)} H_n,\\
G^{(j)} &= \sum_{n\geqslant j} \beta_n^{(j)} \sum_{k\geqslant j} \alpha_k^{(n)} G_k,\\
H^{(j)} &= \sum_{n\geqslant j} \beta_n^{(j)} H'^{(j)} = \sum_{n\geqslant j} \beta_n^{(j)} \sum_{k\geqslant j} \alpha_k^{(n)} H_k,
\end{aligned}$$

такие, что имеет место сходимость $H'^{(j)} \to H$ и $G^{(j)} \to G$, а значит, и $H^{(j)} \to H$ почти всюду для некоторых функций $H \in \cap_n X(w_n) = X(w)$ (см. предложение 12) и $G \in Y$. При этом из (11) получается, что $F = G + H$ почти всюду. Наконец, поскольку шары пространств $(X(w))_A$ и Y_A замкнуты по мере (см. [14, лемма 3]), имеем включения $H \in (X(w))_A$ и $G \in Y_A$ с требуемыми оценками нормы.

4. Доказательство теоремы 1

Этот раздел посвящён доказательству теоремы 1. Сперва отметим, что имеет место следующая характеризация BMO-регулярности пары решеток.

Предложение 14. *Пусть X, Y — решетки измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$. BMO-регулярность пары (X, Y) с константами (C, m) эквивалентна следующему свойству: для всяких $f \in S_X^+$, $g \in S_Y^+$, где через $S_X^+ = \{f \in X \mid \|f\|_X = 1,\ f > 0$ п. в.$\}$ и $S_Y^+ = \{g \in Y \mid \|g\|_Y = 1,\ g > 0$ п. в.$\}$ обозначены строго положительные части единичных сфер соответствующих пространств, найдётся такая функция $\alpha \in \exp(CB_{\mathrm{BMO}})$, что*

$$\|\alpha g\|_X \leqslant c, \quad \|\alpha^{-1} f\|_Y \leqslant c, \tag{12}$$

для некоторой константы c, не зависящей от f и g. При этом константа c оценивается через константу m и наоборот.

Действительно, пусть пара (X, Y) BMO-регулярна. Тогда для $f \in S_X^+$, $g \in S_Y^+$ найдётся BMO-мажоранта (u, v), и утверждение предложения верно для $\alpha = \frac{u}{v}$.

Обратно, пусть выполнено свойство предложения и $f \in X$, $g \in Y$. Пользуясь предложением 9 и инвариантностью свойства BMO-регулярности относительно умножения функций f и g на произвольные константы, можно считать, что $f \in S_X^+$ и $g \in S_Y^+$. Положим $u = (\frac{\alpha g}{f} \vee 1) f$, $v = (\frac{f}{\alpha g} \vee 1) g$. Тогда $\|u\|_X \leqslant c + 1$, $\|v\|_Y \leqslant c + 1$. Разбором случаев нетрудно проверить, что $\frac{u}{v} = \alpha$, и, следовательно, $\left\|\log \frac{u(\cdot,\omega)}{v(\cdot,\omega)}\right\|_{\mathrm{BMO}} = \|\log \alpha(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ при почти всех $\omega \in \Omega$, что и требовалось доказать.

Предложение 14 позволяет выражать свойство BMO-регулярности пар решеток в терминах непустоты некоторых замкнутых ограниченных выпуклых множеств. Конкретнее, пусть X, Y – решетки измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$, обладающие свойством Фату. Для функций $f \in X$, $g \in Y$, $f, g > 0$ почти всюду, введём в рассмотрение множество

$$M_{C,c}^{(X,Y)}(f, g) = \left\{\alpha \mid \|\alpha g\|_X \leqslant c,\ \|\alpha^{-1} f\|_Y \leqslant c\right\} \cap \exp(CB_{\mathrm{BMO}}). \tag{13}$$

В силу предложения 14 наличие BMO-мажорант с константами (C, m) для функций f, g в паре решеток (X, Y), которые можно считать нормированными, эквивалентно непустоте множества (13) для некоторой константы c, связанной с константой m.

Отметим некоторые свойства множеств (13). В силу свойства Фату и предложения 7 множества $M_{C,c}(f, g)$ замкнуты по мере и в случае

$C=1$ выпуклы. При этом множество $gM_{C,c}^{(X,Y)}(f,g)$ замкнуто и ограничено в X, и тоже выпукло при $C=1$. Для любых функций $f_1 \geqslant |f|$, $g_1 \geqslant |g|$, имеет место соотношение

$$M_{C,c}^{(X,Y)}(f,g) \supset M_{C,c}^{(X,Y)}(f_1,g_1). \tag{14}$$

Используя аналог неравенства Гёльдера для банаховых решеток

$$\|ab\|_X \leqslant \| \, |a|^q \|_X^{\frac{1}{q}} \, \| \, |b|^{q'} \|_X^{\frac{1}{q'}}, \tag{15}$$

нетрудно получить, что для произвольных чисел $\theta_j > 0$, $\sum\limits_{j=1}^n \theta_j = 1$, и функций $f_j \in X$, $g_j \in Y$, имеет место соотношение

$$\prod_{j=1}^n \Big[M_{C,c}^{(X,Y)}(f_j,g_j)\Big]^{\theta_j} \subset M_{C,c}^{(X,Y)}\left(\prod_{j=1}^n |f_j|^{\theta_j}, \prod_{j=1}^n |g_j|^{\theta_j}\right). \tag{16}$$

В левой части (16) подразумеваются поточечные операции возведения в степень и перемножения. В частности, выбирая $f_j = f$ и $g_j = g$, получаем из (16), что множество $M_{C,c}^{(X,Y)}(f,g)$ является логарифмически выпуклым.

Предложение 15. *Пусть решетки X и Y измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ обладают свойством Фату, а $f_j \in X$, $g_j \in Y$ – монотонно возрастающие последовательности функций, неотрицательных почти всюду, сходящиеся почти всюду к некоторым функциям $f \in X$ и $g \in Y$. Тогда пересечение $\bigcap\limits_j M_{C,c}^{(X,Y)}(f_j,g_j)$ совпадает с множеством $M_{C,c}^{(X,Y)}(f,g)$. Если, к тому же, для всех j множества $M_{1,c}^{(X,Y)}(f_j,g_j)$ непусты, то множество $M_{1,c}^{(X,Y)}(f,g)$ также непусто.*

Соотношение $\bigcap\limits_j M_{C,c}^{(X,Y)}(f_j,g_j) \supset M_{C,c}^{(X,Y)}(f,g)$ следует из (14). Для произвольной функции α из множества $\bigcap\limits_j M_{C,c}^{(X,Y)}(f_j,g_j)$ имеем $\|\alpha g_j\|_X \leqslant c$, $\|\alpha^{-1} f_j\|_Y \leqslant c$. Переходя в этих оценках к пределу по свойству Фату, получаем, что $\alpha \in M_{C,c}^{(X,Y)}(f,g)$. Наконец, множества $F_j = g_1 M_{1,c}^{(X,Y)}(f_j,g_j)$ замкнуты по мере, выпуклы, ограничены в X и образуют убывающую последовательность. Поэтому, если они непусты, то в силу цитированной теоремы 3 их пересечение $F = \bigcap_j F_j$ также непусто, а вместе с ним непусто и множество $M_{1,c}^{(X,Y)}(f,g) = g_1^{-1}F$. Предложение 15 доказано.

Нетрудно проверить (см. рассуждение в начале доказательства предложения 11), что пара решеток измеримых функций (X,Y) BMO-регулярна с постоянными (C,m) тогда и только тогда, когда пара (X^δ, Y^δ) BMO-регулярна с постоянными $(C\delta, m^\delta)$.

Приступим теперь к доказательству теоремы 1. Пусть в её условиях пара (X,Y) слабо BMO-регулярна с постоянными (C,m_1), причём можно считать, что $C \geqslant 2$. Пусть $\delta = \frac{1}{C} \leqslant \frac{1}{2}$. Пара

$$\big((X\,\mathrm{L}_1)^\delta, (Y\,\mathrm{L}_1)^\delta\big) = \Big(X^\delta\,\mathrm{L}_{\frac{1}{\delta}}, Y^\delta\,\mathrm{L}_{\frac{1}{\delta}}\Big)$$

BMO-регулярна с постоянными $(1,m)$ для некоторого значения m. Переобозначим для удобства X^δ через X и Y^δ через Y; поскольку $\delta \leqslant 1$, решетки при этом останутся банаховыми. Пусть $p = \frac{1}{\delta} = C \geqslant 2$. Таким образом, в новых обозначениях $(X\,\mathrm{L}_p, Y\,\mathrm{L}_p)$ является BMO-регулярной парой банаховых решеток с постоянными $(1,m)$ для некоторого значения m, и достаточно доказать, что пара (X,Y) BMO-регулярна. Заменяя меру μ на эквивалентную, можно считать, что $\mu(\Omega) = 1$. Тогда множество $D = \{\log h \mid \|h\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant 1,\, h \geqslant \frac{1}{2}\}$ непусто, замкнуто по мере, и выпукло в силу неравенства Гёльдера. Для любого $\log h \in D$ имеем $\frac{1}{2} \leqslant \|h\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant 1$.

Пусть $f \in S_X^+$, $g \in S_Y^+$. В силу предложения 14 и рассуждений непосредственно после его доказательства, найдется такая постоянная c, что для любых функций $(\log u, \log v) \in D \oplus D$ множество $M_{1,c}^{(X\,\mathrm{L}_p, Y\,\mathrm{L}_p)}(u\,f, v\,g)$ непусто. Напомним устройство нормы произведения произвольных квазинормированных решеток A и B:

$$\|x\|_{AB} = \inf_{x=ab} \|a\|_A \|b\|_B = \inf_{\|b\|_B=1} \|xb^{-1}\|_A.$$

Для произвольного числа $\gamma > 0$ и решеток $B \supset \mathrm{L}_\infty$ и A имеем оценку

$$\begin{aligned}
\|x\|_{AB} &= \inf_{\|b\|_B=1} \|xb^{-1}\|_A \|b\vee\gamma\|_B \frac{\|b\|_B}{\|b\vee\gamma\|_B} \\
&\geqslant (1+\|\gamma\,1\|_B)^{-1} \inf_{\|b\|_B=1} \|x(b\vee\gamma)^{-1}\|_A \|b\vee\gamma\|_B \qquad (17)\\
&\geqslant (1+\|\gamma\,1\|_B)^{-1} \inf_{\|b\|_B\leqslant 1,\, b\geqslant\gamma} \|xb^{-1}\|_A.
\end{aligned}$$

Первое неравенство этой выкладки получается просто потому что при $\|b\|_B = 1$ имеем

$$\frac{\|b \vee \gamma\|_B}{\|b\|_B} \leqslant \frac{\|b\|_B + \|\gamma\, 1\|_B}{\|b\|_B} = 1 + \|\gamma\, 1\|_B.$$

С учётом формулы (17) получаем, что если

$$(\log u, \log v) \in D \oplus D$$

и

$$\alpha \in M_{1,c}^{(X\,\mathrm{L}_p, Y\,\mathrm{L}_p)}(u\, f, v\, g),$$

то

$$c \geqslant \|\alpha v\, g\|_{X\,\mathrm{L}_p} \geqslant (1 + \frac{1}{2})^{-1} \inf_{\log a \in D} \|\alpha g\, v\, a^{-1}\|_X \tag{18}$$

и

$$c \geqslant \|\alpha^{-1} u\, f\|_{Y\,\mathrm{L}_p} \geqslant (1 + \frac{1}{2})^{-1} \inf_{\log b \in D} \|\alpha^{-1} f\, u\, b^{-1}\|_Y. \tag{19}$$

Поскольку $(1 + \frac{1}{2})^{-1} > 4^{-1}$, из (18) и (19) получаем, что для всяких функций $(\log u, \log v) \in D \oplus D$ непусто множество

$$\Phi(\log u, \log v) = \Big\{(\log a, \log b) \in D \oplus D \mid M_{1,4c}^{(X,Y)}(f\, u a^{-1}, g\, v b^{-1}) \neq \varnothing\Big\}.$$

С помощью (16) нетрудно показать, что график отображения Φ выпуклый. Действительно, пусть для некоторых функций $\log a_j$, $\log b_j$, $\log u_j$, $\log v_j \in D$, $1 \leqslant j \leqslant n$ имеет место соотношение

$$(\log a_j, \log b_j) \in \Phi(\log u_j, \log v_j),$$

и

$$\begin{aligned} \log u &= \sum_j \alpha_j \log u_j, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \sum_j \alpha_j = 1, \\ \log v &= \sum_j \alpha_j \log v_j, \\ \log a &= \sum_j \alpha_j \log a_j, \\ \log b &= \sum_j \alpha_j \log b_j. \end{aligned}$$

Поскольку множества $M_{1,4c}^{(X,Y)}(f\,u_j a_j^{-1}, g\,v_j b_j^{-1})$ непусты, в силу (16) непусто также и множество

$$M_{1,4c}^{(X,Y)}\left(f\prod_{j=1}^{n}\left[u_j a_j^{-1}\right]^{\alpha_j}, g\prod_{j=1}^{n}\left[v_j\, b_j^{-1}\right]^{\alpha_j}\right),$$

что означает, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\log a_j, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\log b_j\right)\in\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\log\,u_j, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\log\,v_j\right),$$

как и утверждалось.

Заметим, что D – ограниченное и выпуклое подмножество пространства L_2. Поскольку D замкнуто по мере, оно также замкнуто и в пространстве L_2. Наделим множество $D\oplus D$ слабой топологией пространства $\mathrm{L}_2\oplus\mathrm{L}_2$; тогда пространство $D\oplus D$ выпукло, замкнуто и компактно. Благодаря свойству Фату множество $\Phi(\log\,u,\log\,v)$ замкнуто по мере для любых $(\log\,u,\log\,v)\in D\oplus D$, поэтому оно замкнуто в сильной топологии пространства $\mathrm{L}_2\oplus\mathrm{L}_2$, а значит, в силу выпуклости, и в пространстве $D\oplus D$.

Покажем, что график отображения Φ замкнут. Поскольку он является выпуклым множеством, достаточно показать, что он замкнут в сильной топологии пространства $\mathrm{L}_2\oplus\mathrm{L}_2$. Пусть

$$(\log a_j,\log b_j)\in\Phi(\log\,u_j,\log\,v_j), \tag{20}$$

и функции $\log a_j\in D$, $\log b_j\in D$, $\log\,u_j\in D$, $\log\,v_j\in D$ сходятся в пространстве L_2 к функциям $\log A\in D$, $\log B\in D$, $\log U\in D$ и $\log V\in D$ соответственно. Нужно показать, что имеет место соотношение

$$(\log A,\log B)\in\Phi(\log U,\log V).$$

Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что упомянутая сходимость имеет место почти всюду. Ещё раз переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\|\log a_j-\log A\|_{\mathrm{L}_2}\leqslant 2^{-j},$$

$$\|\log b_j-\log B\|_{\mathrm{L}_2}\leqslant 2^{-j},$$

и к тому же все эти функции ограничены снизу числом $\log\frac{1}{2}$. Тогда последовательности функций из пространства L_2

$$\log\alpha_j = \bigvee_{k\geqslant j}\log a_k \geqslant \log a_j,$$

$$\log\beta_j = \bigvee_{k\geqslant j}\log b_k \geqslant \log b_j,$$

убывают и стремятся к функциям $\log A$, $\log B$ почти всюду. Точно так же, последовательности функций

$$\log\upsilon_j = \bigwedge_{k\geqslant j}\log u_k \leqslant \log u_j,$$

$$\log\nu_j = \bigwedge_{k\geqslant j}\log v_k \leqslant \log v_j,$$

возрастают и стремятся к функциям $\log U$, $\log V$ почти всюду. По предположению (20) множества $M_{1,4c}^{(X,Y)}(f\,u_j a_j^{-1}, g\,v_j b_j^{-1})$ непусты, а значит, по свойству (14) множества

$$M_{1,4c}^{(X,Y)}(f\upsilon_j\alpha_j^{-1}, g\nu_j\beta_j^{-1}),$$

непусты и убывают, поскольку последовательности функций $f\upsilon_j\alpha_j^{-1}$ и $g\nu_j\beta_j^{-1}$ возрастают почти всюду. Применяя предложение 15 к этой последовательности множеств, получаем, что множество $M_{1,4c}^{(X,Y)}$ $(fUA^{-1},\ gVB^{-1})$ непусто. Таким образом, требуемое соотношение $(\log A, \log B)\in\Phi(\log U, \log V)$ имеет место, и график отображения Φ замкнут.

Применяя теорему Ки Фана–Какутани (см. раздел 3) к отображению Φ, заключаем, что существуют функции $(\log u, \log v)\in D\oplus D$, такие, что

$$(\log u, \log v)\in\Phi(\log u, \log v).$$

Но это означает, что множество

$$M_{C,4c}^{(X,Y)}(f,g) = M_{C,4c}^{(X,Y)}\left(fuu^{-1}, gvv^{-1}\right)$$

непусто, и условия предложения 14 выполнены с константами C и $c' = 4c$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что если исходные константы ВМО-регулярности (C, m) пары $(X\,\mathrm{L}_1, Y\,\mathrm{L}_1)$ таковы, что $C \geqslant 1$, то, уменьшая константу $\frac{1}{2}$ в определении множества D, можно получить это утверждение с константой $c' = c+\varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Применяя далее рассуждение наподобие использованного в предложении 15, можно показать, что если утверждение предложения 14 верно для пары $(X\,\mathrm{L}_1, Y\,\mathrm{L}_1)$ с константами (C, c), $C \geqslant 1$, то оно верно и для пары (X, Y) с теми же константами.

5. $X(\Psi)Y(\Phi) = (XY)(\Psi\Phi)$

В этом разделе мы исследуем справедливость одной полезной формулы. Пусть X, Y – квазинормированные решетки измеримых функций на σ-конечном измеримом пространстве (Ω, μ) и Ψ, Φ – квазинормированные решетки измеримых функций на σ-конечном измеримом пространстве (Ω_1, μ_1). В этом разделе все нормы в решетках, имена которых содержат греческие буквы, берутся по второй переменной, т.е., например, для функции $a \in X(\Psi)$ запись $\|a\|_\Psi$ означает функцию $x \mapsto \|a(x, \cdot)\|_\Psi$, $x \in \Omega$. Легко установить следующее включение.

Предложение 16. $X(\Psi)Y(\Phi) \subset (XY)(\Psi\Phi)$.

Действительно, пусть задана функция $h \in X(\Psi)Y(\Phi)$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие функции $f \in X(\Psi)$, $g \in Y(\Phi)$, что $f = gh$ и

$$\|h\|_{X(\Psi)Y(\Phi)} \geqslant \|f\|_{X(\Psi)}\|g\|_{Y(\Phi)} - \varepsilon.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\|h\|_{(XY)(\Psi\Phi)} &\leqslant \|\ \|f\|_\Psi\ \|g\|_\Phi \|_{XY} \leqslant \|\ \|f\|_\Psi\ \|_X \|\ \|g\|_\Phi\ \|_Y \\ &= \|f\|_{X(\Psi)}\|g\|_{Y(\Phi)},\end{aligned}$$

что доказывает предложение 16 в силу произвольности числа ε.

При попытках проверить обратное включение возникают трудности с измеримостью образующихся разбиений. Нам будет достаточно следующих утверждений.

Предложение 17. *Пусть решетка $X(\Psi)Y(\Phi)$ обладает свойством Фату, и в решетке $(XY)(\Psi\Phi)$ плотны функции вида*

$$h(x, y) = \sum_j \chi_{E_j}(x) h_j(y), \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega_1, \tag{21}$$

где $E_j \subset \Omega$ *– измеримые подмножества измеримого пространства* Ω, h_j *–* μ_1*-измеримые функции, определённые на измеримом пространстве* Ω_1. *Тогда* $X(\Psi)Y(\Phi) = (XY)(\Psi\Phi)$.

Докажем предложение 17. В силу предложения 16 достаточно проверить включение $(XY)(\Psi\Phi) \subset X(\Psi)Y(\Phi)$. В силу свойства Фату решетки $X(\Psi)Y(\Phi)$ достаточно проверить это условие на плотном подмножестве решетки $(XY)(\Psi\Phi)$. По условию функции h вида (21) плотны в решетке $(XY)(\Psi\Phi)$, причём можно считать множества E_j дизъюнктными, а функции h_j ненулевыми (в пространстве $\mathrm{S}(\Omega_1,\mu_1)$); можно также считать, что $\mu(E_j) > 0$ при всех j. Поскольку $h_j \in \Psi\Phi$, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие функции $f_j \in \Psi$, $g_j \in \Phi$, что $h_j = f_j g_j$, и $\|f_j\|_\Psi \|g_j\|_\Phi \leqslant (1+\varepsilon)\|h_j\|_{\Psi\Phi}$. Далее, ясно, что $\sum_j \|f_j\|_\Psi \|g_j\|_\Phi \chi_{E_j} \in XY$, поэтому существуют такие функции $a \in X$ и $b \in Y$, что $ab = \sum_j \|f_j\|_\Psi \|g_j\|_\Phi \chi_{E_j}$, и

$$\|a\|_X \|b\|_Y \leqslant (1+\varepsilon) \Bigl\| \sum_j \|f_j\|_\Psi \|g_j\|_\Phi \chi_{E_j} \Bigr\|_{XY}.$$

Для $x \in \Omega$ и $y \in \Omega_1$ положим

$$f(x,y) = \sum_j \frac{f_j(y)}{\|f_j\|_\Psi} \chi_{E_j}(x) a(x),$$

$$g(x,y) = \sum_j \frac{g_j(y)}{\|g_j\|_\Phi} \chi_{E_j}(x) b(x).$$

Тогда для любого j при $x \in E_j$ имеем $f(x,\cdot)g(x,\cdot) = f_j(\cdot)g_j(\cdot) = h_j(\cdot)$, откуда следует, что $fg = h$. Далее, нетрудно произвести оценку

$$\begin{aligned} \|h\|_{X(\Psi)Y(\Phi)} &\leqslant \|f\|_{X(\Psi)} \|g\|_{Y(\Phi)} = \|a\|_X \|b\|_Y \\ &\leqslant (1+\varepsilon) \Bigl\| \sum_j \|f_j\|_\Psi \|g_j\|_\Phi \chi_{E_j} \Bigr\|_{XY} \\ &\leqslant (1+\varepsilon)^2 \Bigl\| \sum_j \|h_j\|_{\Psi\Phi} \chi_{E_j} \Bigr\|_{XY} = (1+\varepsilon)^2 \|h\|_{(XY)(\Psi\Phi)}, \end{aligned}$$

и требуемое включение доказано в силу произвольности числа ε.

Предложение 18. *Пусть решетка $X(\Psi)Y(\Phi)$ обладает свойством Фату, и пространство $\Psi\Phi$ сепарабельно. Тогда $X(\Psi)Y(\Phi){=}(XY)(\Psi\Phi)$.*

По предложению 17 достаточно показать, что функции вида (21) плотны в решетке $(XY)(\Psi\Phi)$. Чтобы проверить это, зафиксируем плотное подмножество $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ пространства $\Psi\Phi$. Пусть заданы произвольная функция $f\in(XY)(\Psi\Phi)$ и произвольное число $\varepsilon>0$. Определим для $j\in\mathbb{N}$ последовательно множества

$$E_j=\{x\in\Omega\mid\|f(x,\cdot)-h_j\|_{\Psi\Phi}<\varepsilon\|f(x,\cdot)\|_{\Psi\Phi}\}\setminus\bigcup_{1\leqslant k<j}E_k.$$

Покажем, что множества E_j измеримы. Существует (см. доказательство предложения 9) возрастающая последовательность измеримых множеств $F_l\subset\Omega$, такая, что $\bigcup\limits_l F_l=\Omega$ и $\chi_{F_l}\in XY$. Множества E_j являются объединением множеств

$$E_j^l=\big\{x\in F_l\mid\|f(x,\cdot)-h_j^l(x,\cdot)\|_{\Psi\Phi}<\varepsilon\|f(x,\cdot)\|_{\Psi\Phi}\big\}\setminus\bigcup_{1\leqslant k<j}E_k^l,$$

где $h_j^l(x,y)=\chi_{F_l}(x)h_j(y)$, $x\in\Omega$, $y\in\Omega_1$. Поскольку $h_j^l\in XY(\Psi\Phi)$, также $f-h_j^l\in(XY)(\Psi\Phi)$, откуда следует по определению решетки $(XY)(\Psi\Phi)$, что функция $x\mapsto\|f(x,\cdot)-h_j^l(x,\cdot)\|_{\Psi\Phi}$, $x\in\Omega$, измерима, и поэтому множества E_j^l и E_j измеримы.

Определим функцию h формулой (21). По построению имеем

$$\|f-h\|_{(XY)(\Psi\Phi)}\leqslant\varepsilon\|f\|_{(XY)(\Psi\Phi)},$$

что, в силу произвольности числа ε, показывает плотность множества функций вида (21) в решетке $(XY)(\Psi\Phi)$, и предложение 18 доказано.

6. Доказательство теоремы 2

Этот раздел посвящён доказательству теоремы 2. Отметим сначала следующие простые свойства. Если X, Ξ – банаховы решетки измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}{\times}\Omega,m{\times}\mu)$ и (Ω_1,μ_1) соответственно, то имеет место формула $[X(\Xi)]'=X'(\Xi')$. Если w — неотрицательный вес, то $[X(w)]'=X'(w^{-1})$, и $X(w)=X\,\mathrm{L}_\infty(w)$.

Предложение 19. *Пусть X – BMO-регулярная решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$. Тогда решетки $X(l^p)$ и $X(l^p_\lambda)$ BMO-регулярны при всех $0<p\leqslant\infty$.*

Действительно, известно (см. [14]), что BMO-регулярны решетки $X(\mathrm{L}_\infty(\mathbb{Z}))$ и $\mathrm{L}_\infty(l^p,\mathbb{T}\times\Omega)$, что сразу доказывает предложение в случае $p=\infty$. Если $p<\infty$, мы воспользуемся тем, что BMO-регулярно произведение указанных решёток, которое в силу предложения 18 равно $X(l^p)$. При всех $0<p\leqslant\infty$ решетка $X(l^p_\lambda)=X(l^p)(w_\lambda)$ с весом $w_\lambda(\cdot,\cdot,j)=\lambda^j$ тогда тоже BMO-регулярна.

Покажем, что в теореме 2 из условия 1 следуют все остальные условия. Пусть пара (X,Y) BMO-регулярна. Тогда решетка XY' BMO-регулярна, и по предложению 19 решетки $XY'(l^p_\lambda)$ и $\mathrm{L}_1(l^q)$ также BMO-регулярны. Следовательно, пара

$$(XY'(l^p_\lambda),\mathrm{L}_1(l^q))=(X(l^p_\lambda)Y'(l^\infty),\mathrm{L}_1(l^\infty)\,\mathrm{L}_\infty(l^q))$$

BMO-регулярна. Умножая её на решетку $Y(l^\infty)$, получаем, что пара

$$(X(l^p_\lambda)\,\mathrm{L}_1(l^\infty),Y(l^q)\,\mathrm{L}_1(l^\infty))$$

BMO-регулярна. Умножая её на решетку $\mathrm{L}_\infty(l^1)$, получаем, что пара $(X(l^p_\lambda),Y(l^q))$ (слабо) BMO-регулярна, а значит, и АК-устойчива. Таким образом, мы проверили условия 2 и 3 теоремы 2. Условие 4 проверяется аналогично.

Теперь обратимся к необходимости условия 1 теоремы 2. Заметим сначала, что условия 2 и 3 сводятся к случаю $Y=\mathrm{L}_\infty$, $q=\infty$ умножением на решетку $Y'(l^{q'})$ и переходом к порядковым сопряжённым (см. [14, лемма 7]). Поскольку по условию $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$, имеем $\frac1q\geqslant\frac1p$, $l^{q'}l^p=l^s$, $\frac1s=\frac1{q'}+\frac1p=1-\frac1q+\frac1p\leqslant1$, и решетки в паре после умножения останутся банаховыми. Из BMO-регулярности решетки $(XY')'$ следует (см. [14, 15]) BMO-регулярность решетки XY', а значит, и (слабая) BMO-регулярность пары (X,Y). С учётом этого упрощения пара решеток в условии 2 принимает вид $(X(l^p_\lambda),\mathrm{L}_\infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. При $p<\infty$ из АК-устойчивости этой пары преобразованием последней переменной $j\mapsto -j$ и умножением на решетку $\mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda)$ получается АК-устойчивость пары $(X(l^p),\mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda))$, и BMO-регулярность решетки X следует в силу результатов статей [14, 15]. Перед тем как проверить достаточность условий 2 и 4 в остальных случаях, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 20. *Пусть X – квазинормированная решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающая свойством $(*)$, и решетка X сильно* АК*-устойчива.*[1] *Тогда решетка $X(l^\infty)$ также сильно АК-устойчива.*

Докажем предложение 20. Пусть $\{h_j\}$ – произвольная функция из решетки $X(l^\infty)$, и задано число $\lambda > 0$. Тогда можно образовать функцию $g = \sup_j |h_j| \in X$ и найти для неё мажоранту h из условия $(*)$, т.е. $h \geqslant g$, $\|h\|_X \leqslant c_*\|g\|_X$. По предложению 3 существует функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$, такая, что выполнены условия

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathrm{L}_\infty} &\leqslant c,\\ \|Uh\|_{\mathrm{L}_\infty} &\leqslant c\lambda,\\ \|\lambda|1-U|\|_X &\leqslant c\|h\|_X.\end{aligned}$$

Но тогда функция $\{U_j\}$, $U_j = U$, удовлетворяет условиям предложения 4 для решетки $X(l^\infty)$ с константой $c c_*$, откуда следует, что решетка $X(l^\infty)$ сильно АК-устойчива.

Предложение 21. *Пусть X – решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающая свойством Фату и свойством $(*)$. Если решетка $X(l^\infty_\lambda)$* АК*-устойчива с константой c, то для любого веса w на измеримом пространстве $\mathbb{T}\times\Omega$, такого, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\|\log w(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant c_1 < \infty,$$

решетка $X(w)$ АК-устойчива с константой, зависящей только от величин c, c_1, $\lambda > 1$ и константы в условии $(*)$.

Для доказательства нам понадобится следующее понятие.

Определение 7. *Пусть w – неотрицательная измеримая функция, заданная на $\mathbb{T}\times\Omega$. Последовательность $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$ называется аналитическим разложением единицы с константами $C > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, и $\lambda > 1$, согласованным с функцией w, если выполнены*

[1] Напомним, что это по определению означает сильную АК-устойчивость пары (X, L_∞).

следующие условия:

$$\Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\varphi_j|^\varepsilon \Big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant C, \tag{22}$$

$$\big\| \, |\varphi_j|^\varepsilon w \big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant C\lambda^j, \quad j\in\mathbb{Z}, \tag{23}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\varphi_j|^\varepsilon \lambda^j \leqslant Cw \text{ почти всюду}, \tag{24}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j = 1 \text{ почти всюду}. \tag{25}$$

Известно (формулировка в [14, лемма 9], но все основные выкладки в [7]), что условие ограниченности нормы $\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\|\log a\|_{\mathrm{BMO}}$ эквивалентно существованию для каждых чисел $\lambda > 1$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ аналитического разложения единицы, согласованного с функцией a, причём норма $\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\|\log a\|_{\mathrm{BMO}}$ оценивается через константы в этом разложении и наоборот.

Итак, пусть вес w удовлетворяет условиям предложения 21. Тогда найдётся аналитическое разложение единицы $\{\varphi_j\}$ при $\varepsilon = \frac{1}{2}$, согласованное с весом w. Пусть $\varphi_j = b_j\psi_j^2$, где b_j – произведение Бляшке, построенное по нулям функции φ_j. Пусть $F\in (X(w)+\mathrm{L}_\infty)_A$ и $F = wh+g$, $h\in X$, и $g\in \mathrm{L}_\infty$. Образуем последовательность $F_j = \psi_j F$, $j\in\mathbb{Z}$. Тогда $F_j = h_j + g_j$, $h_j = \psi_j wh$, $g_j = \psi_j g$. С учётом формулы (23) получаем

$$|\psi_j wh| \leqslant |h|\ |\varphi_j|^{\frac{1}{2}} w \leqslant C|h|\lambda^j,$$

так что имеет место оценка $\big\|\{h_j\}\big\|_{X(l^\infty_\lambda)} \leqslant C\big\|h\big\|_X$. Поскольку $\big\|\psi_j\big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant C$, справедлива оценка $\big\|\{g_j\}\big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant C\|g\|_{\mathrm{L}_\infty}$. Тогда из сильной АК-устойчивости пары $(X(l^\infty_\lambda), \mathrm{L}_\infty)$ найдутся такие функции $\{H_j\}\in X_A(l^\infty_\lambda)$ и $\{G_j\}\in \mathrm{H}_\infty(l^\infty)$, что

$$\|\{H_j\}\|_{X(l^\infty_\lambda)} \leqslant Cc\|h\|_X,$$
$$\|\{G_j\}\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant Cc\|g\|_{\mathrm{L}_\infty},$$

и $F_j = H_j + G_j$. Теперь из (25) находим $F = \sum_j b_j\psi_j F_j = H + G$, где

$$H = \sum_j b_j\psi_j H_j,$$

$$G = \sum_j b_j \psi_j G_j.$$

Из (24) получаем оценку

$$|H| \leqslant \sum_j |H_j| \lambda^{-j} \, |\psi_j| \lambda^j \leqslant Cw \sup_j (|H_j| \lambda^{-j}),$$

откуда

$$\|H\|_{X(w)} \leqslant C \|\{H_j\}\|_{X(l^\infty_\lambda)} \leqslant c' \|h\|_X$$

для некоторой константы c', зависящей только от величин C и c. Точно так же, из (22) получаем оценку

$$\|G\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \Big\| \sum_j |\psi_j G_j| \Big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \Big\| \sum_j |\psi_j| \Big\|_{\mathrm{L}_\infty} \sup_j \|G_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c' \|g\|_{\mathrm{L}_\infty}.$$

Таким образом, $F = H + G$ является требуемым разложением, и АК-устойчивость пары $(X(w), \mathrm{L}_\infty)$ с требуемой оценкой константы доказана.

Предложение 22. *Пусть X – нормированная решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающая свойством Фату и свойством $(*)$. Если при некотором значении c_1 для любого веса w на $\mathbb{T}\times\Omega$, такого, что $\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|\log w(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant c_1 < \infty$, решетка $X(w)$ АК-устойчива с константой, зависящей только от c_1 и константы в условии $(*)$, то для любой ВМО-регулярной с константами (C,m), $C \leqslant c_1$, решетки F измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ решетка XF сильно АК-устойчива с константой, зависящей только от c_1, m и константы в условии $(*)$.*

Проверим условия предложения 4 для решетки XF. Пусть заданы функция $f \in XF$, $f = hg$, $h \in X$, $g \in F$, $\|g\|_F \leqslant 1$, $\|h\|_X \leqslant 2\|f\|_{XF}$ и число $\lambda > 0$. Найдётся ВМО-мажоранта w для функции g с константами (C,m), и по условию пара $(X(w), \mathrm{L}_\infty)$ сильно АК-устойчива с некоторой константой c, зависящей только от c_1 и константы в условии $(*)$. Поэтому в силу предложения 3, применённого к функции $f = hg \in X(w)$, найдётся такая функция $U \in \mathrm{H}_\infty(m\times\mu)$, что $\|U\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c$, $\|Uf\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda$ и

$$\begin{aligned}\|\lambda|1-U|\|_{XF} &\leqslant \|\lambda|1-U|w^{-1}\|_X \|w\|_F \leqslant m\|\lambda|1-U|\|_{X(w)} \\ &\leqslant cm\|f\|_{X(w)} \leqslant cm\|h\|_X \leqslant 2cm\|f\|_{XF}.\end{aligned}$$

Таким образом, условия предложения 4 выполнены, и решетка XF сильно АК-устойчива с требуемыми оценками констант.

Предложения 21 и 22 вместе дают следующее утверждение.

Предложение 23. *Пусть X и F — решетки измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, причём решетка X обладает свойством Фату и свойством $(*)$. Если решетка $X(l^\infty_\lambda)$ АК-устойчива, а решетка F BMO-регулярна, то решетка XF АК-устойчива.*

Теперь проверим переход от условия 2 к условию 1 в теореме 2. Напомним, что неразобранным остаётся единственный случай, а именно, когда нам дано, что решетка $X(l^\infty_\lambda)$ АК-устойчива, и требуется доказать BMO-регулярность решетки X. По предложению 20 при сформулированном условии АК-устойчива решетка $X(l^\infty_\lambda)(l^\infty) = X(l^\infty_\lambda(l^\infty))$ измеримых функций, заданная на измеримом пространстве $\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Преобразование перестановки последних переменных в этом пространстве переводит решетку $l^\infty_\lambda(l^\infty)$ в решетку $l^\infty(l^\infty_\lambda)$ и не влияет на АК-устойчивость. Таким образом, решетка $X(l^\infty)(l^\infty_\lambda)$ сильно АК-устойчива. Применяя предложение 23 к этой решётке и BMO-регулярной в силу предложения 19 решетке $F = \mathrm{L}_\infty(l^1_\lambda)$, заключаем, что решетка $X(l^\infty)\,\mathrm{L}_\infty(l^1{}_\lambda) = X(l^1_\lambda)$ сильно АК-устойчива. По уже разобранному случаю $p=1$ отсюда следует, что решетка X BMO-регулярна, и переход от 2 к 1 в теореме 2 полностью доказан.

Теперь проверим переход от условия 4 к условию 1 в теореме 2. Используя те же рассуждения, что и в случаях 2 и 3 (см. начало этого раздела), получаем, что достаточно ограничиться случаем $Y = \mathrm{L}_\infty$. Нужно доказать, что из того, что решетка $X(l^1)$ сильно АК-устойчива, следует, что BMO-регулярна решетка X. Для этого в силу уже доказанного перехода от условия 2 к условию 1 теоремы 2 достаточно проверить, что пара $(X(l^1), \mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda))$ АК-устойчива при $\lambda = 2$, а для этого, в свою очередь, в силу предложения 13 достаточно проверить, что пара $(X(l^1), \mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n))$ АК-устойчива с одной и той же постоянной c при любом n, где через w_n обозначена убывающая последовательность “срезанных” весов

$$w_n(\cdot,\cdot,j) = 2^{j\vee(-n)}, \quad j\in\mathbb{Z},$$

которая сходится при всех j к требуемому экспоненциальному весу

$$w(\cdot,\cdot,j) = 2^j, \quad j\in\mathbb{Z}.$$

Приводимое далее доказательство основывается на следующей очень простой идее. Если разделить j-ю компоненту разбиения некоторой функции $F \in (X(l^1) + \mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n))_A$ на $w_n = 2^n$ равных частей, то для неё будут верны оценки, соответствующие разбиению в решетке $X(l^1) + \mathrm{L}_\infty(l^\infty)$. Используя предполагаемую АК-устойчивость решетки $X(l^1)$, это разбиение можно заменить разбиением с аналитическими компонентами с соответствующими оценками; если опять сложить их вместе, получается аналитическое разбиение в решетке $X(l^1) + \mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n)$ с требуемыми оценками.

Итак, пусть задана последовательность $\{F_j\} \in (X(l^1)+\mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n))_A$ и её разбиение $F_j = h_j + g_j$, $j \in \mathbb{Z}$, такое, что $\{h_j\} \in X(l^1)$, $\{g_j\} \in \mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n)$. Положим

$$F_{j,k} = \chi_{\{1 \leqslant k \leqslant 2^{n+(j+n)\vee 0}\}} 2^{-n-(j+n)\vee 0} F_j,$$

$$h_{j,k} = \chi_{\{1 \leqslant k \leqslant 2^{n+(j+n)\vee 0}\}} 2^{-n-(j+n)\vee 0} h_j,$$

$$g_{j,k} = \chi_{\{1 \leqslant k \leqslant 2^{n+(j+n)\vee 0}\}} 2^{-n-(j+n)\vee 0} g_j,$$

при j, $k \in \mathbb{Z}$; далее будем для удобства рассматривать решетки l^p, заданные на измеримом пространстве $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Имеем $F_{j,k} = h_{j,k} + g_{j,k}$ при $j, k \in \mathbb{Z}$, и

$$\big\|\{h_{j,k}\}\big\|_{X(l^1)} = \big\|\{h_j\}\big\|_{X(l^1)},$$

$$\begin{aligned}\big\|\{g_{j,k}\}\big\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)} &\leqslant \big\|\sup_j(2^{-n-(j+n)\vee 0}|g_j|)\big\|_{\mathrm{L}_\infty} \\ &= 2^{-2n}\big\|\sup_j(2^{-(j\vee(-n))}|g_j|)\big\|_{\mathrm{L}_\infty} = 2^{-2n}\big\|\{g_j\}\big\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n)}.\end{aligned}$$

Из предполагаемой АК-устойчивости решетки $X(l^1)$ с константой c следует, что имеет место разложение $F_{j,k} = H_{j,k}+G_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, такое, что $\{H_{j,k}\} \in (X(l^1))_A$, $\{G_{j,k}\} \in \mathrm{H}_\infty(l^\infty)$ и

$$\begin{aligned}\big\|\{H_{j,k}\}\big\|_{X(l^1)} &\leqslant c\big\|\{h_{j,k}\}\big\|_{X(l^1)} = c\big\|\{h_j\}\big\|_{X(l^1)},\\ \big\|\{G_{j,k}\}\big\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)} &\leqslant c\big\|\{g_{j,k}\}\big\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)} \leqslant 2^{-2n}\big\|\{g_j\}\big\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n)}.\end{aligned}$$

Положим

$$H_j = \sum_{k=1}^{2^{n+(j+n)\vee 0}} H_{j,k},$$

$$G_j = \sum_{k=1}^{2^{n+(j+n)\vee 0}} G_{j,k}$$

для $j \in \mathbb{Z}$. Тогда $F_j = H_j + G_j$, $j \in \mathbb{Z}$, и имеют место оценки

$$\|\{H_j\}\|_{X(l^1)} = \|\{H_{j,k}\}\|_{X(l^1)} \leqslant c\|\{h_j\}\|_{X(l^1)},$$

$$\begin{aligned}
\|\{G_j\}\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n)} &= \left\| \sup_j \left(2^{-(j\vee(-n))} \left| \sum_{k=1}^{2^{n+(j+n)\vee 0}} G_{j,k} \right| \right) \right\|_{\mathrm{L}_\infty} \\
&\leqslant 2^{2n} \left\| \sup_j \left(\frac{1}{2^{n+(j+n)\vee 0}} \sum_{k=1}^{2^{n+(j+n)\vee 0}} |G_{j,k}| \right) \right\|_{\mathrm{L}_\infty} \\
&\leqslant 2^{2n} \left\| \sup_j \left(\sup_k |G_{j,k}| \right) \right\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 2^{2n} \|\{G_{j,k}\}\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)} \\
&\leqslant c\|\{g_j\}\|_{\mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, пара $(X(l^1), \mathrm{L}_\infty(l^\infty)(w_n))$ АК-устойчива с константой c при всех $n \in \mathbb{N}$, и переход от условия 4 к условию 1 теоремы 2 доказан.

7. АК-устойчивость решеток, обладающих некоторыми свойствами суммирования

В этом разделе рассматриваются пары решеток, обладающих следующим свойством суммирования.

Определение 8. *Будем говорить, что решетка измеримых функций X обладает свойством суммирования $(1, \infty)$ с постоянной C, если при всех $N \geqslant 1$ и наборах функций f_j, g_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, таких, что $\|f_j\|_X \leqslant \|g_j\|_X$, справедливо соотношение*

$$\left\| \bigvee_{j=1}^{N} |f_j| \right\|_X \leqslant C \left\| \sum_{j=1}^{N} |g_j| \right\|_X. \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что если решетка X обладает свойством Фату, то свойство суммирования $(1, \infty)$, если оно выполнено для решетки X, можно распространить на бесконечное число слагаемых.

Это свойство, как будет видно в дальнейшем, позволяет производить оценки “по частям”. Нетрудно проверить, что решетки L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (и, более общим образом, абстрактные пространства L_p) обладают свойством суммирования $(1,\infty)$ с константой $C = 1$, используя их p-выпуклость и p-вогнутость. Действительно, в условиях определения 8

$$\Big\| \bigvee_{j=1}^{N} |f_j| \Big\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant \Big\| \Big(\sum_{j=1}^{N} |f_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_{\mathrm{L}_p} = \Big(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{\mathrm{L}_p}^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_{\mathrm{L}_p}^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big\| \Big(\sum_{j=1}^{N} |g_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant \Big\| \sum_{j=1}^{N} |g_j| \Big\|_{\mathrm{L}_p}$$

с очевидными изменениями при $p = \infty$. К сожалению, многие интересные решетки не обладают этим свойством. В частности, им не обладают пространства $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем p, решетки вида $\mathrm{L}_p(l^q)$ при $p \neq q$, пространства Лоренца $\mathrm{L}_{p\infty}$ при $1 \leqslant p < \infty$, так что область непосредственного применения приводимых в этом разделе результатов существенно ограничена; непонятно, обладают ли указанным свойством какие-либо ещё решетки помимо L_p. Пока не удалось проверить наличие этого свойства для пространств Орлича L_φ с функциями $\varphi(x) = x\log(1+x)$ и $\varphi(x) = x^p \vee x^q$. Тем не менее, даже для случая весовых пространств L_p приводимые результаты, по-видимому, представляют некоторый интерес.

Рассмотрим следующее формально более сильное свойство.

Определение 9. *Будем говорить, что решетка измеримых функций X обладает сильным свойством суммирования $(1,\infty)$ с постоянной C при некотором значении $\lambda > 1$, если при всех наборах функций f_j, g_j, $j \in \mathbb{Z}$, таких, что $\|f_j\|_X \leqslant \sum\limits_k \lambda^{-|j-k|}\|g_k\|_X$, справедливо соотношение*

$$\Big\| \bigvee_{j} |f_j| \Big\|_X \leqslant C \Big\| \sum_{j} |g_j| \Big\|_X . \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что решетки L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обладают сильным свойством суммирования $(1,\infty)$. Действительно, в условиях определения 9

$$\Big\|\bigvee_j |f_j|\Big\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant \Big\|\Big(\sum_j |f_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_{\mathrm{L}_p} = \Big(\sum_j \|f_j\|^p_{\mathrm{L}_p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \Big(\sum_j\Big(\sum_k \lambda^{-|j-k|}\|g_k\|_{\mathrm{L}_p}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \Big(\sum_j \lambda^{-|j|}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\sum_j \|g_j\|^p_{\mathrm{L}_p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant C\Big\|\Big(\sum_j |g_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant C\Big\|\sum_j |g_j|\Big\|_{\mathrm{L}_p}$$

при $C = \Big(\sum_j \lambda^{-|j|}\Big)^{1-\frac{1}{p}}$, с очевидными изменениями при $p = \infty$.

Нетрудно проверить, что если решетка X обладает свойством суммирования $(1, \infty)$, то им также обладает решетка $X(w)$ для любого веса w, и то же самое верно для сильного свойства суммирования $(1, \infty)$. Мы сформулируем основной результат этого раздела в виде следующего утверждения, которое полезно сравнить с предложением 21.

Предложение 24. *Пусть решетка X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ обладает свойством Фату, свойством $(*)$, сильным свойством суммирования $(1, \infty)$ с константой C, и решетка X AK-устойчива с постоянной c. Тогда для любого веса w на $\mathbb{T} \times \Omega$, такого, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|\log w(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant c_1 < \infty,$$

решетка $X(w)$ является AK-устойчивой с константой, зависящей только от величин c, c_1 и C.

Отметим, что вследствие предложения 22 в условиях предложения 24 тогда AK-устойчива решетка XF для любой BMO-регулярной решетки F измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$. Неясно, сохраняется ли свойство AK-устойчивости при умножении на BMO-регулярные пары решеток в общем случае, но если это на самом деле так, то по результатам раздела 6 АК-устойчивость сразу влекла бы ВМО-регулярность.

Докажем предложение 24. Пусть задан вес w как в условии. Тогда найдётся аналитическое разложение единицы ψ_j (см. определение 7) со значением $\varepsilon = \frac{1}{3}$, согласованное с этим весом. Отметим следующие простые свойства аналитического разложения единицы. Из (23) и (24) сразу получается, что для любых индексов $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\| \, |\psi_j|^\varepsilon |\psi_k|^\varepsilon \|_{\mathrm{L}_\infty} = \left\| \, |\psi_j|^\varepsilon w \lambda^{-k} \, \lambda^k |\psi_k|^\varepsilon w^{-1} \right\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant C^2 \lambda^{j-k}.$$

Отсюда, рассматривая j и k в другом порядке, получаем, что

$$\| \, |\psi_j|^\varepsilon |\psi_k|^\varepsilon \|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant C^2 \lambda^{-|j-k|}. \tag{28}$$

Далее, из (25) и (23) получаем, что почти всюду

$$1 \leqslant \sum_j |\psi_j| \leqslant C^{\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}} \bigvee_j |\psi_j|^\varepsilon \sum_j |\psi_j|^\varepsilon \leqslant C^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \bigvee_j |\psi_j|^\varepsilon.$$

Таким образом, почти всюду

$$\bigvee_j |\psi_j|^\varepsilon \geqslant C^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \tag{29}$$

Из оценок (28), (29) и сильного свойства $(1,\infty)$ суммируемости получаем, что для проверки соотношения $\|a\| \leqslant c'\|b\|$ в решетке X с надлежащей оценкой константы c' достаточно проверить соотношения

$$\| \, |\psi_j|^\varepsilon a\| \leqslant c'' \sum_k \lambda^{-|j-k|} \| \, |\psi_k|^\varepsilon b\|, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Действительно, обозначая тогда $f_j = |\psi_j|^\varepsilon a$, $g_j = |\psi_j|^\varepsilon b$, имеем оценку $\|f_j\| \leqslant c''\|g_j\|$. По свойству суммируемости $(1,\infty)$ тогда получается, что $\| \bigvee_j |f_j| \| \leqslant cc'' \| \sum_j |g_j| \|$. Используя (29) и (23), получаем, что

$$\|a\| \leqslant C^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \left\| \bigvee_j |\psi_j|^\varepsilon a \right\| \leqslant C^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} cc'' \left\| \sum_j |\psi_j|^\varepsilon b \right\| \leqslant C^{1+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} cc'' \|b\|,$$

как и утверждалось.

Итак, пусть дана ненулевая функция $wf \in X(w)$; достаточно установить для неё существование функций V_k, удовлетворяющих условиям предложения 5. По условию решетка X АК-устойчива, и поэтому в силу того же предложения 5, применённого к функциям $f|\psi_j|^\varepsilon$, для любых $j \in \mathbb{Z}$ найдётся такая последовательность функций $U_{j,k} \in \mathrm{H}_\infty(m \times \mu)$, $k \in \mathbb{Z}$, что при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$\|U_{j,k}\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c,$$

$$\|U_{j,k} f|\psi_j|^\varepsilon\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c\lambda^k, \tag{31}$$

$$\big\|\lambda^k |1 - U_{j,k}|\big\|_X \leqslant c\|f|\psi_j|^\varepsilon\|_X. \tag{32}$$

Положим

$$V_j = \sum_k \psi_k U_{k,j-k}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Тогда по свойству (22)

$$\|V_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \sup_k \|U_{k,j-k}\|_{\mathrm{L}_\infty} C^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \bigg\| \sum_j |\psi_j|^\varepsilon \bigg\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant cC^{\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{33}$$

Далее,

$$\|V_j f w\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \bigg\| \sum_k |\psi_k|^{1-2\varepsilon} \lambda^k |U_{k,j-k}| |\psi_k|^\varepsilon |f| \, \lambda^{-k} |\psi_k|^\varepsilon w \bigg\|_{\mathrm{L}_\infty},$$

откуда в силу (23), (31) и (22) получается оценка

$$\begin{aligned} \|V_j f w\|_{\mathrm{L}_\infty} &\leqslant C \bigg\| \sum_k |\psi_k|^{1-2\varepsilon} \lambda^k |U_{k,j-k}| \; |\psi_k|^\varepsilon |f| \bigg\|_{\mathrm{L}_\infty} \\ &\leqslant C \bigg\| \sum_k |\psi_k|^{1-2\varepsilon} \bigg\|_{\mathrm{L}_\infty} \sup_k \lambda^{k-j} \| \; |U_{k,j-k}| \; |\psi_k|^\varepsilon |f| \; \|_{\mathrm{L}_\infty} \\ &\quad \times \lambda^j \leqslant C^2 c \lambda^j. \end{aligned} \tag{34}$$

Теперь проверим соотношения (30) для $a = \lambda^l |1 - V_l|$ и $b = fw$ в решетке $X(w)$ при всех $l \in \mathbb{Z}$. Имеем, в силу (25), (24), (28) и (32),

$$\begin{aligned}
\| |\psi_j|^\varepsilon \lambda^l |1-V_l| \|_{X(w)} &\leqslant \Big\| \sum_k \lambda^{l-k} |1-U_{k,l-k}| \, |\psi_j|^\varepsilon |\psi_k|^{1-\varepsilon} \, \lambda^k |\psi_k|^\varepsilon w^{-1} \Big\|_X \\
&\leqslant C \Big\| \sum_k \lambda^{l-k} |1-U_{k,l-k}| \; |\psi_j|^\varepsilon |\psi_k|^{1-\varepsilon} \Big\|_X \\
&\leqslant C^3 \sum_k \lambda^{-|j-k|} \Big\| \lambda^{l-k} |1-U_{k,l-k}| \Big\|_X \\
&\leqslant C^3 c \sum_k \lambda^{-|j-k|} \| f |\psi_k|^\varepsilon \|_X \\
&= C^3 c \sum_k \lambda^{-|j-k|} \| f w |\psi_k|^\varepsilon \|_{X(w)},
\end{aligned}$$

так что соотношения (30) имеют место, откуда

$$\|\lambda^l |1-V_l| \|_{X(w)} \leqslant c''' \|fw\|_{X(w)} \tag{35}$$

с некоторой константой c''', обладающей нужными оценками. Оценки (33), (34) и (35) по предложению 5 показывают, что последовательность V_l доставляет АК-устойчивость решетки $X(w)$ с нужными оценками константы. Таким образом, предложение 24 доказано.

Отметим одно любопытное следствие предложения 24.

Предложение 25. *Пусть решетка X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ обладает свойством Фату, свойством $(*)$, сильным свойством суммирования $(1, \infty)$ с константой C и решетка X АК-устойчива с постоянной c. Тогда для любого измеримого разбиения пространства $\mathbb{T} \times \Omega$ на множества E_s и любой функции $f \in X$ найдётся такая последовательность функций $U_j \in \mathrm{H}_\infty(m \times \mu)$, $j \in \mathbb{Z}$, что при всех $j \in \mathbb{Z}$*

$$\begin{gathered}
\|U_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c', \\
\|U_j f\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant c' \lambda^j, \\
\Big\| \bigvee_j \lambda^j |1-U_j| \chi_{E_j} \Big\|_X \leqslant c' \|f\|_X
\end{gathered} \tag{36}$$

для некоторой постоянной c', не зависящей от функции f и разбиения E_s.

Действительно, функция $\xi = \{\chi_{E_j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ лежит в BMO-регулярной решетке $\mathrm{L}_\infty(l^1)$. Пусть функция $\zeta = \{w_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является BMO-мажорантой функции ξ в этой решетке. По предложению 24, применённому отдельно к каждой из функций w_j в качестве веса w, найдутся такие функции U_j, $j \in \mathbb{Z}$, что для всех $j \in \mathbb{Z}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \|U_j\|_{\mathrm{L}_\infty} &\leqslant c', \\ \|U_j f\|_{\mathrm{L}_\infty} &\leqslant c'\lambda^j, \\ \big\|\lambda^j|1-U_j|w_j\big\|_X &\leqslant c'\|fw_j\|_X \end{aligned} \tag{37}$$

для некоторой постоянной c', не зависящей от функции f и разбиения E_s. По свойству суммирования $(1,\infty)$, из (37) получаем оценку

$$\Big\|\bigvee_j \lambda^j|1-U_j|w_j\Big\|_X \leqslant c'C\Big\|f\sum_j w_j\Big\|_X. \tag{38}$$

Поскольку $w_j \geqslant \chi_{E_j}$ и $\sum_j w_j \leqslant c''\sum_j \chi_{E_j} = c''$ почти всюду для некоторой универсальной постоянной c'', из (38) немедленно следует (36), и предложение 25 доказано.

Если разбиение E_j и зависящие от этого разбиения функции U_j в условиях предложения 25 можно выбрать таким образом, что супремум последовательности $\lambda^j|1-U_j|$ достигается почти всюду в точках разбиения E_j, то из оценки (36) следовала бы оценка

$$\Big\|\bigvee_j \lambda^j|1-U_j|\Big\|_X \leqslant c'\|f\|_X,$$

что означало бы, что решетка $X(l^1_\lambda)$ AK-устойчива, и тогда она была бы BMO-регулярной по теореме 2. Пока это не удалось проверить.

8. Ограниченная AK-устойчивость и аналитическое разложение единицы

Как уже отмечалось, BMO-регулярная решетка всегда будет ограниченно AK-устойчивой, и при этом в качестве функции U, доставляющей ограниченную AK-устойчивость, можно брать функцию, возникающую в свойстве ограниченной AK-устойчивости пары $(\mathrm{L}_\infty(w), \mathrm{L}_\infty)$ с некоторым весом w, таким, что $\log w \in \mathrm{BMO}$. Известно несколько способов получения этой функции. Конечно, можно использовать предложение 3 в сочетании с любым известным способом проверки АК-устойчивости этой пары (см., например, [2], [8, 14.2]). Интересны и другие способы. В связи с этим можно отметить доказательство, использующее характеризацию свойства $\log w \in \mathrm{BMO}$ в терминах внешних функций, построенных по срезкам веса w, и теорему о короне (см. [5]), а также доказательство, основанное на построении аналитической частичной ретракции для рассматриваемой пары с помощью аналитического разложения единицы, согласованного с весом w (см. [4]). Последний способ можно оформить более непосредственно. Отметим, что хотя в доказательстве в работе [7] существования аналитического разложения единицы, связанного с заданным весом w, $\log w \in \mathrm{BMO}$, используется АК-устойчивость пары $(\mathrm{L}_\infty(w), \mathrm{L}_\infty)$, строго говоря, она не нужна: например, можно применить [3, лемма 4.2] при $p = \infty$, доказательство этой леммы опирается только на элементарные построения. Так или иначе, любое из свойств, характеризующих веса w, такие, что $\log w \in \mathrm{BMO}$, можно взять за основу, если рассматриваемым вопросом является связь между АК-устойчивостью и BMO-регулярностью в общем случае.

Предложение 26. *Пусть X – BMO-регулярная решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ с постоянной c, и зафиксировано значение $\lambda > 1$. Пусть w – BMO-мажоранта для заданной функции $f \in X$, $f \neq 0$, и $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – аналитическое разложение единицы с параметром $\varepsilon = \frac{1}{2}$, согласованное с функцией w. Тогда последовательность функций*

$$U_n = \sum_k \frac{1}{1+\lambda^{k-n}}\psi_k, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{39}$$

будет доставлять свойство ограниченной АК-устойчивости для функции f в смысле предложения 5.

Действительно, из определения аналитического разложения единицы (см. определение 7) нетрудно получить все необходимые оценки:

$$|U_n| \leqslant \sum_k |\psi_k| \leqslant C^2,$$

$$\begin{aligned}|U_n||f| &\leqslant |U_n| w \leqslant \lambda^n \sum_k \frac{1}{\lambda^k + \lambda^n}(|\psi_k|^{\frac12} w)|\psi_k|^{\frac12} \\ &\leqslant \lambda^n \sum_k \frac{1}{\lambda^k+\lambda^n} C\lambda^k |\psi_k|^{\frac12} \leqslant C\lambda^n \sum_k |\psi_k|^{\frac12} \leqslant C^2\lambda^n\end{aligned}$$

почти всюду, и

$$\|\lambda^n|1-U_n|\,\|_X = \left\|\lambda^n\left|1-\sum_k \frac{\lambda^n}{\lambda^k+\lambda^n}\psi_k\right|\,\right\|_X = \left\|\lambda^n\left|\sum_k \frac{\lambda^k}{\lambda^k+\lambda^n}\psi_k\right|\,\right\|_X$$
$$\leqslant \left\|\sum_k \lambda^k|\psi_k|\right\|_X \leqslant C^2\|w\|_X \leqslant C^2 c\|f\|_X.$$

Таким образом, при наличии BMO-регулярности для каждой функции $f\in X$, $f\neq 0$, ограниченная АК-устойчивость доставляется функциями $\{U_n\}$ вида (39). В связи с вопросом о связи между BMO-регулярностью и АК-устойчивостью интересно отметить, что при наличии лишь АК-устойчивости без предположения о BMO-регулярности всякий подходящий набор функций $\{U_n\}$ доставляется *некоторым* аналитическим разложением единицы, по крайней мере если условие $\sum_j \psi_j = 1$ понимать в смысле суммирования методом Абеля.

Предложение 27. *Пусть X – АК-устойчивая банахова решетка измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ с постоянной c, и пусть $f\in X$, $f>0$ почти всюду. Тогда для всякого набора функций $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, доставляющего ограниченную АК-устойчивость в смысле предложения 5 для некоторой функции f, $\log f(\cdot,\omega)\in \mathrm{L}_1$ при почти всех $\omega\in\Omega$, найдётся такая последовательность функций $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ из граничного класса Смирнова N^+, что имеет место представление (39) и*

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\mathbb{D}}}\sum_n \psi_n(t,x)z^n = 1 \tag{40}$$

при почти всех $t\in\mathbb{T}$, $x\in\Omega$.

К соотношению (39) можно относиться как к свёрточному уравнению относительно последовательности функций $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. В связи с этим введём в рассмотрение соответствующие ряды Лорана

$$V(z,t,x) = \sum_{k<0} U_k(t,x)z^k + \sum_{k\geqslant 0}[U_k(t,x)-1]z^k, \quad t\in\mathbb{T}, \quad x\in\Omega, \tag{41}$$

и

$$S(z) = \sum_k \frac{1}{1+\lambda^{-k}}z^k. \tag{42}$$

При условии $|z| < \lambda$ из (4) имеем оценку

$$\left\| \sum_{k=0}^{M} |U_k - 1||z|^k \right\|_X \leqslant \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{|z|}{\lambda}\right)^k \|\lambda^k |1 - U_k|\|_X \leqslant \frac{c}{1 - \frac{|z|}{\lambda}} \|f\|_X$$

при всех $M > 0$, откуда следует, что второй ряд в сумме (41) абсолютно сходится в решетке X; поэтому он сходится в круге $\{|z| < \lambda\}$ при почти всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times \Omega$. Далее, при $|z| > \frac{1}{\lambda}$ из (3) имеем оценку

$$\sum_{k<0} |U_k(t,x)||z|^k \leqslant \frac{c}{f(t,x)} \sum_{k<0} (\lambda|z|)^k \leqslant \frac{c}{f(t,x)\left(1 - \frac{1}{\lambda|z|}\right)}$$

при почти всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times \Omega$. Таким образом, ряд (41) сходится в кольце $\left\{\frac{1}{\lambda} < |z| < \lambda\right\}$ при почти всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times \Omega$.

Нетрудно видеть, что ряд (42) сходится при $\frac{1}{\lambda} < |z| < 1$. Ряд

$$K(z) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{1 + \lambda^{-k}} z^k \tag{43}$$

сходится при всех $|z| < 1$, и $K(0) = 0$. Легко проверить, что при $\frac{1}{\lambda} < |z| < 1$

$$K\left(\frac{1}{\lambda z}\right) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda^{-k}}{1 + \lambda^{-k}} z^{-k} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{1 + \lambda^k} z^{-k} = \sum_{k \leqslant -1} \frac{1}{1 + \lambda^{-k}} z^k,$$

и справедлива формула

$$S(z) = \frac{1}{2} + K(z) + K\left(\frac{1}{\lambda z}\right). \tag{44}$$

Из определения (43) функции K получаем, что

$$K(z) = \sum_{k \geqslant 1} z^k + \sum_{k \geqslant 1} \frac{-\lambda^{-k}}{1 + \lambda^{-k}} z^k = \frac{z}{1 - z} - K\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

Итерируя это соотношение, получаем разложение функции K в сумму простых дробей

$$K(z) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{\frac{z}{\lambda^n}}{1 - \frac{z}{\lambda^n}} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z}{\lambda^n - z}.$$

Отсюда и из (44), выполняя ряд элементарных преобразований, имеем при $\frac{1}{\lambda} < |z| < 1$

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\left(\frac{z}{\lambda^n - z} + \frac{\frac{1}{\lambda z}}{\lambda^n - \frac{1}{\lambda z}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\left(\frac{z}{\lambda^n - z} + \frac{\frac{1}{z}}{\lambda^{n+1} - \frac{1}{z}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} - \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(\frac{\frac{1}{z}}{\lambda^n - \frac{1}{z}} - \frac{z}{\lambda^n - z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z} - \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\lambda^n\left(\frac{1}{z} - z\right)}{\lambda^{2n} - \lambda^n\left(\frac{1}{z} + z\right) + 1}. \end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, $S(z)$ – мероморфная функция в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, имеющая полюсы первого порядка в точках λ^k, $k\in\mathbb{Z}$. Поэтому в некотором кольце $A = \{1-\varepsilon < |z| < 1\}$ и круге $K = \{z \mid |1-z| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, функция S не имеет нулей, и в области $B = A\cup K$ определена аналитическая функция $\frac{1}{S}$. Поскольку функция $\frac{1}{S}$ имеет ноль первого порядка в точке $z = 1$, в области B при почти всех $t\in\mathbb{T}$, $x\in\Omega$ определена аналитическая функция

$$F(z,t,x) = \frac{V(z,t,x) + \frac{1}{1-z}}{S(z)} = \frac{\sum\limits_k U_k(t,x)z^k}{S(z)},$$

причём, поскольку вычет функции S в точке $z = 1$ равен -1, имеем

$$F(1,t,x) = 1 \tag{46}$$

при почти всех $t\in\mathbb{T}$, $x\in\Omega$. Наконец, определим коэффициенты

$$\psi_j(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1-\frac{\varepsilon}{2})\mathbb{T}}\frac{F(\zeta,t,x)d\zeta}{\zeta^{j+1}} \tag{47}$$

ряда Лорана функции F в кольце A,

$$F(z,t,x) = \sum_j \psi_j(t,x)z^j.$$

Из представления (47) следует, что функции ψ_j принадлежат граничному классу Смирнова N^+. Из (46) следует (40). Наконец, поскольку при почти всех $t\in\mathbb{T}$, $x\in\Omega$ и при всех $z\in A$ имеет место соотношение $S(z)F(z,t,x) = \sum_j U_j(t,x)z^j$, почти всюду справедливо соотношение (39). Таким образом, предложение 27 доказано.

9. Благодарность

Автор признателен своему научному руководителю С. В. Кислякову за руководство работой.

Литература

1. Fan Ky, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38** (1952), 121–126.
2. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H_p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
3. S. V. Kisliakov, Q. Xu, *Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces.* — Trans. Amer. Math. Soc. **343**, No. 1 (1994), 1–34.
4. S. V. Kisliakov, Q. Xu, *Partial retractions for weighted Hardy spaces.* — Studia Mathematica **138**, No. 3 (2000), 251–264.
5. M. Cwikel, J. E. McCarthy, T. H. Wolff, *Interpolation between weighted Hardy spaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **116**, No. 2 (1992), 381–388.
6. N. J. Kalton, *Complex interpolation of Hardy-type subspaces.* — Math. Nachr. **171** (1995), 227–258.
7. S. V. Kisliakov, *Bourgain's analytic projection revisited.* — Proc. Amer. Math. Soc. **126**, No. 11 (1998), 3307–3314.
8. S. V. Kisliakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Studia Math. **159**. No. 2 (2003), 277–289.
9. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton Univ. Press (1993).
10. Y. Benyamini, Y. Sternfeld, *Spheres in infinite-dimensional normed spaces are Lipschitz contractible.* — Proc. Amer. Math. Soc. **88**, No. 3 (1983), 439–445.
11. Г. Я. Лозановский, *О некоторых банаховых структурах.* — Сиб. мат. ж. **10** (1969), 584–599.
12. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, 1950.
13. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* БХВ-Петербург, 2004.
14. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и Анализ, **14**, No. 2 (2002), 117–135.
15. Д. В. Руцкий, *Два замечания о связи BMO-регулярности и аналитической устойчивости интерполяции для решеток измеримых функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **366** (2009), 102–115.

Rutsky D. V. Remarks on BMO-regularity and AK-stability.

This paper concerns BMO-regularity and AK-stability for couples (X, Y) of quasi-Banach lattices of measurable functions on the measure space $(\mathbb{T}, m) \times (\Omega, \mu)$, where $(\mathbb{T}, m)$ is the unit circle with Lebesgue measure. In an earlier work S. Kislyakov introduced a weaker version of BMO-regularity and conjectured that it is the same as the “strong” one in the case of couples of lattices having the Fatou property. Here we prove that these properties are indeed equivalent, thus verifying that BMO-regularity for couples is a self-dual property stable under division by a lattice. We also study another refinement of the AK-stability property and develop some techniques that allow us to slightly enlarge the class of weighted l^p-valued lattices for which AK-stability implies BMO-regularity. Finally, we discuss some points that might be relevant to the yet unanswered question about the relationship between AK-stability and BMO-regularity in general.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 16 апреля 2010 г.