Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

В. А. Костин, М. Н. Небольсина

C_0-ОПЕРАТОРНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Результаты, изложенные в настоящей работе и полученные при исследовании корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка в банаховом пространстве E, являются следствием двух важных фактов из теории функций и функционального анализа.

Первый из них заключается в положительности констант c_m в разложении

$$P_{n-1}(x)P_n^{-1}(x) = \sum_{m=1}^{n} c_m/(x - x_m), \quad (x \in R^1), \tag{1}$$

где $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$ – соседние ортогональные многочлены, x_m $(m = 1, \dots, n)$ – корни многочленов $P_n(x)$ (см. [7, с. 39]).

Второй факт состоит в независимости константы K от степеней резольвенты производящего оператора C_0-полугруппы в оценке

$$\|R^n(\lambda, A)\| \le K/(\lambda - \omega)^n, \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{2}$$

где $\lambda > \omega$, ω – тип полугруппы (см. [2, с. 268]).

Это позволяет определить операторную дробь

$$P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A) = \sum_{m=1}^{n} c_m R(x_m, A), \tag{3}$$

в предположении, что x_m принадлежит резольвентному множеству оператора A, и с помощью соотношений (1)–(3) при $m < n$ получить оценку

$$\big\|P_m(A)P_n^{-1}(A)\big\| \le K\big|P_m(\omega)/P_n(\omega)\big|,$$

Ключевые слова: операторные многочлены Чебышева, C_0-полугруппа, генератор.

где K и ω из неравенства (2).

Указанные свойства позволяют строить операторные многочлены Чебышева $T_n(A)$ и $U_n(A)$ $(n = 0, 1, \dots)$ 1-го и 2-го рода, соответственно, с помощью рекуррентных соотношений

1. $T_{n+1}(A) = 2AT_n(A) - T_{n-1}(A), \quad T_0(A) = I, \quad T_1(A) = A;$ (4)
2. $U_{n+1}(A) = 2AU_n(A) - U_{n-1}(A), \quad U_0(A) = I, \quad U_1(A) = 2A;$ (5)

эти функции мы называем здесь C_0-операторными ортогональными многочленами Чебышева. Отметим, что матричные многочлены Чебышева с других позиций рассматривались в работе [12]. В соответствии с [5], для оператора A, действующего в банаховом пространстве E, определены все степени A^n $(n = 1, 2, \dots)$ с плотными в E областями определения $D(A^n)$, превращающимися в банаховы пространства D_n относительно норм $\|u\|_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \|A^k u\|$.

При этом множество $D_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ является пространством Фреше относительно счетной системы норм $\|u\|_n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Замыкание множества D_∞ в норме пространства D_n совпадает с D_n. Оператор A_∞ (сужение оператора A на D_∞) действует и непрерывен в пространстве D_∞.

Замыкание в E оператора $(A_\infty)^n$ совпадает с A^n. Таким образом, операторы $T_n(A)$ и $U_n(A)$ определены и замкнуты на D_n, и для них определены операторные дроби

$$\nu_n(A) = T_{n-1}(A) T_n^{-1}(A),$$

$$\mu_n(A) = U_{n-1}(A) U_n^{-1}(A),$$

являющиеся ограниченными в E операторами с оценками

$$\|\nu_n(A)\| \leq K |T_{n-1}(\omega)/T_n(\omega)|,$$

$$\|\mu_n(A)\| \leq K |U_{n-1}(\omega)/U_n(\omega)|.$$

Дальнейшее изучение свойств операторов $T_n(A)$ и $U_n(A)$ приводит к построению функций $\sqrt{A^2 - I}x$ для $x \in D(A)$ и $(A^2 - I)^{-1/2}x$ для $x \in$

E. Это позволяет получить представление операторных полиномов Чебышева в виде

$$T_n(A) = \frac{1}{2}\left[(\mu^{-1}(A))^n + (\mu(A))^n\right],$$
$$U_n(A) = \frac{1}{2}\left(A^2 - I\right)^{-\frac{1}{2}}\left[(\mu^{-1}(A))^{n+1} - (\mu(A))^{n+1}\right],$$

где

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = (A - \sqrt{A^2 - I}),$$
$$\mu^{-1}(A) = 2A - \mu(A), \quad \mu^{-1}(A)\mu(A)x = x, \quad x \in D(A).$$

Оператор $\mu(A)$ ограничен в E и для него справедлива оценка

$$\|(\mu(A))^n\| \le K\left(\omega - \sqrt{\omega^2 - 1}\right)^n, \quad \omega > 1,$$

где K – константа из (2). Кроме того, для $(\mu(A))^n$ имеет место представление

$$\left(\mu(A)\right)^n = \int\limits_0^\infty I_1^{[n]}(t)V(t)dt,$$

где $I_1^{[n]}(t)$ – n-кратная свертка функции Бесселя первого порядка мнимого аргумента, а $V(t)$ – полугруппа, генерируемая оператором A, удовлетворяющая оценке

$$\|V(t)\| \le Ke^{-\omega t}.$$

1. Ортогональные многочлены скалярного аргумента

Пусть $J = (a, b)$ – некоторый интервал, конечный или бесконечный. Применяя метод ортогонализации по Шмидту к функциям $f_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ с весом $\rho(x)$, как известно (см. [6, с. 610]), получим систему многочленов $\{P_n(x)\}$, нормированную и ортогональную на (a, b) с весом $\rho(x)$, при этом каждый многочлен имеет степень n.

Ортогональные многочлены обладают следующими важными свойствами.

1. Многочлен $P_n(x)$ на интервале (a, b) имеет в точности n различных корней.

2. Корни многочленов $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$ взаимно разделяются, то есть, если $\{x_i\}_{i=1}^{n}$– корни многочлена $P_n(x)$, а $\{\tau_i\}_{i=1}^{n+1}$ – корни многочлена $P_{n+1}(x)$, то

$$\tau_1 < x_1 < \tau_2 < x_2 < \cdots < x_n < \tau_{n+1}.$$

3. Корни многочленов $\{P_n(x)\}$ и $\{P'_n(x)\}$ взаимно разделены.

Весьма существенно в приложениях следующее свойство.

4. Если $x_m^{(n)}$ – корни многочлена $P_n(x)$, то в разложении

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{c_m}{x - x_m^{(n)}} \tag{1.1}$$

все числа $c_m = \frac{P_{n-1}(x_m^{(n)})}{P'_n(x_m^{(n)})}$ строго положительны.

Основные результаты статьи формулируются в терминах ортогональных многочленов Чебышева 1-го и 2-го рода. Поэтому мы укажем некоторые необходимые их свойства.

1. *Многочлены Чебышева первого рода* $\{T_n(x)\}$, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n - T_{n-1}(x), \\ T_0 &= 1, \\ T_1(x) &= x. \end{aligned}$$

Для них справедливы представления

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos n \arccos x, & |x| \leqslant 1; \\ T_n(x) &= \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right], & |x| > 1. \end{aligned}$$

2. *Многочлены Чебышева второго рода* $\{U_n(x)\}$, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весом

$$\rho(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \\ U_0 &= 1, \\ U_1(x) &= 2x. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Справедливы представления

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2^n(n+1)!}{(2n+1)!} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n], \quad |x| \leqslant 1, \\ U_n(x) &= \frac{[(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}]}{2\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Многочлены Чебышева 1-го и 2-го рода связаны соотношением

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{dT_{n+1}(x)}{dx}.$$

Далее, рассмотрим трехдиагональную якобиеву матрицу

$$M_n = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$.

Известно, что характеристические многочлены $D_n(\lambda) = \det[M_n - \lambda I]$ (где I – тождественная матрица) являются ортогональными многочленами по λ с некоторым весом.

Легко видеть, что характеристический полином $D_n(\lambda)$ связан с полиномами

$$D_k(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1-\lambda & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1 & a_2-\lambda & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{k-1} & a_k-\lambda \end{vmatrix}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n;\ D_0 = 1)$ рекуррентной формулой

$$D_k(\lambda) = (a_k - \lambda) D_{k-1}(\lambda) - b_{k-1} c_{k-1} D_{k-2}(\lambda).$$

Далее, положим

$$D^{(k)}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_k - \lambda & -b_k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -c_k & a_{k+1} - \lambda & -b_{k+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -c_{n-1} & a_n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Таким образом, величины $D_k(\lambda)$ являются левыми верхними минорами матрицы $M_n - \lambda I$, а величины $D^{(k)}(\lambda)$ – правыми нижними.

Справедлива теорема М. Г. Крейна (см. [3]) о том, что корни полинома $D_n(\lambda)$ отделяют совокупности корней полиномов $D_{k-1}(\lambda)$ и $D^{(k+1)}(\lambda)$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, то есть корни многочлена $D_{k-1}(\lambda) \cdot D^{(k+1)}(\lambda)$ взаимно разделяются с корнями многочлена $D_n(\lambda)$.

Отсюда следует формула, аналогичная формуле (1.1):

$$\frac{D_{k-1}(\lambda) D^{(k+1)}(\lambda)}{D_n(\lambda)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\nu_m}{\lambda - \lambda_m}, \tag{1.4}$$

где $\nu_m > 0$.

В соответствии с [1, 3, 10], через полиномы $D^{(k)}(\lambda)$ и $D_k(\lambda)$ выражаются коэффициенты матрицы $(M_n - \lambda I)^{-1}$, обратной к матрице $(M_n - \lambda I)$, по формуле

$$\gamma_{i,k}^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{m=i}^{k-1} c_m D_{i-1}(\lambda) D^{(k)}(\lambda)}{D_n(\lambda)}, & i \leqslant k, \\[2ex] \dfrac{\prod\limits_{m=k}^{i-1} b_m D_{k-1}(\lambda) D^{(i)}(\lambda)}{D_n(\lambda)}, & i > k. \end{cases} \tag{1.5}$$

2. C_0-операторные ортогональные многочлены и C_0-операторные рациональные дроби

Пусть A – производящий оператор полугруппы $V(t)$ класса C_0, действующей в банаховом пространстве E и удовлетворяющей оценке

$$\|V(t)\| \leqslant K \exp(\omega t) \quad (t \geqslant 0). \tag{2.1}$$

Это означает (см. [2, с. 262]), что A линеен и замкнут. Его область определения $D(A)$ плотна в E и для степеней резольвенты $R(\lambda, A) = (A-\lambda I)^{-1}$ справедливы оценки

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leq K/(\lambda-\omega)^n, \tag{2.2}$$

где $\lambda > \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, константа K не зависит от $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, семейство ограниченных при каждом $t > 0$ операторов $V(t)$ сильно непрерывно по t и удовлетворяет условиям:

1) $V(t)V(s) = V(t+s) \quad (t, s > 0)$;
2) $\lim\limits_{t\to 0+} \|V(t)\varphi - \varphi\| = 0$ при любом $\varphi \in E$;
3) $\frac{d}{dt}V(t)\varphi = A\varphi$, $\varphi \in D(A)$;
4) $\|V(t)\| \leq Ke^{\omega t}$; здесь константы K и ω из (2.2);
5) справедливо представление

$$R(\lambda, A) = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} V(t)dt.$$

Как известно (см. [5]), для таких операторов определён квадрат A^2 с областью определения $D(A^2)$, состоящей из всех $\varphi \in E$, для которых $\varphi \in D(A)$ и $A\varphi \in D(A)$, при этом полагают $A^2\varphi = A(A\varphi)$. Область определения $D(A^2)$, вообще говоря, уже, чем $D(A)$.

Аналогично определяется оператор A^n с помощью равенства $A^n\varphi = A(A^{n-1}\varphi)$ для тех $\varphi \in D(A^{n-1})$, для которых $A^{n-1}\varphi \in D(A)$.

Если $\varphi \in D(A^n)$ и $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^n a_k x^k$ – многочлен степени не выше n, то положим $P_n(A)\varphi = \sum\limits_{k=0}^n a_k A^k \varphi$, и будем говорить, что *операторный многочлен* $P_n(A)$ *порожден скалярным многочленом* $P_n(x)$.

Важно отметить, что если оператор A замкнут и имеет хотя бы одну регулярную точку (такие операторы называются регулярными), то оператор $P_n(A)$ замкнут; если при этом область определения $D(A)$ плотна в E, то и пространства $D(A^n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ плотны в E; спектр $\Lambda(A)$ оператора $P_n(A)$ совпадает с множеством $P_n(\Lambda(A))$.

Для замкнутого оператора A область определения $D(A^n)$ превращается в банахово пространство D_n относительно нормы $\|\varphi\|_n = \sum\limits_{k=0}^n \|A^k\varphi\|$. Множество $D_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^\infty D(A^n)$ можно рассматривать как пространство Фреше относительно счетной системы норм $\|\cdot\|_n$ ($n = 1, 2, \dots$). В случае регулярного оператора A совпадают следующие три объекта: замыкание в E сужения оператора A^n на D_∞, замыкание в E оператора $(A_\infty)^n$ и степень A^n (см. [5]).

Так как генератор полугруппы класса C_0 регулярный, то для него можно построить многочлены $P_n(A)$ любой степени $n = 0, 1, \dots$ на плотном в E множестве D_∞. Исходя из этого, дадим следующее определение.

Определение 2.1. *Пусть A – генератор C_0-полугруппы, тогда многочлены $P_n(A)$, порожденные соответствующими скалярными ортогональными многочленами $P_n(x)$, будем называть C_0-операторными ортогональными многочленами.*

Рассмотрим матрицу вида

$$M_n(A) = \begin{bmatrix} a_1I - A & -c_1I & 0 & \dots & 0 \\ -b_1I & a_2I - A & -c_2I & \dots & 0 \\ 0 & -b_2I & a_3I - A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_nI - A \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

где I – тождественный оператор в E.

Изучение таких матриц важно, например, при решении краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка разностными методами (см. [1]). Очевидно, что $M_n(A)$ – линейный оператор, действующий в произведении пространств $E^n = E \times E \times \dots \times E$.

Нас будет интересовать обратимость этой матрицы. При исследовании этого вопроса нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – последовательность вещественных точек из резольвентного множества оператора A и $\lambda_i > \omega$ ($i = 1, 2, \dots k$), тогда справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{i=1}^{k} R(\lambda_i, A) \right\| &= \|R(\lambda_1, A) R(\lambda_2, A) \dots R(\lambda_k, A)\| \\ &\leqslant \frac{K}{\prod\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i - \omega)}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где константы K и ω те же, что и в неравенствах (2.1), (2.2).

Доказательство. Пользуясь полугрупповым свойством $V(t+s) = V(t)V(s)$ и формулой (2.2), имеем

$$\prod_{i=1}^{k} R(\lambda_i, A) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\Big(-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j t_j\Big) \prod_{i=1}^{k} V(t_i) dt_1 \ldots dt_k$$
$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\Big(-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j t_j\Big) V\Big(\sum_{i=1}^{k} t_i\Big) dt_1 \ldots dt_k.$$

Отсюда и из (2.1) получаем

$$\Big\| \prod_{i=1}^{k} R(\lambda_i, A) \Big\| \leqslant K \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\Big(-\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \omega) t_i\Big) dt_1 \ldots dt_k$$
$$= \frac{K}{\prod\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i - \omega)}. \qquad \square$$

Теперь для матрицы (2.3) введем систему левых верхних операторных миноров $\det M_k(A) = P_k(A)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ следующим рекуррентным соотношением:

$$P_k(A) = (a_k - A) P_{k-1}(A) - b_{k-1} c_{k-1} P_{k-2}(A),$$
$$P_1(A) = 0, \quad P_0(A) = I.$$

Из свойств оператора A следует (см. [5]), что области определения операторов $D_k(A)$ плотны в E и для $x \in D(A^n)$ имеет место коммутативность

$$P_m(A) P_k(A) x = P_k(A) P_m(A) x, \quad (x \in D(A)).$$

Аналогично вводятся и правые нижние операторные миноры

$$P^{(k)}(A) = a_k P^{(k+1)}(A) - b_k c_k P^{(k+2)}(A),$$
$$P^{(n+1)}(A) = I,$$
$$P^{(n+2)}(A) = 0.$$

Теперь пусть $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ – система ортогональных многочленов и $\mu_m > 0$ $(m = 1, \ldots, k)$ – коэффициенты в разложении вида (1.1), то есть

$$\frac{P_{k-1}(x)}{P_k(x)} = \sum_{m=1}^{k} \frac{\mu_m}{x - \lambda_m}, \tag{2.5}$$

где λ_m – корни многочлена $P_k(x)$.

Определим операторную дробно-рациональную функцию $P_{k-1}(A)P_k^{-1}(A)$ по формуле

$$P_{k-1}(A)P_k^{-1}(A) = \sum_{m=1}^{k} \mu_m R(\lambda_m, A) = \sum_{m=1}^{k} \mu_m (A - \lambda_m I)^{-1}. \tag{2.6}$$

Естественно предполагать, что корни многочлена $P_k(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A.

Очевидно, что из (2.6) следует коммутативность

$$P_{k-1}(A)P_k^{-1}(A) = P_k^{-1}(A)P_{k-1}(A)$$

на элементах из $D(A^k)$.

Лемма 2.2. *Пусть A – производящий оператор полугруппы $V(t)$ класса C_0, ω – тип полугруппы, и пусть $P_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ – система ортогональных многочленов на некотором интервале (a, b). Тогда, если $a \geqslant \omega$, то операторы $P_{k-1}(A)P_k^{-1}(A)$ ограничены и имеет место неравенство*

$$\|P_{k-1}(A)P_k^{-1}(A)\| \leqslant K \left| \frac{P_{k-1}(\omega)}{P_k(\omega)} \right|. \tag{2.7}$$

Доказательство. Так как A – генератор C_0-полугруппы, то, пользуясь формулой (2.2) при $n = 1$ и тем, что все корни $\{x_m\}_{m=1}^k$ многочлена $P_k(x)$ принадлежат интервалу (a, b) и, следовательно $x_m > a \geqslant \omega$, имеем оценку

$$\|R(x_m, A)\| \leqslant \frac{K}{(x_m - \omega)}. \tag{2.8}$$

Теперь, пользуясь соотношениями (2.8) и (2.5) и положительностью коэффициентов μ_m, напишем

$$\|P_{k-1}(A)P_k^{-1}(A)\| \leqslant \sum_{m=1}^{k} \mu_m \|R(x_m, A)\| \leqslant K \sum_{m=1}^{k} \frac{\mu_m}{x_m - \omega}$$
$$= K \left| \sum_{m=1}^{k} \frac{\mu_m}{\omega - x_m} \right| = K \left| \frac{P_{k-1}(\omega)}{P_k(\omega)} \right|. \qquad \square$$

Следствие. *При $m < n$ верно неравенство*

$$\|P_m(A)P_n^{-1}(A)\| \leqslant K \left| \frac{P_m(\omega)}{P_n(\omega)} \right|, \tag{2.9}$$

где константа K та же, что и в (2.1).

Доказательство следует из тождества

$$P_m(A)P_n^{-1}(A) = \prod_{j=m+1}^{n} P_{j-1}(A)P_j^{-1}(A) = \prod_{j=m+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j} \mu_k^{(j)} R(x_k^{(j)}) \right)$$
$$= \left[\mu_1^{(m+1)} R(x_1^{(m+1)}) + \mu_2^{(m+1)} R(x_2^{(m+1)}) + \dots + \mu_{m+1}^{(m+1)} R(x_{m+1}^{(m+1)})\right]$$
$$\times \left[\mu_1^{(m+2)} R(x_1^{(m+2)}) + \mu_2^{(m+2)} R(x_2^{(m+2)}) + \dots + \mu_{m+2}^{(m+2)} R(x_{m+2}^{(m+2)})\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\times \left[\mu_1^{(n)} R(x_1^{(n)}) + \mu_2^{(n)} R(x_2^{(n)}) + \dots + \mu_n^{(n)} R(x_n^{(n)})\right].$$

Раскрывая скобки в правой части этого тождества, получаем сумму, состоящую из слагаемых вида

$$S = \mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_n} R(x_{i_1}, A) R(x_{i_2}, A) \dots R(x_{i_n}, A),$$

где $\mu_{i_j} > 0$, а x_{i_j} – корни соответствующего многочлена, удовлетворяющие неравенству $x_{i_j} > \omega$.

Каждое из этих слагаемых в силу (2.4) допускает оценку

$$\|S_n\| \leqslant K \frac{\mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_n}}{(x_{i_1} - \omega)(x_{i_2} - \omega)\dots(x_{i_n} - \omega)}, \tag{2.10}$$

пользуясь которой так же, как и в случае доказательства неравенства (2.7), получаем (2.9). $\square$

Аналогично, пользуясь формулой (2.6), введём операторные дробно-рациональные функции вида

$$P_{k-1}(A)P^{(k+1)}(A)P_n^{-1}(A);$$

для них справедлива оценка

$$\left\|P_{k-1}(A)P^{(k+1)}(A)P_n^{-1}(A)\right\| \leqslant K\left|\frac{P_{k-1}(\omega)P^{(k+1)}(\omega)}{P_n(\omega)}\right|. \qquad (2.11)$$

Теперь по аналогии с (1.5) определяются коэффициенты операторной матрицы $M_n^{-1}(A)$ формулами

$$\gamma_{i,k}^{(n)}(A) = \begin{cases} \prod\limits_{m=i}^{k-1} c_m P_{i-1}(A)P^{(k)}(A)P_n^{-1}(A), & i \leqslant k; \\ \prod\limits_{m=k}^{i-1} b_m P_{k-1}(A)P_n^{(i)}(A)P_n^{-1}(A), & i > k. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Применяя в (2.12) оценки (2.8) и (2.11), получаем неравенство

$$\|\gamma_{i,k}^{(n)}(A)\| \leqslant K|\gamma_{i,k}^{(n)}(\omega)|. \qquad (2.13)$$

3. Обращение бесконечных трехдиагональных матриц специального вида (скалярный случай)

Рассмотрим пока формально матрицу бесконечного порядка вида

$$M(A) = \begin{bmatrix} 2A & -I & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -I & 2A & -I & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -I & 2A & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \qquad (3.1)$$

где A – генератор полугруппы класса C_0, действующий в банаховом пространстве E, I – тождественный оператор в E.

Как и в случае матриц конечного порядка, нас интересует вопрос обращения этих матриц как операторов, действующих в пространствах последовательностей $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i \in E$, суммируемых со степенью $p \geq 1$. При этом, как и ранее, мы рассмотрим сначала матрицу

(3.1), где $A = x \in R^1$. То есть

$$M(x) = \begin{bmatrix} 2x & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 2x & -1 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2x & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Наряду с этим рассмотрим также последовательность матриц конечного порядка n,

$$M_n(x) = \begin{bmatrix} 2x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что главные миноры этой матрицы удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} D_{n+1}(x) &= 2xD_n(x) - D_{n-1}(x), \\ D_0 &= I, \\ D_1(x) &= 2x. \end{aligned}$$

и, следовательно, в соответствии с (1.2) являются многочленами Чебышева 2-го рода.

Очевидно, что и правые нижние миноры этой матрицы $D^{(n-k)}(x)$ также являются многочленами Чебышева $U_{n-k}(x)$.

Отсюда, по формуле (1.5), мы имеем следующее представление для коэффициентов обратной матрицы $M_n^{-1}(x)$:

$$\gamma_{i,k}^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{U_{i-1}(x)U_{n-k}(x)}{U_n(x)}, & i \leqslant k \\[2ex] \dfrac{U_{k-1}(x)U_{n-i}(x)}{U_n(x)}, & i > k. \end{cases} \tag{3.2}$$

Будем искать коэффициенты матрицы $M^{-1}(x)$ в виде

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{i,k}^{(n)} = \gamma_{i,k}. \tag{3.3}$$

Покажем, что пределы (3.3) существуют при любых i и k. Учитывая представление (1.3) для многочленов $U_n(x)$, имеем, в случае $|x| > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1}(x)}{U_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n}{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = x - \sqrt{x^2-1} = \mu(x).$$

Заметим, что при $x > 1$ справедливы неравенства $0 < \mu(x) < 1$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-k}(x)}{U_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1}(x)}{U_n(x)} \cdot \frac{U_{n-2}(x)}{U_{n-1}(x)} \cdots \frac{U_{n-k}(x)}{U_{n-k+1}(x)}$$
$$= (x-\sqrt{x^2-1})^k = \mu^k(x).$$

Таким образом, пределы (3.3) существуют и в силу (3.2) мы имеем равенства

$$\gamma_{i,k}(x) = \begin{cases} U_{i-1}(x)\mu^k(x), & i \leqslant k, \\ U_{k-1}(x)\mu^i(x), & i > k \end{cases} \tag{3.4}$$

Соотношение

$$M(x)\mathcal{M}(x) = I,$$

где $\mathcal{M}$ – это матрица с элементами $\gamma_{i,k}(x)$, показывается прямым перемножением матриц.

Представление (3.4) также можно было получить, используя формулы (1.2.24)–(1.2.26) из [11].

При $x > 1$ оценим норму матрицы $M^{-1}(x)$ в пространствах ограниченных последовательностей $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{n\in N} |\varphi_n|.$$

В этом случае норма матрицы M^{-1} имеет вид

$$\|M^{-1}\| = \sup_{k\in N} \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_{ik}|.$$

Используя представление (3.4), проведем вычисления:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{ik} &= \sum_{i=1}^{k}\gamma_{ik} + \sum_{i=k+1}^{\infty}\gamma_{ik} = \mu^k\sum_{i=1}^{k}U_{i-1} + U_{k-1}\sum_{i=k+1}^{\infty}\mu^i \\
&= \mu^k\sum_{i=1}^{k}U_{i-1} + \frac{U_{k-1}\mu^{k+1}}{1-\mu} \\
&= \frac{\mu^k}{1-\mu}\left[\sum_{i=1}^{k}U_{i-1} - \mu\sum_{i=1}^{k}U_{i-1} + \mu U_{k-1}\right] \\
&= \frac{\mu^k}{1-\mu}\left[\sum_{i=1}^{k}U_{i-1} - \mu\sum_{i=1}^{k-1}U_{i-1}\right] \\
&= \frac{\mu^k}{2(1-\mu)\sqrt{x^2-1}}\left[\sum_{i=1}^{k}(\mu^{-i}-\mu^i) - \mu\sum_{i=1}^{k-1}(\mu^{-i}-\mu^i)\right] \\
&= \frac{(1+\mu)(1-\mu^k)}{2(1-\mu)\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{ik} = \frac{(1+\mu)(1-\mu^k)}{2(1-\mu)\sqrt{x^2-1}}. \tag{3.5}
$$

откуда, переходя в (3.5) к верхней грани по $k \in N$, получаем

$$
\|M^{-1}(x)\|_1 = \sup_{k\in N}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{ik}(x) = \frac{(1+\mu)}{2(1-\mu)\sqrt{x^2-1}}. \tag{3.6}
$$

Так как матрица $M^{-1}(x)$ – симметричная, то справедливо также равенство

$$
\|M^{-1}(x)\|_2 = \sup_{i\in N}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{ik}(x) = \frac{(1+\mu)}{2(1-\mu)\sqrt{x^2-1}}. \tag{3.7}
$$

Как известно, норма (3.7) является нормой матрицы $M^{-1}(x)$ как оператора в пространстве суммируемых последовательностей. Но тогда из равенств (3.6), (3.7) и интерполяционной теоремы М. Рисса–Торина получается такое утверждение.

Теорема 3.1. *Матрица $M^{-1}(x)$ при $|x|>1$ является ограниченным оператором, действующим в пространстве последовательностей суммируемых функций со степенью $p \geqslant 1$, и для нее справедлива оценка*

$$\|M^{-1}(x)\|_p \leq \frac{(1+\mu)}{2(1-\mu)\sqrt{x^2-1}}. \tag{3.8}$$

4. Обращение операторных матриц бесконечного порядка

Теперь, приступая к обращению операторной матрицы (3.1), укажем следующие свойства C_0-ортогональных многочленов Чебышева, определенных формулами (4) и (5).

Лемма 4.1. *Справедливо тождество*

$$U_{m+1}(A)U_{m+k}(A) - U_{m+k+1}(A)U_m(A) = U_{k-1}(A). \tag{4.1}$$

Доказательство. Пользуясь в левой части формулы (4.1) равенством (5) для $U_{m+k+1}(A)$, имеем

$$\begin{aligned} &U_{m+1}(A)U_{m+k}(A) - U_m(A)[2AU_{m+k}(A) - U_{m+k-1}(A)] \\ =&U_m(A)U_{m+k-1}(A) - U_{m+k}(A)[2AU_m(A) - U_{m+1}(A)] \\ =&U_m(A)U_{m+k-1}(A) - U_{m+k}(A)U_{m-1}(A). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Отсюда, после применения равенства (4.2) последовательно $m-1$ раз, получаем (4.1). □

Лемма 4.2. *Справедливо тождество*

$$\begin{aligned} &U_{n-k+1}(A)U_{n+1}^{-1}(A) - U_{n-k}(A)U_n^{-1}(A) \\ &\quad = U_{k-1}(A)U_{n+1}^{-1}(A)U_n^{-1}(A). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Доказательство. Замена $n-k=m$ в левой части формулы (4.3) дает следующее:

$$\begin{aligned} &U_{m+1}(A)U_{m+k+1}^{-1}(A) - U_m(A)U_{m+k}^{-1}(A) \\ &\quad = U_{m+k}^{-1}(A)U_{m+k+1}^{-1}(A)[U_{m+1}(A)U_{m+k}(A) - U_m(A)U_{m+k+1}(A)] \\ &\quad = U_{m+k}^{-1}(A)U_{m+k+1}^{-1}(A)U_{k-1}(A) = U_{k-1}(A)U_{n+1}^{-1}(A)U_n^{-1}(A). \end{aligned}$$ □

Лемма 4.3. *При $n \to \infty$ последовательность ограниченных операторов $U_{n-1}(A)U_n^{-1}(A)$ сходится по норме к некоторому оператору $\mu(A)$, для которого справедлива оценка*

$$\|\mu(A)\| \leqslant K\mu(|\omega|),$$

где ω – тип полугруппы, $|\omega| > 1$, а константа K взята из неравенства (2.2).

Доказательство. Из (2.11) имеем оценку

$$\left\|U_{n-k}(A)U_{i-1}(A)U_n^{-1}(A)\right\| \leqslant K\left|\frac{U_{n-k}(\omega)U_{i-1}(\omega)}{U_n(\omega)}\right|.$$

Далее, пользуясь тождеством (4.3), оценим фундаментальную последовательность при $n > k \geqslant i$, $r_j = n + p - j$:

$$\|U_{n+p-k}(A)U_{n+p}^{-1}(A)U_{i-1}(A) - U_{n-k}(A)U_n^{-1}(A)U_{i-1}(A)\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{p} U_{i-1}(A)U_{k-1}(A)U_{r_j}^{-1}(A)U_{r_{j+1}}^{-1}(A)\right\|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \|U_{i-1}(A)U_{k-1}(A)U_{r_j}^{-1}(A)U_{r_{j+1}}^{-1}(A)\|$$

$$\leqslant K\sum_{j=1}^{p} U_{i-1}(|\omega|)U_{k-1}(|\omega|)U_{r_j}^{-1}(|\omega|)U_{r_{j+1}}^{-1}(|\omega|)$$

$$\leqslant K|U_{n+p-k}(|\omega|)U_{i-1}(|\omega|)U_{n+p}^{-1}(|\omega|) - U_{n-k}(|\omega|)U_n^{-1}(|\omega|)U_{i-1}(|\omega|)|$$

$$= K|\gamma_{i,k}^{(n+p)}(|\omega|) - \gamma_{i,k}^{(n)}(|\omega|)| \to 0$$

при $n \to \infty$, так как числовая последовательность $\gamma_{i,k}^{(n)}(|\omega|)$ по доказанному в предыдущем параграфе сходится к $\gamma_{ik}(|\omega|)$ и, следовательно, операторная последовательность $U_{n-k}(A)U_{i-1}(A)U_n^{-1}(A)$ является фундаментальной, но тогда она имеет предел, который является ограниченным оператором. Обозначим его через $\gamma_{i,k}(A)$. Тогда имеем равенство

$$\lim_{n\to\infty} U_{n-k}(A)U_{i-1}(A)U_n^{-1}(A) = \gamma_{ik}(A). \tag{4.4}$$

Теперь пусть
$$\lim_{n\to\infty} U_{n-1}(A)U_n^{-1}(A) = \mu(A).$$
Сходимость по норме при $n \to \infty$ семейства операторов $U_{n-1}(A)U_n^{-1}(A)$ при $\omega > 1$ следует из сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n-1}(\omega)}{U_n(\omega)} = \frac{1}{\omega+\sqrt{\omega^2-1}}$, неравенства (2.7) и следующей оценки для фундаментальной последовательности (аналогичной оценке, проделанной перед формулой (4.4)):
$$\left\|U_{n+p}(A)U_{n+p+1}^{-1}(A) - U_n(A)U_{n+1}^{-1}(A)\right\|$$
$$= K\left|\frac{U_{n+p}(\omega)}{U_{n+p+1}(\omega)} - \frac{U_n(\omega)}{U_{n+1}(\omega)}\right| \to 0$$
при $n \to \infty$ и произвольном $p = 1, 2, \ldots$. Таким образом, доказана сходимость фундаментальной последовательности. □

Далее из разложения
$$U_{n-k}(A)U_n^{-1}(A) = \prod_{j=1}^{k} U_{n-j}(A)U_{n-j+1}^{-1}(A)$$
следует, что
$$\lim_{n\to\infty} U_{n-k}(A)U_n^{-1}(A) = \mu^k(A). \tag{4.5}$$

Но тогда, пользуясь замкнутостью оператора $U_n(A)$ и переходя к пределу (4.4), получаем равенство
$$\gamma_{ik}(A) = \lim_{n\to\infty} U_{i-1}(A)U_{n-k}(A)U_n^{-1}(A) = U_{i-1}(A)\mu^k(A).$$

Используя это равенство, получаем представления элементов матрицы, обратной матрице $M(A)$, в виде
$$\gamma_{ik}(A) = \begin{cases} U_{i-1}(A)\mu^k(A), & i \leqslant k, \\ U_{k-1}(A)\mu^i(A), & i > k. \end{cases} \tag{4.6}$$

Отметим, что для нормы оператора $\mu(A)$ при $|\omega| > 1$ справедлива оценка
$$\|\mu(A)\| \leqslant K(|\omega| - \sqrt{\omega^2-1}). \tag{4.7}$$

Кроме того, из (4.5) и равенства
$$U_{n+1}(A) = 2AU_n(A) - U_{n-1}(A),$$

записанного в виде

$$U_{n+1}(A)U_n^{-1}(A) = 2A - U_{n-1}(A)U_n^{-1}(A), \tag{4.8}$$

следует существование предела для $x \in D(A^n)$,

$$\lim_{n\to\infty} U_{n+1}(A)U_n^{-1}(A)x = (2A - \mu(A))x. \tag{4.9}$$

Далее, применяя к обеим частям равенства (4.8) оператор $U_nU_{n-1}^{-1}$ и пользуясь коммутативностью операторов, получаем

$$U_{n+1}(A)U_{n-1}^{-1}(A)x = (2AU_{n-1}^{-1}(A)U_n(A) - I)x.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ и получим равенство

$$[2A - \mu(A)]^2 x = 2A[2A - \mu(A)]x - x.$$

Отсюда имеем

$$\mu(A)[2A - \mu(A)]x = x.$$

То есть для $x \in D(A)$ получаем обратный оператор

$$\mu^{-1}(A)x = (2A - \mu(A))x.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если оператор A является производящим оператором полугруппы класса C_0 с типом $\omega < -1$, то матрица $M(A)$ имеет обратную матрицу $M^{-1}(A)$ с ограниченными операторными элементами*

$$\gamma_{ik}(A) = \begin{cases} U_{i-1}(A)\mu^k(A), & i \leqslant k, \\ U_{k-1}(A)\mu^i(A), & i > k. \end{cases}$$

Для них справедлива оценка

$$\|\gamma_{ik}\| \leqslant K \begin{cases} U_{i-1}(|\omega|)(|\omega| - \sqrt{\omega^2 - 1})^k, & i \leqslant k, \\ U_{k-1}(|\omega|)(|\omega| - \sqrt{\omega^2 - 1})^i, & i > k. \end{cases} \tag{4.10}$$

Заметим, что из (3.8) и (4.10) следует оценка

$$\|M^{-1}(A)\| \leqslant \frac{K(1 + |\omega| - \sqrt{\omega^2 - 1})}{2(1 - |\omega| + \sqrt{\omega^2 - 1})\sqrt{\omega^2 - 1}}. \tag{4.11}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Операторная матрица $M^{-1}(A)$ с элеметами (4.6) является ограниченным оператором, действующим в пространстве $l_p(E)$ последовательностей $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i \in E$, с нормой*

$$\|a\|_p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|_E^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

При этом для ее нормы справедлива оценка (4.11).

Введем оператор $\Theta(A) = A - \mu(A)$, тогда для $x \in D(A)$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(A)x &= (A - \Theta(A))x, \\ \mu^{-1}(A)x &= (A + \Theta(A))x. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Отсюда $\Theta(A) = \frac{1}{2}[\mu^{-1}(A) - \mu(A)]$.

С другой стороны, применяя $\mu(A)$ к $\mu^{-1}(A)$ и пользуясь формулами (4.12), получаем

$$\mu(A)\mu^{-1}(A)x = (A - \Theta(A))(\Theta(A) + A)x = (A^2 - \Theta^2(A))x.$$

Следовательно, $x = (A^2 - \Theta^2(A))x$. То есть $\Theta^2(A)x = (A^2 - I)x$ или $\Theta(A)x = (A^2 - I)^{\frac{1}{2}}x$. Таким образом, определен корень квадратный из $(A^2 - I)$ формулой

$$(A^2 - I)^{\frac{1}{2}}x = [A - \mu(A)]x, \quad x \in D(A).$$

Это позволяет также записать

$$\mu(A) = A - (A^2 - I)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$(A^2 - I)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[\mu^{-1}(A) - \mu(A)].$$

Теперь с помощью ряда

$$(A^2 - I)^{-\frac{1}{2}} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k+1}(A) \tag{4.13}$$

определим оператор $(A^2 - I)^{-\frac{1}{2}}$.

Для этого, используя неравенство (4.7), оценим

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{2k+1}(A)\Big\| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|\mu(A)\|^{2k+1} \\ &\leqslant K\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(|\omega|+\sqrt{\omega^2-1})^{2k+1}} \\ &= K\cdot\frac{|\omega|+\sqrt{\omega^2-1}}{(|\omega|+\sqrt{\omega^2-1})^2-1}=\frac{K}{2\sqrt{\omega^2-1}}.\end{aligned}$$

Применяя полученное неравенство к оценке ряда (4.13), получаем его абсолютную сходимость и неравенство

$$\|(A^2-I)^{-\frac{1}{2}}\|\leqslant 2\sum_{k=0}^{\infty}\|\mu(A)\|^{2k+1}\leqslant\frac{K}{\sqrt{\omega^2-1}}.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. *Если оператор A является производящим оператором полугруппы класса C_0, удовлетворяющей неравенству (2.1) с $\omega\leqslant -1$, то для $x\in D(A^n)$ определены абстрактные ортогональные многочлены Чебышева 1-го и 2-го рода и для них справедливо представление*

$$\begin{aligned}U_n(A)x &= \frac{1}{2}\big[\big(A+\sqrt{A^2-I}\big)^{n+1}-\big(A-\sqrt{A^2-I}\big)^{n+1}\big](A^2-I)^{-1/2}x \\ &= \frac{1}{2}(A^2-I)^{-1/2}\big[\mu(A)^{-n-1}-\mu(A)^{n+1}\big]x, \\ T_n(A)x &= \frac{1}{2}\big[(A+\sqrt{A^2-I})^{n}+(A-\sqrt{A^2-I})^{n}\big]x \\ &= \frac{1}{2}[\mu^{-n}(A)+\mu^{n}(A)]x.\end{aligned}$$

Замечание. Если, в соответствии с [9, гл. VI, §2], ввести производную от операторного полинома по правилу

$$(P_n(A))'=\bigg(\sum_{m=0}^{n}c_mA^m\bigg)'=\sum_{m=1}^{n}mc_mA^{m-1},$$

то для $x\in D(A^n)$ можно получить равенства

$$\begin{aligned}(A^2-I)T_n''(A)x+AT_n'(A)x&=n^2T_n(A)x,\\ (A^2-I)U_n''(A)x+3AU_n'(A)x&=n(n+2)U_n(A)x.\end{aligned}$$

5. Представление оператора $\mu(A)$

Пусть A – генератор полугруппы $V(t)$ класса C_0, действующей в банаховом пространстве E, и пусть справедлива оценка

$$\|V(t)\| \le Ke^{-\omega t}, \quad t \ge 0, \quad \omega > 1.$$

Обозначим через

$$I_1^{[n]}(t) = \underbrace{I_1(t) * \cdots * I_1(t)}_{n} = \int\limits_0^t I_1(t-s) I_1^{[n-1]}(s)\, ds$$

n-кратную свертку функции Бесселя $I_1(t)$ мнимого аргумента 1-го рода.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для C_0-операторных многочленов Чебышева второго рода $U_n(A)$ существует равномерный операторный предел*

$$\mu_j(A) = \lim_{n\to\infty} U_{n-j}(A) U_n^{-1}(A), \quad 1 \le j \le n,$$

и для него справедливо представление

$$\mu_j(A) = \mu^j(A) = \int\limits_0^\infty I_1^{[j]}(t) V(t) dt. \tag{5.1}$$

Доказательство. По определению C_0-операторной дроби имеем разложение на простые операторные дроби по корням x_m многочлена $U_n(x)$:

$$U_{n-j}(A) U_n^{-1}(A) = \sum_{m=1}^n \frac{U_{n-j}(x_m)}{U_n'(x_m)} R(x_m, A).$$

Отсюда, используя представление резольвенты $R(x_m, A)$ через полугруппу $V(t)$, получаем

$$\begin{aligned} U_{n-j}(A) U_n^{-1}(A) &= \sum_{m=1}^n \frac{U_{n-j}(x_m)}{U_n'(x_m)} \int\limits_0^\infty e^{-x_m t} V(t) dt \\ &= \int\limits_0^\infty \Bigg(\sum_{m=1}^n e^{-x_m t} \frac{U_{n-j}(x_m)}{U_n'(x_m)} \Bigg) V(t) dt. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Далее, учитывая равенство

$$\sum_{m=1}^{n} e^{-x_m t}\frac{U_{n-j}(x_m)}{U_n'(x_m)} = \sum_{m=1}^{n} e^{x_m t}\frac{U_{n-j}(x_m)}{U_n'(x_m)},$$

справедливое в силу симметричного распределения корней многочленов Чебышева относительно начала координат, запишем (5.2) в виде

$$\begin{aligned} U_{n-j}(A)U_n^{-1}(A) &= \int_0^\infty \Bigg(\sum_{m=1}^{n} e^{x_m t}\frac{U_{n-j}(x_m)}{U_n'(x_m)}\Bigg)V(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{pt}\frac{U_{n-j}(p)}{U_n(p)}dpV(t)dt \quad (\omega>1). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь мы воспользовались формулой Хевисайда обращения преобразования Лапласа для рациональных функций, знаменатель которых имеет лишь простые корни (см. [6, с. 519]).

Наконец, переходя в (5.3) к пределу при $n\to\infty$, пользуясь равенством

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n-j}(p)}{U_n(p)} = \frac{1}{(p+\sqrt{p^2-1})^j},$$

справедливом при $\operatorname{Re} p>1$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} U_{n-j}(A)U_n^{-1}(A) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{pt}\frac{dp}{(p+\sqrt{p^2-1})^j}V(t)dt.$$

Отсюда, учитывая, что функция $(p+\sqrt{p^2-1})^{-1}$ является преобразованием Лапласа функции $I_1(t)$, и применяя теорему о свертке, получаем представление (5.1). □

Литература

1. В. А. Костин, *К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп.* — Алгебра и анализ **1**, вып.1 (1999), 118–140.
2. М. А. Красносельский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* Наука, М., 1966.
3. М. Г. Крейн, *О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний валов.* — Мат. сб. **40** (1933), No. 4, 455–465.

4. С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* Наука, М., 1967.
5. С. Г. Крейн, М. И. Хазан, *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* — Итоги науки и техники. Мат. анализ **21** (1983), 130–264.
6. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного.* Наука, М., 1974.
7. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
8. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены.* Наука, М., 1979.
9. Д. К. Фаддеев, *Лекции по алгебре*, Наука, М., 1984.
10. Д. К. Фаддеев, *О свойствах матрицы обратной Хессенберговой.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **111** (1981), 177–179.
11. B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle.* — AMS Colloquium Series, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005).
12. M. Zygmunt, *Matrix Chebyshev polynomials and continued fractions.* — Linear Algebra and its Applications **340**, No. 1-3 (2002), 155–168.

Kostin V. A., Nebolsina M. N. Chebyshev C_0-operator polynomials and their representation.

Certain estimates for the resolvent of a block-discrete Schrödinger operator with a constant diagonal perturbation are obtained. For that, the resolvent is represented in terms of the Chebychev polynomials of the (in general, unbounded) operator that represents a block of the perturbation.

Воронежский
государственный университет,
Университетская пл., 1,
394000, Воронеж, Россия

E-mail: vkostin@mail.ru
marinanebolsina@yandex.ru

Поступило 17 мая 2010 г.