Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

Н. Н. Осипов

ОДНОСТОРОННЕЕ НЕРАВЕНСТВО ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ В $\mathbb{R}^n$ ДЛЯ $0 < p \leqslant 2$

1. Формулировка основного результата и история вопроса

В 1983 г. Рубио де Франсиа (см. [1]) доказал, что при $2 \leqslant p < \infty$ справедливо неравенство

$$\Big\|\Big(\sum_m |M_{\Delta_m} f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

где Δ_m – произвольные попарно непересекающиеся интервалы на прямой $\mathbb{R}$, а $M_{\Delta_m} f = (\widehat{f}\chi_{\Delta_m})^\vee$ – соответствующие им мультипликаторы Фурье, причем константа C_p не зависит ни от функции f, ни от интервалов Δ_m. Вскоре после этого Журне (см. [2]), используя методы им же построенной теории сингулярных интегральных операторов на прямом произведении евклидовых пространств, показал, что аналогичная оценка выполняется, когда функция f задана на $\mathbb{R}^n$, а Δ_m – попарно непересекающиеся параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат.

Далее, заметим, что, используя двойственность, оценку (1) можно переписать следующим образом:

$$\Big\|\sum_m f_m\Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C_p \Big\|\{f_m\}\Big\|_{L^p(\mathbb{R},l^2)}, \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{2}$$

где $\{f_m\}$ – набор функций, таких, что $\operatorname{supp} \widehat{f_m} \subset \Delta_m$. В 2005 г. Кисляков и Парилов (см. [3]), используя теорию операторов Кальдерона–Зигмунда на классах Харди, установили, что неравенство (2) выполняется при всех $0 < p \leqslant 2$. С другой стороны, в 1985 г. Р. Фефферман (см. [4]) описал теорию, позволяющую проверять ограниченность линейных операторов на классах Харди на произведении двух

Ключевые слова: класс Харди, атомное разложение, лемма Журне, оператор Кальдерона–Зигмунда.

Поддержано РФФИ, грант No. 08-01-00358 .

евклидовых пространств $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Его методы в некотором смысле двойственны упомянутой теории Журне, который работал, в основном, в терминах пространства BMO. В 2009 г. автор (см. [5]), совместив технику Кислякова и Парилова с методами Феффермана, доказал, что аналог неравенства (2) выполняется, если Δ_m – попарно-непересекающиеся прямоугольники в $\mathbb{R}^2$ и $0 < p \leqslant 2$.

Теория Феффермана, однако, применима только к произведению двух евклидовых пространств. Тем не менее, в работе Кэрбэри и Сигера [6] описывается теория, являющаяся развитием идей Журне и Феффермана, которая позволяет рассматривать произвольное число евклидовых сомножителей. Используя ее, мы можем распространить результат работы [5] на случай произвольной размерности, то есть доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть задана последовательность функций $\{f_m\}$ такая, что $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \widehat{f}_m \subset \Delta_m$, где Δ_m – непересекающиеся параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат. Тогда при $0 < p \leqslant 2$ выполняется оценка*

$$\Big\| \sum_m f_m \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{p,n} \Big\| \{f_m\} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n, l^2)},$$

причем константа $C_{p,n}$ не зависит ни от функций, ни от прямоугольников.

Здесь индекс m пробегает счетное или конечное множество. Если m пробегает конечное множество, мы намеренно не отражаем в обозначениях, что норма в правой части вычисляется не в $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$, а в $L^p(\mathbb{R}^n, l^2_N)$ при некотором $N \in \mathbb{N}$ (формально можно считать, что конечные последовательности функций дополнены до бесконечных нулями). Мы будем поступать подобным образом и в дальнейшем, не оговаривая этого. Также необходимо заметить, что всюду в этой статье мы пользуемся следующим определением преобразования Фурье:

$$\widehat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} d\xi, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Эту работу следует рассматривать как дополнение к статье [5], так как здесь используются, по сути, те же идеи и методы. Однако вычисления в сравнении с [5] утяжеляются, и их решено было изложить отдельно в том числе и по этой причине.

2. Переход от пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ к пространству $H^p(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$

В этом параграфе мы приведем несколько утверждений, которые в дальнейшем позволят нам рассматривать класс $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leqslant 2$, вместо пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$. Здесь мы под $H^p(\mathbb{R}^n)$ понимаем многопараметрический класс Харди на произведении евклидовых пространств (строгое определение приведено ниже).

Для начала определим аналитический класс Харди $H^p_A(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1. *Рассмотрим область* $D = D_1 \times \cdots \times D_n$, *где* $D_s = \{z_s = x_s + iy_s \mid x_s, y_s \in \mathbb{R};\, y_s > 0\}$. *Будем говорить, что функция* u *(скалярно-значная или* l^2*-значная), определенная и аналитическая в этой области, принадлежит классу* $H^p_A(\mathbb{R}^n)$, *если*

$$\|u\|^p_{H^p_A} = \sup_{y_1, \dots y_n > 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)|^p dx < \infty.$$

Заметим, что вместо аналитических функций мы можем рассматривать классы функции, антианалитических по всем переменным.

Мы пишем $H^p_A(\mathbb{R}^n)$ вместо $H^p_A(D)$, отождествляя функцию u с её предельными значениями при $y = (y_1, \dots, y_n) \to 0$, причем предел понимается в смысле медленно растущих распределений. В [7, стр. 174] доказано, что для функции u из однопараметрического класса Харди (на одном евклидовом пространстве) такой предел существует и однозначно определяет эту функцию. Для функции из класса Харди на произведении нескольких евклидовых пространств это доказывается аналогично.

Теперь сформулируем лемму, которая позволит нам перейти от пространства L^p к пространству H^p_A. Для случая $n = 2$ ее доказательство можно найти в работе [5] (случай произвольного n рассматривается совершенно аналогично, поэтому доказательство мы здесь не приводим).

Лемма 1. *Пусть* Δ_m *– параллелепипеды в* $\mathbb{R}^n$ *(возможно, пересекающиеся), все точки которых имеют неотрицательные координаты, а* g_m *– функции из* $L^1(\mathbb{R}^n)$, *для которых* $\operatorname{supp} \widehat{g}_m \subset \Delta_m$, *причем функций, не равных тождественно нулю, среди них конечное число. Тогда функция* $G = \{g_m\}$ *лежит в* $H^p_A(\mathbb{R}^n, l^2)$ *и при этом* $\|G\|_{H^p_A(l^2)} \leqslant \|G\|_{L^p(l^2)}$.

Заметим, что если предположить, что все точки параллелепипедов Δ_m имеют отрицательные координаты и рассматривать антианалитические функции вместо аналитических, то лемма останется верна.

Теперь через некасательную максимальную функцию определим "вещественный" класс Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция u (скалярно-значная или l^2-значная), определенная в области D и гармоническая по каждой переменной, принадлежит классу $H^p(\mathbb{R}^n)$, если*

$$N(u)(x) = \sup_{(t,y)\in\Gamma(x)} |u(t_1 + iy_1, \ldots, t_n + iy_n)| \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

где $\Gamma(x) = \Gamma_1(x_1) \times \cdots \times \Gamma_n(x_n)$ – прямое произведение конусов $\Gamma_s(x_s) = \{(t_s, y_s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |t_s - x_s| < y_s\}$. При этом положим $\|u\|_{H_p} = \|N(u)\|_{L_p}$.

Мы снова пишем $H^p(\mathbb{R}^n)$ вместо $H^p(D)$ ввиду того, что у функции $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ существует предел при $y \to 0$ в смысле распределений, который ее полностью определяет (см. [7, стр. 174]). Далее, во избежание путаницы, мы будем обозначать предельное распределение функции $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ через f (и писать $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$). Как и в одномерном случае, если $u \in H^p_A(\mathbb{R}^n)$, то $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$, причем $\|u\|_{H^p} \leqslant C\|u\|_{H^p_A}$ (см., например, [8] или [9]). То же самое верно и для антианалитических функций.

Для функций из класса $H^p(\mathbb{R}^n)$ существует теорема об атомном разложении. Эта теорема использовалась в качестве одного из главных инструментов при построении описанной в следующем параграфе теории, которая позволяет проверять ограниченность некоторых линейных операторов на пространстве $H^p(\mathbb{R}^n)$. Если опустить детали, то теорема об атомном разложении утверждает, что если $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, то $f = \sum \lambda_k a_k$, где числа λ_k такие, что $\sum |\lambda_k|^p \leqslant C\|f\|^p_{H^p}$, а каждая из функций a_k сосредоточена на открытом множестве конечной меры. Функции a_k называются атомами и каждая из них, в свою очередь, представима в виде суммы сосредоточенных на диадических параллелепипедах функций (предатомов), у которых равно нулю определенное число моментов по каждой переменной. Для ситуации, когда $n = 2$, подробности можно посмотреть в работах [4] и [10]. Для произвольного n теорема формулируется и доказывается совершенно аналогично (см. [6]). Ключевым фактом, используемым при доказательстве атомного разложения, является то, что

$\|S_\psi(f)\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{H^p}$, где $S_\psi(f)$ – некоторая квадратичная функция, определение которой мы дадим ниже. Этот факт следует считать общеизвестным, однако доказательство его в литературе, видимо, отсутствует (из дальнейшего, впрочем, видно, что основная трудность была преодолена в работе [8]). Поэтому мы докажем его для полноты. Для начала определим квадратичную функцию $S_\psi(f)$. Пусть ψ – гладкая функция с носителем в отрезке $[-1,1]$, четная и такая, что $\int \psi(t)\,t^r = 0$ при $0 \leqslant r \leqslant N$, где число N достаточно большое (чем меньше показатель p, тем большее число моментов предполагается равным нулю). Обозначим

$$\Psi_y(x) = \prod_{s=1}^{n} \psi_{y_s}(x_s) = \prod_{s=1}^{n} \frac{1}{y_s}\psi\left(\frac{x_s}{y_s}\right).$$

Тогда квадратичная функция $S_\psi(f)$ определяется формулой

$$S_\psi(f)(x) = \left(\iint\limits_{\Gamma(x)} |(f * \Psi_y)(t)|^2 \,\frac{dtdy}{y_1^2\cdots y_n^2}\right)^{1/2}.$$

Как уже было сказано, хорошо известен (но нигде явно не проверяется) следующий факт.

Лемма 2. *Если распределение f принадлежит классу $H^p(\mathbb{R}^n)$, то квадратичная функция $S_\psi(f)$ принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}^n)$, причем*

$$\|S_\psi(f)\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{H^p}. \tag{3}$$

Доказательство. Через u будем обозначать функцию, предельным распределением которой является f. Нам понадобится интеграл площадей Лузина от функции u, который определяется по формуле

$$A(u)(x) = \left(\iint\limits_{\Gamma(x)} \left|\nabla_1 \ldots \nabla_n u(t_1 + iy_1, \ldots, t_n + iy_n)\right|^2 dtdy\right)^{1/2},$$

где $\nabla_s h = \left(\frac{\partial}{\partial t_s}h, \frac{\partial}{\partial y_s}h\right)$ (таким образом под знаком модуля стоит вектор из 2^n компонент). Мы будем использовать оценку

$$\|A(u)\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{H^p}, \tag{4}$$

доказательство которой можно найти в работах [8] или [9] (в этих работах рассматриваются классы Харди на произведении двух евклидовых пространств, однако те же методы применимы и в случае, когда число евклидовых сомножителей произвольно). Также нам потребуется обратная оценка

$$\|u\|_{H^p} \leqslant C\|A(u)\|_{L^p}, \tag{5}$$

для ситуации, когда u гармоническая функция, действующая из верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_+$ в сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, такая, что $|u(x+iy)|_{\mathcal{H}} \to 0$ при $y \to \infty$ (см. [7, стр. 161–167]).

Теперь n-кратным применением одномерной теории сингулярных интегральных операторов выведем оценку (3) из оценки (4). Для упрощения выкладок положим $n = 2$. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $u_\varepsilon(z_1, z_2) = u(z_1 + i\varepsilon, z_2 + i\varepsilon)$ и $f_\varepsilon(x_1, x_2) = u(x_1 + i\varepsilon, x_2 + i\varepsilon)$. Также обозначим $\mathcal{P}_y(x) = P_{y_1}(x_1)P_{y_2}(x_2)$, где $P_y(x) = cy/(x^2 + y^2)$ – ядро Пуассона, и докажем соотношение

$$u_\epsilon(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (f_\epsilon * \mathcal{P}_y)(x). \tag{6}$$

Заметим, что $|u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)| \leqslant Cy_1^{-1/p}y_2^{-1/p}\|u\|_{H^p}$. Действительно, так как $|u(x_1+iy_1, x_2+iy_2)| \leqslant N(u)(t_1, t_2)$ при $|x_s - t_s| < y_s$, $s = 1, 2$, то

$$|u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)|^p \leqslant \frac{C}{y_1y_2} \iint\limits_{\substack{|x_1-t_1|<y_1 \\ |x_2-t_2|<y_2}} \big(N(u)(t_1, t_2)\big)^p dt_1dt_2 \leqslant Cy_1^{-1}y_2^{-1}\|u\|^p_{H^p}.$$

Таким образом функция u_ε ограничена на D вплоть до границы и, дважды пользуясь утверждением из [11, § VII.1.2], получаем (6).

Далее, введем несколько вспомогательных гильбертовых пространств:

$$\mathcal{H}_{t_1,y_1} = L^2\Big(\Gamma_1(0), \tfrac{dt_1dy_1}{y_1^2}\Big), \quad \mathcal{H}_{t_2,y_2} = L^2\Big(\Gamma_2(0), \tfrac{dt_2dy_2}{y_2^2}\Big)$$

и

$$\mathcal{H}_{t_1,t_2,y_1,y_2} = L^2\Big(\Gamma_1(0) \times \Gamma_2(0), \tfrac{dt_1dt_2dy_1dy_2}{y_1^2y_2^2}\Big).$$

Зафиксировав x_1, определим функцию g_{x_1} со значениями в пространстве $\mathcal{H}_{t_1,y_1}$ по формуле $g_{x_1}(x_2) = \big(f_\varepsilon(\cdot,x_2)*\psi_{y_1}\big)(x_1-t_1)$. Также введем $\mathcal{H}_{t_2,y_2}$-значное ядро $K_2(x_2)=\psi_{y_2}(x_2-t_2)$. Хорошо известно, что для таких ядер выполнены условия гладкости вида

$$\big|\big(\tfrac{\partial}{\partial x_2}\big)^r K_2(x_2)\big|_{\mathcal{H}_{t_2,y_2}} \leqslant C_r|x_2|^{-1-r},$$

то есть K_2 – ядро сингулярного интегрального оператора, ограниченного в L^2 по теореме Планшереля. Воспользовавшись теорией таких операторов (см. [7, 188–192]), получим, что

$$\begin{aligned}\|S_\psi(f_\varepsilon)\|_{L^p}^p &= \iint \big|(g_{x_1}*K_2)(x_2)\big|^p_{\mathcal{H}_{t_1,t_2,y_1,y_2}}\,dx_2dx_1\\ &\leqslant C\int \|g_{x_1}*P_{y_2}\|^p_{H^p(\mathbb{R},\mathcal{H}_{t_1,y_1})}\,dx_1.\end{aligned}$$

Заметим, что $\big|(g_{x_1}*P_{y_2})(x_2)\big|_{\mathcal{H}_{t_1,y_1}} \to 0$ при $y_2\to\infty$. Действительно, нетрудно видеть, что функция f_ε лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ (это вытекает из ее ограниченности). Тогда по теореме Планшереля функция $h(x_1,x_2)=g_{x_1}(x_2)$ лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2,\mathcal{H}_{t_1,y_1})$. Значит, функция $g_{x_1}(x_2)$ лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R},\mathcal{H}_{t_1,y_1})$ при почти всех x_1. Тогда

$$\sup_{y_2>0}\int \big|(g_{x_1}*P_{y_2})(x_2)\big|^2_{\mathcal{H}_{t_1,y_1}}\,dx_2<\infty,$$

и отсюда следует, что $\big|(g_{x_1}*P_{y_2})(x_2)\big|_{\mathcal{H}_{t_1,y_1}} \leqslant Cy_2^{-1/2}$ (см. [7, 173–174]). Таким образом, мы можем воспользоваться оценкой (5):

$$\begin{aligned}&\|g_{x_1}*P_{y_2}\|^p_{H^p(\mathbb{R},\mathcal{H}_{t_1,y_1})}\\ &\qquad\leqslant C\int\Bigg(\iint\limits_{\Gamma_2(0)}\big|(g_{x_1}*\nabla_2P_{y_2})(x_2-t_2)\big|^2_{\mathcal{H}_{t_1,y_1}}\,dt_2dy_2\Bigg)^{p/2}dx_2.\end{aligned}$$

Теперь зафиксируем x_2 и определим функцию g_{x_2} со значениями в пространстве $L^2\big(\Gamma_2(0)\big)$ по формуле $g_{x_2}(x_1)=\big(f_\varepsilon(x_1,\cdot)*\nabla_2P_{y_2}\big)(x_2-t_2)$. Нам понадобится еще одно вспомогательное гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_{t_1,t_2,y_1,y_2}=L^2\Big(\Gamma_1(0)\times\Gamma_2(0),dt_2dy_2\tfrac{dt_1dy_1}{y_1^2}\Big)$$

и ядро $K_1(x_1) = \psi_{y_1}(x_1 - t_1)$. Собирая все вместе и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned}\|S_\psi(f_\varepsilon)\|^p_{L^p} &\leqslant C \iint \big|(g_{x_2} * K_1)(x_1)\big|^p_{\mathcal{H}_{t_1,t_2,y_1,y_2}} dx_1 dx_2 \\ &\leqslant C' \iint \bigg(\iint_{\Gamma_1(0)} \big|(g_{x_2} * \nabla_1 P_{y_1})(x_1 - t_1)\big|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt_1 dy_1 \bigg)^{p/2} dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Чтобы получить последнее неравенство, мы вновь воспользовались одномерной теорией сингулярных интегральных операторов и оценкой (5). Далее, пользуясь соотношением (6), получаем, что последнее выражение равно $C'\|A(u_\varepsilon)\|^p_{L^p}$, что, в свою очередь (ввиду оценки (4)), не превосходит

$$C''\|u_\varepsilon\|^p_{H^p} \leqslant C''\|u\|^p_{H^p}.$$

Так как все наши оценки равномерны по ε, то перейдя к пределу, получим то, что требуется.

Заметим, что если $f \in H^p_A(\mathbb{R}^n)$, то для доказательства оценки $\|S_\psi(f)\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{H^p_A}$ интегралы площадей Лузина не требуются. Мы можем просто заменять все H^p_A-нормы, возникающие в процессе доказательства, L^p-нормами граничных значений соответствующих функций.

Подведем итоги этого параграфа. Итак, суммируемые функции, спектр которых лежит в параллелепипедах с положительными координатами, принадлежат аналитическому классу Харди $H^p_A(\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R})$ на произведении евклидовых пространств (см. [5]). Аналитический класс Харди H^p_A лежит в "вещественном" классе Харди H^p (см. [8] или [9]). Интеграл площадей Лузина действует ограниченно из H^p в L^p (см. [8] или [9]). От интеграла площадей Лузина n-кратным применением одномерной теории сингулярных интегральных операторов (см. [7]) можем перейти к квадратичной функции $S_\psi(f)$ (если $f \in H^p_A(\mathbb{R}^n)$, то интеграл площадей Лузина не требуется). L^p-ограниченность квадратичной функции S_ψ позволяет получить атомное разложение для функций из H^p (см. [4] и [10]). Атомное разложение является одним из главных инструментов, используемых при построении теории, позволяющей проверять ограниченность некоторых линейных операторов на классах $H^p(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$ (см. следующий параграф).

3. Ограниченность линейных операторов на пространстве $H^p(\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R})$

В этом параграфе мы сформулируем один из результатов работы [6], с помощью которого можно проверять ограниченность линейных операторов на пространстве $H^p(\mathbb{R}^n)$, $0<p\leqslant 1$ (это пространство было определено в предыдущем параграфе).

Для начала введем некоторые обозначения. Рассмотрим набор индексов $\gamma\subseteq\{1,\ldots,n\}$. Через $\mathbb{R}^\gamma$ обозначим подпространство в $\mathbb{R}^n$, порождаемое единичными координатными векторами e_s, где s пробегает γ. Дополнение подмножества γ до множества $\{1,\ldots,n\}$ обозначим через γ' (таким образом, $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^\gamma\oplus\mathbb{R}^{\gamma'}$). Символом x_γ будем обзначать ортогональную проекцию вектора $x\in\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^\gamma$. Также обозначим через $\mathbb{Z}^\gamma$ ($\mathbb{N}^\gamma$) множество наборов целых (натуральных) чисел, пронумерованных индексами из множества γ. В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение 3. *Пусть a – функция из $L^2(\mathbb{R}^n)$ (скалярно-значная или l^2-значная). Будем говорить, что a – (N,p,γ)-предатом* (здесь N – *целое неотрицательное число*), *если выполняются следующие условия:*

(i) $\operatorname{supp} a\subset\Delta\times\mathbb{R}^{\gamma'}$, *где $\Delta\subset\mathbb{R}^\gamma$ – параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат,*

(ii) $\|a\|_{L^2}\leqslant|\Delta|^{1/2-1/p}$ *и*

(iii) *если $s\in\gamma$, то $\int a(x)x_s^r dx_s=0$ при $0\leqslant r\leqslant N$ и при почти всех $(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_n)$.*

Заметим, что мы можем рассматривать предатом a как функцию из пространства $L^2(\mathbb{R}^\gamma,L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))$, сосредоточенную на параллелепипеде Δ. В ситуации, когда $\gamma=\{1,\ldots,n\}$, будем говорить, что a – (N,p)-предатом.

Теперь рассмотрим оператор T, действующий ограниченно из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ (каждое из пространств $L^2(\mathbb{R}^n)$ может состоять как из скалярно-значных функций, так и из l^2-значных). Предположим, что он обладает ядром $K(x,y)$, то есть равенство

$$(Tf)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,dy$$

справедливо для любой функции $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем, если только $x\notin\operatorname{supp} f$. Далее, рассмотрим множество индексов

$\gamma \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Пусть l – набор натуральных чисел из $\mathbb{N}^\gamma$ и Δ – параллелепипед в $\mathbb{R}^\gamma$, являющийся прямым произведением отрезков I_s, $s \in \gamma$. Через Θ обозначим гладкую функцию, сосредоточенную на отрезке $[1, 4]$, такую, что

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \Theta(|t|/2^m) \equiv 1$$

на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нам понадобятся функции $\Theta_{I_s,l_s}(t) = \Theta\big(2^{-(l_s+2)}|I_s|^{-1}|t|\big)$. Через $T^\gamma_{\Delta,l}$ обозначим оператор, ядро которого определяется формулой

$$K^\gamma_{\Delta,l}(x, y) = K(x, y) \prod_{s\in\gamma} \Theta_{I_s,l_s}(x_s - y_s).$$

Для оператора $T^{\{1,\ldots,n\}}_{\Delta,l}$ будем использовать обозначение $T_{\Delta,l}$. С помощью атомного разложения в пространстве $H^p(\mathbb{R}^n)$ и различных модификаций леммы Журне о покрытиях, в [6] доказывается следующий результат.

Теорема (Кэрбэри, Сигер)**.** *Пусть оператор T такой, как описано выше (то есть ограниченный на $L^2(\mathbb{R}^n)$ и обладающий ядром). Пусть $0 < p \leqslant 1$ и $\varepsilon > 0$. Предположим, что при достаточно большом N и любом $\gamma \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant |\gamma| \leqslant n - 1$, верно, что для любого (N, p, γ)-предатома a, сосредоточенного на параллелепипеде Δ (если рассматривать его как функцию, заданную на $\mathbb{R}^\gamma$ и действующую в $L^2(\mathbb{R}^{\gamma'})$), и любого $l \in \mathbb{N}^\gamma$ выполняется оценка*

$$\|T^\gamma_{\Delta,l} a\|^p_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))} = \int\limits_{\mathbb{R}^\gamma} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |(T^\gamma_{\Delta,l} a)(x_\gamma, x_{\gamma'})|^2 dx_{\gamma'} \Bigg)^{p/2} dx_\gamma \leqslant C \prod_{s\in\gamma} 2^{-\varepsilon l_s}. \tag{7}$$

Также предположим, что при достаточно большом N и любом $1 \leqslant r \leqslant n$ верно, что для любого (N, p)-предатома b, сосредоточенного на параллелепипеде $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, и любого набора натуральных чисел $(l_1, \ldots, l_{r-1}, l_{r+1}, \ldots, l_n)$ выполняется оценка

$$\Big\| \sum_{l_r>0} T_{\Delta,l} b \Big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \prod_{s\neq r} 2^{-\varepsilon l_s}, \tag{8}$$

где $l = (l_1, \dots, l_n)$. Тогда оператор T действует ограниченно из $H^p(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что, согласно [6], достаточно рассматривать лишь предатомы, сосредоточенные на диадических параллелепипедах, но этот факт нигде нами в дальнейшем не используется, поэтому в формулировке теоремы Кэрбэри–Сигера мы сознательно его опустили.

4. Вспомогательные операторы S и R

Этот параграф является почти дословным повторением соответствующего параграфа из работы [5], в которой рассматривалась ситуация $n = 2$. Мы покажем, как свести сформулированную нами теорему к утверждениям об ограниченности двух вспомогательных операторов.

Так как все наши оценки не будут зависеть от числа параллелепипедов Δ_m, то мы можем считать, что их множество конечно. Вначале рассмотрим частный случай, когда все параллелепипеды Δ_m могут быть получены из некоторых диадических путем увеличения длин сторон в 8 раз с сохранением координат левой нижней вершины. То есть каждому параллелепипеду Δ_m мы можем сопоставить мультииндекс $(k, j) = (k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$ такой, что

$$\Delta_m = \bigl[j_1 2^{k_1}, (j_1 + 8)2^{k_1}\bigr] \times \dots \times \bigl[j_n 2^{k_n}, (j_n + 8)2^{k_n}\bigr].$$

Также предположим, что $\operatorname{supp} \widehat{f}_m \subset \frac{3}{4} \cdot \Delta_m$. Сделаем следующее техническое замечание.

Замечание. Любой параллелепипед $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ можно поместить в параллелепипед $\Delta = I_1 \times \dots \times I_n$, имеющий такой вид, как мы описали, причем так, что длины соответствующих отрезков будут сравнимы (то есть $|I_s| \asymp \bigl|[a_s, b_s]\bigr|$) и $R \subset \frac{3}{4} \cdot \Delta$.

Действительно, пусть $I_s = [j_s 2^{k_s}, (j_s + 8)2^{k_s}]$, где степень k_s такая, что $2^{k_s} \leqslant \bigl|[a_s, b_s]\bigr| < 2^{k_s+1}$ и $j_s = \sup\{j \in \mathbb{Z} \mid (j+1)2^{k_s} < a_s\}$. Нетрудно видеть, что $|I_s| \asymp \bigl|[a_s, b_s]\bigr|$ и $[a_s, b_s] \subset \frac{3}{4} \cdot I_s$. Параллелепипед $\Delta = I_1 \times \dots \times I_n$ будет искомым.

Теперь докажем теорему для описанного частного случая. Пусть $\mathcal{A}$ – множество мультииндексов, соответствующих параллелепипедам Δ_m. Пусть $h = \{h_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^{2n}} \in L^2(\mathbb{R}^n, l^2)$. Нам потребуется оператор

S, который задаётся формулой

$$S(h)(x_1,\dots,x_n) = \sum_{(k,j)\in\mathcal{A}} e^{2\pi i j_1 2^{k_1} x_1}\cdots e^{2\pi i j_n 2^{k_n} x_n}(\Phi_k * h_{k,j})(x_1,\dots,x_n),$$

где $\Phi_k(x_1,\dots,x_n)=\varphi_{k_1}(x_1)\cdots\varphi_{k_n}(x_n)$, а функции φ_{k_s}, в свою очередь, определяются так: пусть φ – функция из класса Шварца на $\mathbb{R}$ такая, что ее преобразование Фурье неотрицательно и равно нулю вне отрезка $[0,8]$ и единице на отрезке $[1,7]$, тогда $\varphi_{k_s}(t)=2^{k_s}\varphi(2^{k_s}t)$.

Лемма 3. *Оператор S действует ограниченно из $H^p(\mathbb{R}^n,l^2)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $0<p\leqslant 2$, причем оценочная постоянная зависит только от p и n.*

Доказательство этой леммы мы временно отложим. Покажем, что если она верна, то наша теорема доказана для описанного частного случая. Пусть $g_{k,j}\equiv 0$, если $(k,j)\notin\mathcal{A}$, и

$$g_{k,j}(x_1,\dots,x_n)=e^{-2\pi i j_1 2^{k_1} x_1}\cdots e^{-2\pi i j_n 2^{k_n} x_n} f_m(x_1,\dots,x_n),$$

если мультииндекс $(k,j)\in\mathcal{A}$ соответствует параллелепипеду Δ_m. Заметим, что носители преобразований Фурье ненулевых функций $g_{k,j}$ лежат в параллелепипедах

$$\tfrac{3}{4}\cdot\Delta_m-(j_1 2^{k_1},\dots,j_n 2^{k_n})=\left[2^{k_1},7\cdot 2^{k_1}\right]\times\cdots\times\left[2^{k_n},7\cdot 2^{k_n}\right].$$

Отсюда по теореме Планшереля следует, что $g_{k,j}=\Phi_k * g_{k,j}$. Обозначим $g=\{g_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^{2n}}$. Учитывая только что сказанное и пользуясь леммами 1 и 3, получаем

$$\Bigl\|\sum_m f_m\Bigr\|_{L^p}=\bigl\|S(g)\bigr\|_{L^p}\leqslant C_p\|g\|_{H^p(l^2)}\leqslant C_p'\|g\|_{L^p(l^2)}=C_p'\bigl\|\{f_m\}\bigr\|_{L^p(l^2)}.$$

Таким образом, выполняется нужная оценка.

Теперь сведем теорему к рассмотренному частному случаю. Нам потребуется еще один вспомогательный оператор. Пусть ψ – функция из класса Шварца на $\mathbb{R}$ такая, что $\widehat{\psi}\geqslant 0$ и $\operatorname{supp}\widehat{\psi}\subset[A^{-1},A]$, где $A>1$. Положим $\psi_k(t)=A^k\psi(A^k t)$, $k\geqslant 0$. Заметим, что $\operatorname{supp}\widehat{\psi}_k\subset[A^{k-1},A^{k+1}]$. Пусть $\Psi_{k_1,\dots,k_n}(x_1,\dots,x_n)=\psi_{k_1}(x_1)\cdots\psi_{k_n}(x_n)$ и $\{h_m\}\in L^2(\mathbb{R}^n,l^2)$, тогда нужный нам оператор R будет задаваться формулой

$$R(h_1,h_2,\dots)=(r(h_1),r(h_2),\dots),$$

где

$$r(h_m)=\bigl\{h_m*\Psi_{k_1,\dots,k_n}\bigr\}_{k_1,\dots,k_n=0}^{L}.$$

Лемма 4. *Оператор R действует ограниченно из $H^p(\mathbb{R}^n, l^2)$ в $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$ при $0 < p \leqslant 2$, причем оценочная постоянная не зависит от L.*

Доказательство этой леммы мы также отложим. В оставшейся части этого параграфа будет показано, как, используя оператор R, можно свести все к частному случаю, рассмотренному ранее. Это рассуждение не содержит никаких новых идей по сравнению с соответствующими рассуждениями для прямой $\mathbb{R}$ в работе [12] (хотя ситуация там была несколько иной) или для плоскости $\mathbb{R}^2$ в работе [5]. Мы наметим их и здесь исключительно для полноты.

Итак, для начала заметим, что растяжением можно добиться (без потери общности) того, чтобы длины отрезков, произведениями которых являются параллелепипеды $\Delta_m = [a_1^m, b_1^m] \times \cdots \times [a_n^m, b_n^m]$, были не меньше 1. Зафиксируем число A, достаточно близкое к единице, а функцию ψ выберем так, чтобы $\sum\limits_{k\geqslant 0} \widehat{\psi}_k(t) = 1$ при $t \geqslant 1$. Обозначив $a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$ и $\theta = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, введем функции $g_m(x) = e^{-2\pi i \langle a_m - \theta, x\rangle} f_m(x)$. "Измельчив" носители функций $\widehat{g}_m$ с помощью оператора R и сместив их обратно, получим функции $f_{m,k_1,\dots,k_n}(x) = e^{2\pi i\langle a_m - \theta, x\rangle}(g_m * \Psi_{k_1,\dots,k_n})(x)$, причем $f_m = \sum\limits_{k_1,\dots,k_n} f_{m,k_1,\dots,k_n}$ (при каждом m суммирование обрывается на конечном числе слагаемых – когда носитель функции $\widehat{\Psi}_{k_1,\dots,k_n}$ покидает параллелепипед Δ_m). Рассматривая последовательность $\{f_{m,k_1,\dots,k_n}\}$ как функцию из пространства $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$ и пользуясь леммами 1 и 4, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\big\|\{f_{m,k_1,\dots,k_n}\}\big\|_{L^p(l^2)} = \big\|R(\{g_m\})\big\|_{L^p(l^2)} \\
&\leqslant C_{p,A}\big\|\{g_m\}\big\|_{H^p(l^2)} \leqslant C'_{p,A}\big\|\{g_m\}\big\|_{L^p(l^2)} = C'_{p,A}\big\|\{f_m\}\big\|_{L^p(l^2)}.
\end{aligned}
$$

Далее, пусть N – фиксированное достаточно большое натуральное число (например, $N = 100$). Разобьем последовательность $\{f_{m,k_1,\dots,k_n}\}$ на N^n подпоследовательностей – в соответствии с остатками от деления индексов k_s на N в каждой группе (то есть при одном значении m). Учитывая сказанное выше, теорему достаточно доказать отдельно для каждой подпоследовательности. Если в такой подпоследовательности из каждой группы исключить функции, у которых максимален один из индексов k_s, то носители преобразований Фурье оставшихся функций можно поместить в непересекающиеся параллелепипеды, соответствующие частному случаю, описанному выше. Для этого нужно выбрать число A достаточно близким к единице и воспользоваться техническим *замечанием*, которое мы сделали в начале параграфа. Теперь разберемся с оставшимися функциями. Сдвинем носители их преобразований Фурье, лежащие в некоторых параллелепипедах $\delta_r = [c_1^r, d_1^r] \times \cdots \times [c_n^r, d_n^r]$, так, чтобы вершины $(d_1^r, \ldots, d_n^r)$ попали в точку $(-1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^n$, после чего применим технику, описанную выше (но работая с функциями, антианалитическими по всем переменным и с аналогом оператора R, действующим на таких функциях).

5. Ограниченность операторов S и R

Ограниченность операторов S и R на пространстве L^2 следует из теоремы Планшереля. Таким образом, согласно теореме Кэрбэри–Сигера, чтобы доказать, что рассматриваемые операторы действуют ограниченно из H^p в L^p при $0 < p \leqslant 1$, нужно проверить, что для них выполняются оценки (7) и (8). Для $1 < p < 2$ ограниченность последует из интерполяционных соображений (см., например, работу [13, стр. 451], результаты которой легко переносятся с тора на пространство $\mathbb{R}^n$).

Сначала рассмотрим оператор S. Нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого будет проведено в последнем параграфе.

Лемма 5. *Зададим последовательность функций*

$$\kappa(x,y) = \left\{\kappa_{k,j}(x,y)\right\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2} = \left\{e^{2\pi i\, 2^k j\, x}\varphi_k(x-y)\right\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2}$$

(напомним, что функции φ_k были введены нами при определении оператора S). Пусть $N \geqslant 0$ – целое число. Тогда для всякого отрезка $I \subset \mathbb{R}$ и любого натурального числа $l \geqslant 1$ найдется такая l^2-значная функция $p_{I,l}(x,y)$, являющаяся полиномом степени не выше N по y, что при всех $\xi = \{\xi_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2} \in l^2$ и всех $y \in I$ выполняется оценка

$$\left(\int\limits_{\tilde I^l} \left|\left\langle \kappa(x,y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_{I,l}(x,y), \xi\right\rangle_{l^2}\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C_N\, 2^{-lB_N}\, |I|^{-1/2}\, |\xi|_{l^2}, \tag{9}$$

причем $B_N > 1$ и $B_N \to \infty$ при $N \to \infty$. Здесь $\tilde I^l = 2^{l+10}I \setminus 2^l I$, а $\Theta_{I,l}$ – функции, определенные нами в §3.

Подобные оценки встречались в работах, посвященных одномерному случаю (см., например, [1]), однако в них пары (k,j) пробегали не все множество $\mathbb{Z}^2$, а только некоторое его подмножество $\mathcal{B}\in\mathbb{Z}^2$ такое, что $\sum\limits_{(k,j)\in\mathcal{B}}|\widehat{\varphi}_k(x-2^kj)|^2\leqslant C$. В такой ситуации последовательность $\{\kappa_{k,j}(x,y)\}_{(k,j)\in\mathcal{B}}$ оказывалась ядром некоторого оператора типа Кальдерона–Зигмунда (одномерного аналога оператора S), причем его L^2-ограниченность следовала (по теореме Планшереля) из упомянутого ограничения на множество пар (k,j). Однако, лемма 5 верна и без подобных ограничений, и именно это обстоятельство позволит нам оценить оператор S (то есть рассмотреть случай n измерений).

Построим оператор $S^{\gamma}_{\Delta,l}$ и проверим для него оценку (7). Не умаляя общности, можем считать, что $\gamma=\{1,2,\dots,r\}$, где $r\leqslant n-1$. Пусть N – достаточно большое целое число и $a=\{a_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^{2n}}$ – произвольный l^2-значный (N,p,γ)-предатом, заданный (если его рассматривать как функцию, действующую из $\mathbb{R}^{\gamma}$ в $L^2(\mathbb{R}^{\gamma'},l^2)$) на параллелепипеде $\Delta=I_1\times\dots\times I_r\subset\mathbb{R}^{\gamma}$. Пусть $l\in\mathbb{N}^{\gamma}$. Тогда $S^{\gamma}_{\Delta,l}$ – оператор, ядро которого задается формулой

$$K^{\gamma}_{\Delta,l}(x,y)$$
$$=\left\{e^{2\pi i\,2^{k_1}j_1\,x_1}\dots e^{2\pi i\,2^{k_n}j_n\,x_n}\,\Phi_k(x-y)\prod_{s=1}^{r}\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)\right\}_{(k,j)\in\mathcal{A}}.$$

Нам понадобятся некоторые вспомогательные обозначения. Пусть $k_{\gamma}=(k_1,\dots,k_r)$ и $k_{\gamma'}=(k_{r+1},\dots,k_n)$. Аналогично определим наборы j_{γ} и $j_{\gamma'}$. Пусть

$$h=\{h_{k_{\gamma'},j_{\gamma'}}\}_{k_{\gamma'},j_{\gamma'}\in\mathbb{Z}^{\gamma'}}\in L^2(\mathbb{R}^{\gamma'},l^2).$$

Определим вспомогательные операторы $S_{k_{\gamma},j_{\gamma}}$ формулой

$$S_{k_{\gamma},j_{\gamma}}(h)(x_{\gamma'})$$
$$=\sum_{k_{\gamma'},j_{\gamma'}\in\mathbb{Z}^{\gamma'}}\chi_{\mathcal{A}}(k,j)\left(\prod_{s=r+1}^{n}e^{2\pi i\,2^{k_s}j_s\,x_s}\right)(\Phi_{k_{\gamma'}}*h_{k_{\gamma'},j_{\gamma'}})(x_{\gamma'}),$$

где $k=(k_{\gamma},k_{\gamma'})$, $j=(j_{\gamma},j_{\gamma'})$ и $\Phi_{k_{\gamma'}}(x_{\gamma'})=\varphi_{k_{r+1}}(x_{r+1})\cdots\varphi_{k_n}(x_n)$. Заметим, что при фиксированных наборах k_{γ} и j_{γ} у параллелепипедов $\Delta_m=I_1^m\times\dots\times I_n^m$, соответствующих мультииндексам

$(k_\gamma, k_{\gamma'}, j_\gamma, j_{\gamma'}) \in \mathcal{A}$, будут совпадать отрезки I_s^m, $s \in \gamma$, а значит проекции $I_{r+1}^m \times \cdots \times I_n^m \in \mathbb{R}^{\gamma'}$ будут попарно непересекающимися (так как Δ_m – попарно непересекающиеся параллелепипеды). Отсюда по теореме Планшереля получаем, что операторы S_{k_γ, j_γ} ограничены на пространстве L^2. Используя эти операторы, можем написать:

$$\begin{aligned} S_{\Delta,l}^\gamma(a)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \int\limits_{\Delta} \big\langle K_{\Delta,l}^\gamma(x_\gamma, x_{\gamma'}, y_\gamma, y_{\gamma'}), a(y_\gamma, y_{\gamma'})\big\rangle dy_\gamma dy_{\gamma'} \\ &= \int\limits_{\Delta} \sum_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma} S_{k_\gamma, j_\gamma}\Big(\big\{a_{k,j}(y_\gamma, \cdot)\big\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}}\Big)(x_{\gamma'}) \\ &\times \prod_{s=1}^r e^{2\pi i\, 2^{k_s} j_s\, x_s} \varphi_{k_s}(x_s - y_s)\Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) dy_\gamma. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\big\{a_{k,j}(y_\gamma, \cdot)\big\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}}$ – набор компонент предатома a, соответствующих фиксированному подиндексу (k_γ, j_γ) и пронумерованных подиндексами $(k_{\gamma'}, j_{\gamma'})$. Зафиксировав переменную y_γ, мы применяем оператор S_{k_γ, j_γ} к этому набору, после чего выписываем те множители из ядра $K_{\Delta,l}^\gamma(x,y)$, которые не участвуют в определении операторов S_{k_γ, j_γ}. Далее будем обозначать:

$$\begin{aligned} \xi_0(x_{\gamma'}, y_\gamma) &= \big\{\xi^0_{k_\gamma, j_\gamma}(x_{\gamma'}, y_\gamma)\big\}_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma} \\ &= \Big\{S_{k_\gamma, j_\gamma}\Big(\big\{a_{k,j}(y_\gamma, \cdot)\big\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}}\Big)(x_{\gamma'})\Big\}_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma}. \end{aligned}$$

Используя это обозначение, перепишем последнее выражение в (10) так:

$$\int\limits_{\Delta} \sum_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma} \xi^0_{k_\gamma, j_\gamma}(x_{\gamma'}, y_\gamma) \prod_{s=1}^r e^{2\pi i\, 2^{k_s} j_s\, x_s} \varphi_{k_s}(x_s - y_s)\Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) dy_\gamma. \tag{11}$$

Так как у предатома a равны нулю первые N моментов по первым r переменным, то, когда мы применяем к нему оператор $S_{\Delta,l}^\gamma$, мы можем заменить множитель

$$e^{2\pi i\, 2^{k_1} j_1\, x_1} \varphi_{k_1}(x_1 - y_1)\Theta_{I_1, l_1}(x_1 - y_1)$$

из ядра $K^{\gamma}_{\Delta,l}(x,y)$ на выражение

$$e^{2\pi i\, 2^{k_1} j_1\, x_1}\varphi_{k_1}(x_1-y_1)\Theta_{I_1,l_1}(x_1-y_1)-p(x_1,y_1),$$

где $p(x_1,y_1)$ – произвольный полином по y_1, степени не выше N. Пользуясь этим, можем переписать (11) в виде

$$\int\limits_{\Delta}\sum_{\substack{k_2,\dots,k_r,\\ j_2,\dots,j_r\in\mathbb{Z}}}\Big\langle \kappa(x_1,y_1)\Theta_{I_1,l_1}(x_1-y_1)-p_{I_1,l_1}(x_1,y_1),\{\xi^0_{k_\gamma,j_\gamma}(x_{\gamma'},y_\gamma)\}_{k_1,j_1\in\mathbb{Z}}\Big\rangle$$

$$\times\prod_{s=2}^{r}e^{2\pi i\, 2^{k_s} j_s\, x_s}\varphi_{k_s}(x_s-y_s)\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)dy_\gamma. \qquad (12)$$

Здесь мы у последовательности ξ_0 зафиксировали индексы $k_2,\dots,k_r$ и $j_2,\dots,j_r$, после чего получившийся при этом набор (проиндексированный парами (k_1,j_1)) скалярно умножили на разность $\kappa\cdot\Theta_{I_1,l_1}-p_{I_1,l_1}$, где функции κ и p_{I_1,l_1} – такие, как в лемме 5, причем их компоненты также проиндексированы парами (k_1,j_1). Далее, введем последовательность ξ_1 по формуле

$$\xi_1(x_1,x_{\gamma'},y_\gamma)=\Big\{\xi^1_{k_2,\dots,k_r,j_2,\dots,j_r}(x_1,x_{\gamma'},y_\gamma)\Big\}_{\substack{k_2,\dots,k_r,\\ j_2,\dots,j_r\in\mathbb{Z}}}$$

$$=\Big\{\Big\langle\kappa(x_1,y_1)\Theta_{I_1,l_1}(x_1-y_1)-p_{I_1,l_1}(x_1,y_1),\{\xi^0_{k_\gamma,j_\gamma}(x_{\gamma'},y_\gamma)\}_{k_1,j_1\in\mathbb{Z}}\Big\rangle\Big\}_{\substack{k_2,\dots,k_r,\\ j_2,\dots,j_r\in\mathbb{Z}}}.$$

Вообще, определим r последовательностей ξ_s рекуррентными соотношениями

$$\xi_s(x_1,\dots,x_s,x_{\gamma'},y_\gamma)=\Big\{\xi^s_{k_{s+1},\dots,k_r,j_{s+1},\dots,j_r}(x_1,\dots,x_s,x_{\gamma'},y_\gamma)\Big\}_{\substack{k_{s+1},\dots,k_r,\\ j_{s+1},\dots,j_r\in\mathbb{Z}}}$$

$$=\Big\{\Big\langle\kappa(x_s,y_s)\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)-p_{I_s,l_s}(x_s,y_s),$$

$$\{\xi^{s-1}_{k_s,\dots,k_r,j_s,\dots,j_r}(x_1,\dots,x_{s-1},x_{\gamma'},y_\gamma)\}_{k_s,j_s\in\mathbb{Z}}\Big\rangle\Big\}_{\substack{k_{s+1},\dots,k_r,\\ j_{s+1},\dots,j_r\in\mathbb{Z}}}. \qquad (13)$$

Заметим, что у каждой следующей последовательности кратность меньше, чем у предыдущей, а $\xi_r(x,y_\gamma)$ – просто скалярно-значная функция. В терминах последовательности ξ_1 формула (12) переписывается так:

$$\int\limits_{\Delta}\sum_{\substack{k_2,\dots,k_r,\\ j_2,\dots,j_r\in\mathbb{Z}}}\xi^1_{k_2,\dots,k_r,j_2,\dots,j_r}(x_1,x_{\gamma'},y_\gamma)$$

$$\times\prod_{s=2}^{r}e^{2\pi i\, 2^{k_s} j_s\, x_s}\varphi_{k_s}(x_s-y_s)\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)dy_\gamma. \qquad (14)$$

Теперь повторим r раз действия, благодаря которым мы перешли от выражения (11) к выражению (14). То есть, используя множитель

$$e^{2\pi i\, 2^{k_2} j_2\, x_2}\varphi_{k_2}(x_2-y_2)\Theta_{I_2,l_2}(x_2-y_2),$$

заменим элементы последовательности ξ_1 в (14) на элементы последовательности ξ_2 и так далее. В результате получим, что

$$S^{\gamma}_{\Delta,l}(a)(x)=\int\limits_{\Delta}\xi_r(x,y_\gamma)\,dy_\gamma. \tag{15}$$

Далее будем обозначать $\widetilde{\Delta}^l=\tilde{I}_1^{l_1}\times\dots\times\tilde{I}_r^{l_r}$ (напомним, что $\tilde{I}^l=2^{l+10}I\setminus 2^lI$). Заметим, что $\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)=0$, когда $y_s\in I_s$ и $x_s\notin\tilde{I}_s^{l_s}$. Пользуясь этим, получаем, что

$$\begin{aligned}\big\|S^{\gamma}_{\Delta,l}a\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^\gamma,L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}&=\int\limits_{\widetilde{\Delta}^l}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\left|S^{\gamma}_{\Delta,l}(a)(x_\gamma,x_{\gamma'})\right|^2dx_{\gamma'}\right)^{p/2}dx_\gamma\\&\leqslant\big|\widetilde{\Delta}^l\big|^{1-p/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\int\limits_{\widetilde{\Delta}^l}\left|S^{\gamma}_{\Delta,l}(a)(x)\right|^2dx_\gamma dx_{\gamma'}\right)^{p/2}.\end{aligned}$$

Последнюю оценку мы получили, воспользовавшись неравенством Гёльдера и изменив порядок интегрирования. Далее, используя для $S^{\gamma}_{\Delta,l}(a)$ соотношение (15) и занося норму в пространстве $L^2\big(\widetilde{\Delta}^l\big)$ под знак интеграла, имеем

$$\begin{aligned}\left(\int\limits_{\widetilde{\Delta}^l}\left|S^{\gamma}_{\Delta,l}(a)(x)\right|^2dx_\gamma\right)^{1/2}&=\left(\int\limits_{\widetilde{\Delta}^l}\left|\int\limits_{\Delta}\xi_r(x,y_\gamma)dy_\gamma\right|^2dx_\gamma\right)^{1/2}\\&\leqslant\int\limits_{\Delta}\left(\int\limits_{\widetilde{\Delta}^l}|\xi_r(x,y_\gamma)|^2dx_\gamma\right)^{1/2}dy_\gamma.\end{aligned}$$

Вспоминая определение последовательностей ξ_s и используя лемму 5, приходим к оценке

$$\int\limits_{\tilde{I}_s^{l_s}} \left|\xi_s(x_1,\dots,x_s,x_{\gamma'},y_\gamma)\right|_{l^2}^2 dx_s$$
$$= \sum_{\substack{k_{s+1},\dots,k_r,\\ j_{s+1},\dots,j_r\in\mathbb{Z}}} \int\limits_{\tilde{I}_s^{l_s}} \Big|\Big\langle \kappa(x_s,y_s)\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)-p_{I_s,l_s}(x_s,y_s),$$
$$\left\{\xi^{s-1}_{k_s,\dots,k_r,j_s,\dots,j_r}(x_1,\dots,x_{s-1},x_{\gamma'},y_\gamma)\right\}_{k_s,j_s\in\mathbb{Z}}\Big\rangle\Big|^2 dx_s$$
$$\leqslant C_N\, 2^{-2l_sB_N}\, |I_s|^{-1}\left|\xi_{s-1}(x_1,\dots,x_{s-1},x_{\gamma'},y_\gamma)\right|_{l^2}^2.$$

Воспользовавшись предыдущим соотношением r раз, получаем, что

$$\int\limits_{\widetilde{\Delta}^l} |\xi_r(x,y_\gamma)|^2 dx_\gamma \leqslant C_{N,r}|\Delta|^{-1}\left|\xi_0(x_{\gamma'},y_\gamma)\right|_{l^2}^2 \prod_{s=1}^r 2^{-2l_sB_N}.$$

Собрав все вместе, а затем воспользовавшись неравенством Гёльдера и изменив порядок интегрирования, получаем:

$$\left\|S^\gamma_{\Delta,l}a\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^\gamma,L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}$$
$$\leqslant C_{N,r}\left|\widetilde{\Delta}^l\right|^{1-p/2}|\Delta|^{-p/2}\prod_{s=1}^r 2^{-pl_sB_N}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\left(\int\limits_{\Delta}|\xi_0(x_{\gamma'},y_\gamma)|dy_\gamma\right)^2 dx_{\gamma'}\right)^{p/2}$$
$$\leqslant C_{N,r}\left|\widetilde{\Delta}^l\right|^{1-p/2}\prod_{s=1}^r 2^{-pl_sB_N}\left(\int\limits_{\Delta}\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}|\xi_0(x_{\gamma'},y_\gamma)|^2 dx_{\gamma'}dy_\gamma\right)^{p/2}.$$

Вспоминая определение последовательности ξ_0 и пользуясь L^2-ограниченностью операторов S_{k_γ,j_γ}, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Delta}\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |\xi_0(x_{\gamma'},y_\gamma)|^2 dx_{\gamma'}dy_\gamma \\
&\leqslant \int\limits_{\Delta} \sum_{k_\gamma,j_\gamma\in\mathbb{Z}^\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \Big| S_{k_\gamma,j_\gamma}\Big(\big\{a_{k,j}(y_\gamma,\cdot)\big\}_{k_{\gamma'},j_{\gamma'}\in\mathbb{Z}^{\gamma'}}\Big)(x_{\gamma'})\Big|_{l^2}^2 dx_{\gamma'}dy_\gamma \\
&\leqslant \int\limits_{\Delta} \sum_{k_\gamma,j_\gamma\in\mathbb{Z}^\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \Big|\big\{a_{k,j}(y_\gamma,x_{\gamma'})\big\}_{k_{\gamma'},j_{\gamma'}\in\mathbb{Z}^{\gamma'}}\Big|_{l^2}^2 dx_{\gamma'}dy_\gamma \\
&= \|a\|_{L^2}^2 \leqslant |\Delta|^{1-2/p}
\end{aligned}
$$

Окончательно получаем, что

$$
\begin{aligned}
\big\|S^\gamma_{\Delta,l}a\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^\gamma,L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))} \leqslant C_{N,r}|\Delta|^{p/2-1}\big|\widetilde{\Delta}^l\big|^{1-p/2}\prod_{s=1}^r 2^{-pl_sB_N} \\
= C'_{N,r}\prod_{s=1}^r 2^{-l_s(p(B_N+1/2)-1)}.
\end{aligned}
$$

Так как $B_N\to\infty$ при $N\to\infty$, то выбрав достаточно большое N, получим требуемую оценку.

Осталось проверить оценку (8). Для этого достаточно доказать, что для любого l^2-значного (N,p)-предатома $b=\{b_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^{2n}}$ (при достаточно большом N), заданного на параллелепипеде $\Delta\in\mathbb{R}^n$, и любого набора $l\in\mathbb{N}^n$ выполняется оценка

$$
\big\|S_{\Delta,l}b\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\prod_{s=1}^n 2^{-\varepsilon l_s},
$$

где $\varepsilon>0$ – некоторое фиксированное число. Для этого рассмотрим последовательность $\xi_0(y)=\big\{\xi^0_{k,j}(y)\big\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^{2n}}$ такую, что те ее компоненты, индекс которых принадлежит множеству $\mathcal{A}$, совпадают с соответствующими компонентами предатома b, а остальные компоненты тождественно равны нулю. Можем написать:

$$
S_{\Delta,l}(b)(x)=\int\limits_{\Delta}\sum_{k,j\in\mathbb{Z}^n}\xi^0_{k,j}(y)\prod_{s=1}^n e^{2\pi i\,2^{k_s}j_s\,x_s}\varphi_{k_s}(x_s-y_s)\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)dy
$$

Далее, определим $r = n$ последовательностей $\xi_s(x_1, \dots, x_s, y)$ с помощью тех же рекуррентных соотношений (13) (лишь заметим, что перменная $x_{\gamma'}$ исчезает, ввиду того, что $\gamma' = \varnothing$). В точности повторив те выкладки, с помощью которых мы пришли к равенству (15) при рассмотрении операторов $S^{\gamma}_{\Delta,l}$, получим, что

$$S_{\Delta,l}(b)(x) = \int\limits_{\Delta} \xi_n(x,y)dy$$

Далее, действуя так же, как при рассмотрении операторов $S^{\gamma}_{\Delta,l}$, то есть n раз применяя лемму 5, придем к оценке

$$\left\|S_{\Delta,l}b\right\|^p_{L^p} \leqslant C_{N,n}\left|\widetilde{\Delta}^l\right|^{1-p/2} \prod_{s=1}^{n} 2^{-pl_sB_N} \left(\int\limits_{\Delta} |\xi_0(y)|^2dy\right)^{p/2}.$$

Выражение справа, в свою очередь, не превосходит

$$C_{N,n}|\Delta|^{p/2-1}\left|\widetilde{\Delta}^l\right|^{1-p/2} \prod_{s=1}^{n} 2^{-pl_sB_N} = C'_{N,n}\prod_{s=1}^{n} 2^{-l_s(p(B_N+1/2)-1)}.$$

Выбрав достаточно большое N, получим требуемую оценку.

Теперь проверим ограниченность оператора R. Его ядро Λ задается формулой

$$\Lambda(x,y) = \left\{\Psi_{k_1,\dots,k_n}(x-y)\right\}^{L}_{k_1,\dots,k_n=0}.$$

Значения этой функции суть линейные операторы из l^2 в $l^2_{\mathbb{N}^{n+1}}$, где элементы векторов из l^2 пронумерованы индексами m, а элементы векторов из $l^2_{\mathbb{N}^{n+1}}$ – мультииндексами $(m, k_1, \dots, k_n)$ (см. определение оператора R). Обозначим через ρ одномерный аналог оператора R, то есть оператор, действующий из $L^2(\mathbb{R}, l^2)$ в $L^2(\mathbb{R}, l^2_{\mathbb{N}^2})$ по формуле

$$\rho\big(\{h_m\}\big) = \{h_m * \psi_k\}_{m\in\mathbb{N},\, k=0,\dots,L}.$$

Заметим, что применить оператор R к некоторой функции от n переменных, это то же самое, что n раз последовательно применить оператор ρ к этой функции отдельно по каждой переменной при фиксированных остальных. Ядром оператора ρ является последовательность $\lambda(x,y) = \{\psi_k(x-y)\}^{L}_{k=0}$, причем выполняется следующая лемма.

Лемма 6. *Для ядра $\lambda(x,y)$ выполняется следующее условие гладкости:*

$$|\lambda(x,y)\Theta_{I,l}(x-y)-p_{I,l}(x,y)|_{l^2}\leqslant\frac{C_N|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{N+2}},\tag{16}$$

где $N\geqslant 0$, I – произвольный конечный интервал в $\mathbb{R}$, y_0 – его центр, $y\in I$, $x\notin 2\cdot I$, а $p_{I,l}(x,y)$ – некоторая l^2-значная функция, являющаяся полиномом степени не выше N по y.

Доказательство этой леммы мы также проведем в последнем параграфе. Используя ее, мы проверим ограниченность оператора R примерно так же, как мы проделали это для оператора S, причем выкладки будут значительно проще.

Снова, не умаляя общности, будем считать, что $\gamma=\{1,2,\dots,r\}$, где $r\leqslant n-1$. Пусть $a=\{a_m\}$ – произвольный l^2-значный (N,p,γ)-предатом (N – достаточно большое), заданный на параллелепипеде $\Delta=I_1\times\dots\times I_r\subset\mathbb{R}^\gamma$. Пусть $l\in\mathbb{N}^\gamma$. Мы должны проверить оценку (7) для оператора $R^\gamma_{\Delta,l}$, ядро которого задается формулой

$$\Lambda^\gamma_{\Delta,l}(x,y)=\Big\{\Psi_{k_1,\dots,k_n}(x-y)\prod_{s=1}^{r}\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)\Big\}_{k_1,\dots,k_n=0}^{L}.$$

Через $\rho^{\gamma'}$ будем обозначать $|\gamma'|$-мерный аналог оператора R, действующий по переменным x_s, $s\in\gamma'$, то есть оператор, заданный формулой

$$\rho^{\gamma'}\big(\{h_m\}\big)(x_{\gamma'})=\big\{(h_m*\Psi_{k_{r+1},\dots,k_n})(x_{\gamma'})\big\}_{k_{r+1},\dots,k_n=0,\ m\in\mathbb{N}}^{L},$$

где $h=\{h_m\}$ – функция, заданная на подпространстве $\mathbb{R}^{\gamma'}$ и $\Psi_{k_{r+1},\dots,k_n}(x_{\gamma'})=\psi_{k_{r+1}}(x_{r+1})\cdots\psi_{k_n}(x_n)$. Пользуясь тем, что у предатома a равны нулю первые N моментов по первым r переменным, в этих обозначениях получаем, что

$$(R^\gamma_{\Delta,l}a)(x)=\int\limits_{\Delta}\big(\lambda(x_1,y_1)\Theta_{I_1,l_1}(x_1-y_1)-p_{I_1,l_1}(x_1,y_1)\big)$$
$$\cdots\big(\lambda(x_r,y_r)\Theta_{I_r,l_r}(x_r-y_r)-p_{I_r,l_r}(x_r,y_r)\big)\rho^{\gamma'}\big(a(y_\gamma,\cdot)\big)(x_{\gamma'})\,dy_\gamma,\tag{17}$$

где p_{I_s,l_s} – полиномы из леммы 6. Пользуясь тем, что $\Theta_{I_s,l_s}(x_s-y_s)=0$ при $y_s\in I_s$ и $x_s\notin\tilde I_s^{l_s}$, можем написать:

$$\big\|R^\gamma_{\Delta,l}a\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^\gamma,L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}=\int\limits_{\tilde\Delta^l}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\big|R^\gamma_{\Delta,l}(a)(x_\gamma,x_{\gamma'})\big|^2_{l^2}\,dx_{\gamma'}\right)^{p/2}dx_\gamma.$$

Используя выражение (17) для оператора $R^{\gamma}_{\Delta,l}$ и r раз применяя лемму 6, приходим к оценке

$$\Big|R^{\gamma}_{\Delta,l}(a)(x_\gamma, x_{\gamma'})\Big|_{l^2} \leqslant C_N|\Delta|^{N+1}\prod_{s=1}^{r}\big|x_s - y_s^0\big|^{-(N+2)}\int\limits_{\Delta}\big|\rho^{\gamma'}\big(a(y_\gamma,\cdot)\big)(x_{\gamma'})\big|_{l^2}\,dy_\gamma.$$

Тогда

$$\big\|R^{\gamma}_{\Delta,l}a\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))} \leqslant C_{N,p}|\Delta|^{p(N+1)}\prod_{s=1}^{r}\int\limits_{\tilde I_s^{l_s}}\big|x_s - y_s^0\big|^{-p(N+2)}dx_s \times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\left(\int\limits_{\Delta}\big|\rho^{\gamma'}\big(a(y_\gamma,\cdot)\big)(x_{\gamma'})\big|_{l^2}\,dy_\gamma\right)^2 dx_{\gamma'}\right)^{p/2}.$$

Простейшие вычисления дают

$$\int\limits_{\tilde I_s^{l_s}}\big|x_s - y_s^0\big|^{-p(N+2)}dx_s = C'_{N,p}\big(2^{l_s}|I_s|\big)^{1-p(N+2)}.$$

Занеся норму в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{\gamma'})$ под знак интеграла, воспользовавшись L^2-ограниченностью оператора $\rho^{\gamma'}$ и применив неравенство Гёльдера, получим, что

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\left(\int\limits_{\Delta}\big|\rho^{\gamma'}\big(a(y_\gamma,\cdot)\big)(x_{\gamma'})\big|_{l^2}\,dy_\gamma\right)^2 dx_{\gamma'}\right)^{p/2} \leqslant \left(\int\limits_{\Delta}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\big|\rho^{\gamma'}\big(a(y_\gamma,\cdot)\big)(x_{\gamma'})\big|^2_{l^2}\,dx_{\gamma'}\right)^{1/2} dy_\gamma\right)^{p} \leqslant \left(\int\limits_{\Delta}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{\gamma'}}\big|a(y_\gamma, x_{\gamma'})\big|^2_{l^2}\,dx_{\gamma'}\right)^{1/2} dy_\gamma\right)^{p} \leqslant |\Delta|^{p/2}\|a\|^p_{L^2} \leqslant |\Delta|^{p-1}.$$

Собрав все вместе, имеем

$$\left\|R_{\Delta,l}^{\gamma} a\right\|_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p \leqslant C''_{N,p} \prod_{s=1}^{r} 2^{l_s(1-p(N+2))}$$

Выбрав достаточно большое N, получим требуемую оценку. Оценка (8) проверяется аналогично (n-кратным применением леммы 6).

6. Условия гладкости

Для завершения доказательства нам осталось проверить леммы 5 и 6. Начнем с леммы 6. Заметим, что оценка, сходная с условием (16), проверяется, например, в работе [12], однако в ту оценку не входили функции $\Theta_{I,l}$. Участие этих функций в оценке (16) делает доказательство несколько более сложным технически. Итак, пусть I – конечный интервал в $\mathbb{R}$, y_0 – его центр, $y \in I$ и $x \notin 2 \cdot I$. Пусть $p_k(x,y) = P_{x-y_0,k}^{I,l}(x-y)$, где $P_{u,k}^{I,l}$ – N-й полином Тейлора для произведения $\psi_k \Theta_{I,l}$ с центром в точке u. Тогда

$$|\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)| \leqslant c_N \sum_{\substack{0 \leqslant r,r' \leqslant N+1 \\ r+r'=N+1}} |y-y_0|^{N+1} |\psi_k^{(r)}(\tau)\Theta_{I,l}^{(r')}(\tau)|,$$

где τ – некоторая точка между $x-y$ и $x-y_0$. Поскольку функции Θ и ψ из класса Шварца, их производные убывают быстрее любой степени. Пользуясь этим, а также тем, что $|x-y| \asymp |x-y_0|$, получаем:

$$\begin{aligned} &|y-y_0|^{N+1} \left|\psi_k^{(r)}(\tau)\Theta_{I,l}^{(r')}(\tau)\right| \\ &\quad = |y-y_0|^{N+1} \left|A^{k(r+1)}\psi^{(r)}(A^k\tau) 2^{-(l+2)r'} |I|^{-r'} \Theta^{(r')}\left(2^{-(l+2)}|I|^{-1}\tau\right)\right| \\ &\leqslant C_{N,v} |y-y_0|^{N+1} A^{k(r+1)} (A^k|x-y_0|)^{-v} (|x-y_0|)^{-r'}, \quad v = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Если положить $v = 0$ и $v = r+2$, то получим две оценки:

$$|\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)| \leqslant C_N \sum_{\substack{0 \leqslant r,r' \leqslant N+1 \\ r+r'=N+1}} A^{k(r+1)} \frac{|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{r'}}, \tag{18}$$

$$|\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)| \leqslant C_N (N+2) A^{-k} \frac{|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{N+3}}. \tag{19}$$

Пользуясь оценкой (19), когда $A^k \geqslant \frac{1}{|x-y_0|}$, и оценкой (18) в остальных случаях, получим, что

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)|^2\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C'_N |I|^{N+1} \left(\sum_{k: A^k \geqslant |x-y_0|^{-1}} \frac{A^{-2k}}{|x-y_0|^{2(N+3)}} + \sum_{\substack{k: A^k < |x-y_0|^{-1} \\ 0\leqslant r,r'\leqslant N+1 \\ r+r'=N+1}} \frac{A^{2k(r+1)}}{|x-y_0|^{2r'}} \right)^{1/2}$$
$$\leqslant C''_N \frac{|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{N+2}}.$$

А это и есть оценка (16), если положить $p_{I,l}(x,y) = \{p_k(x,y)\}_{k=0}^{L}$.

Нам осталось доказать лемму 5. Утверждения, сходные с этой леммой, проверялись во многих работах, посвященных неравенству Литлвуда–Пэли (см., например, [1, 3, 5, 12]), но из-за участия в нашей оценке функций $\Theta_{I,l}$ мы формально не можем сослаться ни на одну из них. Тем не менее, доказательство, которое мы приводим ниже, является, по сути, повторением соответствующего рассуждения из работы [12].

Итак, определим функции $p_k(x,y)$ через полиномы Тейлора для произведений $\varphi_k\Theta_{I,l}$ так же, как мы делали это при доказательстве оценки (16). Ясно, что оценки (18) и (19) будут верны для функций φ_k при $A = 2$. Положим

$$p_{I,l}(x,y) = \left\{ e^{2\pi i\, 2^k j\, x} p_k(x,y) \right\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2}.$$

Также обозначим

$$r_{k,l} = \sup_{x\in\tilde{I}^l, y\in I} |\varphi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)|.$$

В этих обозначениях получаем:

$$
\begin{aligned}
&\Bigl(\int\limits_{\tilde I^l} \bigl|\langle \kappa(x,y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_{I,l}(x,y), \xi\rangle\bigr|^2 dx\Bigr)^{1/2} \\
&\leqslant \Bigl(\int\limits_{\tilde I^l} \Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)| \Bigl|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x}\Bigr|\Bigr)^2 dx\Bigr)^{1/2} \\
&\leqslant \sum_k r_{k,l} \Bigl(\int\limits_{\tilde I^l} \Bigl|\sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x}\Bigr|^2 dx\Bigr)^{1/2} \\
&\leqslant \Bigl(\sum_k r_{k,l}\Bigr)^{1/2} \Bigl(\sum_k r_{k,l} \int\limits_{\tilde I^l} \Bigl|\sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x}\Bigr|^2 dx\Bigr)^{1/2}. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались неравенством треугольника в L^2 и неравенством Коши для сумм. Далее, пользуясь оценками (18) и (19), получаем, что

$$
r_{k,l} \leqslant C_N \sum_{\substack{0\leqslant r,r'\leqslant N+1\\ r+r'=N+1}} 2^{k(r+1)}|I|^r 2^{-lr'}, \ r_{k,l} \leqslant C_N(N+2)\, 2^{-k}|I|^{-2} 2^{-(N+3)l}. \qquad (21)
$$

Используя первую оценку, когда $2^k < |I|^{-1}2^{-l}$, и вторую в остальных случаях, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\sum_k r_{k,l} \\
&\leqslant C_N \sum_{\substack{k: 2^k<|I|^{-1}2^{-l}\\ 0\leqslant r,r'\leqslant N+1\\ r+r'=N+1}} 2^{k(r+1)}|I|^r 2^{-lr'} + C'_N \sum_{k:2^k\geqslant|I|^{-1}2^{-l}} 2^{-k}|I|^{-2}2^{-(N+3)l} \\
&\qquad \leqslant C''_N 2^{-l(N+2)}|I|^{-1}.
\end{aligned}
$$

Осталось оценить второй множитель в последнем выражении в (20). Сделав замену переменной $t = 2^k x$ и воспользовавшись теоремой Рисса–Фишера, получим, что

$$
\int\limits_{2^{l+10}\cdot I} \Bigl|\sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x}\Bigr|^2 dx \leqslant
\begin{cases}
C2^{l+10}|I| \sum\limits_j |\xi_{k,j}|^2, & \text{если } 2^{l+10}|I| \geqslant 2^{-k}\\
2^{-k} \sum\limits_j |\xi_{k,j}|^2, & \text{если } 2^{l+10}|I| < 2^{-k}.
\end{cases}
$$

Пользуясь этими оценками, а также неравенствами (21), получаем:

$$\sum_k r_{k,l} \int_{\tilde{I}^l} \Big| \sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x} \Big|^2 dx$$

$$\leqslant C\, |\xi|^2_{l^2} \Bigg(\sum_{k: 2^k \geqslant |I|^{-1} 2^{-l-10}} r_{k,l} 2^{l+10}\, |I| + \sum_{k: 2^k < |I|^{-1} 2^{-l-10}} r_{k,l} 2^{-k} \Bigg)$$

$$\leqslant C_N\, |\xi|^2_{l^2} \Bigg(\sum_{k: 2^k \geqslant |I|^{-1} 2^{-l-10}} 2^{-k} 2^{-(N+2)l} |I|^{-1} + \sum_{\substack{k: 2^k < |I|^{-1} 2^{-l-10} \\ 0 \leqslant r, r' \leqslant N+1 \\ r + r' = N+1}} 2^{kr} 2^{-lr'} |I|^r \Bigg)$$

$$\leqslant C'_N\, |\xi|^2_{l^2} 2^{-(N+1)l}.$$

Таким образом, лемма 5 доказана, причем $B_N = N + 3/2$.

Литература

1. J. L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals.* — Rev. Mat. Iberoamer. **1**, No. 2 (1985), 1–14
2. Jean-Lin Journé, *Calderón–Zygmund operators on product spaces.* — Rev. Mat. Iberoamer. **1**, No. 3 (1985), 55–91.
3. С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **327** (2005), 98–114.
4. Robert Fefferman, *Calderón–Zygmund theory for product domains: H^p spaces.* — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 840–843.
5. Н. Н. Осипов, *Неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ при $0 < p \leqslant 2$.* — Алгебра и анализ **22**, No. 2 (2010), 164–184.
6. Anthony Carbery, Andreas Seeger, *H^p- and L^p-variants of multiparameter Calderón–Zygmund theory.* — Trans. Amer. Math. Soc. **334**, No. 2 (1992), 719–747.
7. C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables.* — Acta Math. **129** (1972), 137–193.
8. R. F. Gundy, E. M. Stein, *H^p theory for the poly-disc.* — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **76** (1979), 1026–1029.
9. Shuichi Sato, *Lusin functions and nontangential maximal functions in the H^p theory on the product of upper half-spaces.* — Tôhoku Math. Journ. **37** (1985), 1–13.
10. Sun-Yung A. Chang, Robert Fefferman, *A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc.* — Ann. of Math. **112**, No. 1 (1980), 179–201.
11. Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of function.* — Princeton, 1970.
12. С. В. Кисляков, *Теорема Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **355** (2008), 180–198.
13. Quanhua Xu, *Some properties of the quotient space* $(L^1(\mathbf{T}^d)/H^1(D^d))$. — Illinois J. of Math. **37**, No. 3 (1993), 437–454.

Osipov N. N. One-sided Littlewood–Paley inequality in $\mathbb{R}^n$ for $0 < p \leqslant 2$.

We prove the one-sided Littlewood–Paley inequality for arbitrary collections of mutually disjoint rectangular parallelepipeds in $\mathbb{R}^n$ for the L^p-metric, $0 < p \leqslant 2$. The paper supplements the author's earlier work, which dealt with the situation of $n = 2$. That work was based on R. Fefferman's theory, which makes it possible to verify the boundedness of certain linear operators on two-parameter Hardy spaces (i.e., Hardy spaces on the product of two Euclidean spaces $H^p(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$). However, Fefferman's results are not applicable in the situation where the number of Euclidean factors is greater than 2. Here we employ the more complicated Carbery–Seeger theory, which is a further development of Fefferman's ideas. It allows us to verify the boundedness of some singular integral operators on the multiparameter Hardy spaces $H^p(\mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n})$, which leads eventually to the required inequality of Littlewood–Paley type.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: nicknick@pdmi.ras.ru

Поступило 10 апреля 2010 г.