

В. В. Капустин

О ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРАХ НА СИНГУЛЯРНОМ СПЕКТРЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основным объектов теории рассеяния является волновой оператор. В случае систем с дискретным временем конструкция состоит из пары унитарных операторов U_1, U_2 , действующих в гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно, и оператора $X : H_1 \rightarrow H_2$. Волновой оператор, отвечающий асимптотическому поведению системы в прошлом, определяется как предел последовательности

$$U_2^n X U_1^{-n} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty$$

в каком-либо универсальном смысле. Определим коммутатор K ,

$$K = XU_1 - U_2X.$$

Случай $K = 0$ тривиален, поскольку тогда все элементы последовательности очевидно равны X ; естественно спрашивать, что происходит, когда оператор K мал (ранга 1, ранга 2, конечного ранга, из класса операторов со следом, и т.д.)

Если спектральные меры унитарных операторов абсолютно непрерывны (относительно меры Лебега), то в классической теории рассеяния устанавливается существование сильных волновых операторов, когда коммутатор K принадлежит классу операторов со следом [1]. В связи с вопросом о волновых операторах на сингулярном спектре имеется некоторый “фольклор” из разрозненных фактов, не дающий единой исчерпывающей картины. В настоящей заметке собраны результаты, связанные с построением волновых операторов на сингулярном спектре с помощью регулярных методов суммирования. Некоторые приведённые здесь факты могут быть известными специалистам. По-видимому, к новым результатам относятся линейное

Ключевые слова: волновой оператор, методы суммирования, сингулярная спектральная мера.

При частичной поддержке РФФИ, грант 08-01-00723.

ограничение на коммутаторы (теорема 6.1), существование волнового оператора в случае $\text{rang } K = 1$ как предела усреднений для широкого класса методов суммирования (теорема 7.1) и редукция общего случая $\text{rang } K = 2$ к операторам K специального вида (9) (теорема 7.2). Случай $\text{rang } K = 2$ связан с другими известными открытыми проблемами из смежных областей анализа и ему будет посвящено отдельное исследование; некоторые результаты можно найти в [2].

Простые примеры, даже в одномерных пространствах, показывают, что в общем случае без применения усреднения предел может не существовать. Действительно, возьмём одномерное пространство $H_1 = H_2 = \mathbb{C}$, положим $X = I$, $U_1 = I$, $U_2 = \omega I$, где $|\omega| = 1$. Тогда ясно, что $U_2^n X U_1^{-n} = \omega^n I$. Если $\omega \neq 1$, то последовательность расходится. Однако можно надеяться, что предел будет существовать в каком-либо более слабом смысле, а именно, если применить некоторый метод суммирования. Например, рассмотрим метод суммирования, сопоставляющий последовательности $(x_n)_{n=0}^\infty$ последовательность (\tilde{x}_n) её средних Чезаро, $\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n x_m$. Для геометрических прогрессий $x_n = \omega^n$ ($|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) имеем $\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega} \rightarrow 0$.

Если дана последовательность (x_n) , то её абелевы средние имеют вид

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n x_n,$$

где $0 < r < 1$ и предел рассматривается при $r \nearrow 1$. Положим

$$A_r = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n X U_1^{-n},$$

т.е. A_r – абелевы средние последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$. Метод суммирования по Абелю здесь рассматривается из-за его связи с интегралами типа Коши. Общая гипотеза может быть сформулирована следующим образом.

Предположение 1.1. Пусть U_1, U_2 – унитарные операторы, и предположим, что X – такой оператор, что $K = XU_1 - U_2X$ – оператор конечного ранга. Тогда предел абелевых средних последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существует в слабой операторной топологии, т.е. операторы A_r слабо сходятся при $r \nearrow 1$.

Рассмотрим суммы B_n ,

$$B_n = \sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m}, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Они связаны с операторами вида $U_2^n X U_1^{-n}$ соотношением

$$B_n = X - U_2^n X U_1^{-n}.$$

Следовательно, сходимость последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ равносильна сходимости сумм B_n .

Можно также рассматривать последовательность $U_2^n X U_1^{-n}$ при отрицательных n с направлением $n \rightarrow -\infty$. Если некоторые усреднённые пределы (двусторонней) последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существуют при $n \rightarrow \pm\infty$, то это же должно быть верно и для разности пределов, которая тогда представляет собой предел последовательности $U_2^n X U_1^{-n} - U_2^{-n} X U_1^n$ при $n \rightarrow +\infty$. В терминах коммутатора K эти операторы могут быть записаны как

$$\begin{aligned} U_2^n X U_1^{-n} - U_2^{-n} X U_1^n &= \sum_{m=-n}^{n-1} (U_2^{m+1} X U_1^{-(m+1)} - U_2^m X U_1^{-m}) \\ &= \sum_{m=-n}^{n-1} U_2^m K U_1^{-(m+1)}. \end{aligned}$$

Теперь пусть μ – мера Лебега на единичной окружности, возьмём оператор X в $L^2(\mu)$ такой, что $K = XU - UX = \sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$, где U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$, сумма конечна (или бесконечна и $\sum \|u_k\| \cdot \|v_k\| < \infty$). Классические результаты теории рассеяния говорят о том, что сильные пределы последовательности $U^n X U^{-n}$ существуют при $n \rightarrow +\infty$ и $n \rightarrow -\infty$. Можно проверить, что их разность есть оператор умножения на функцию $\bar{z} \sum u_k v_k$ (изначально лежащую в $L^1(\mu)$, но таким образом на самом деле принадлежащую пространству $L^\infty(\mu)$).

Теорема 6.1 ниже, согласно которой для сингулярного спектра сумма $\sum u_k v_k$ равна 0, естественно приводит к мысли, что если некоторый усреднённый предел последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существует при $n \rightarrow +\infty$ и $n \rightarrow -\infty$, то эти пределы совпадают. Объединяя предположение 1.1 с формулой (3), можно сформулировать новое предположение уже в терминах оператора K .

Предположение 1.2. Пусть U – унитарный оператор с сингулярным спектром, K – оператор конечного ранга (или из класса операторов со следом и т.п.), представимый в виде $K = XU - UX$. Тогда абелевы средние последовательности $\sum_{m=-n}^n U_2^m K U_1^{-m}$ стремятся к нулю левому оператору в слабой операторной топологии при $n \rightarrow +\infty$.

Автор признателен всем коллегам, проявившим интерес к этой работе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим простой, однако важный пример, накладывающий некоторые ограничения на то, что можно получить.

Пример. Возьмём оператор ранга 1, $X = (\cdot, a)b$. Тогда $U_2^n X U_1^{-n} = (\cdot, U_1^n a) U_2^n b$. Пусть U_1, U_2 операторы умножения на z в $L^2(\mu), L^2(\nu)$, соответственно, где μ, ν – меры на единичной окружности, $a \equiv 1, b \equiv 1$. Тогда получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = \hat{\mu}_n z^n$, где $\hat{\mu}_n = \int \bar{z}^n d\mu(z)$.

Если мера μ такова, что $\hat{\mu}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 \rightarrow 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда μ – дискретная мера. Например, пусть μ – атом в точке ω единичной окружности, тогда пространство $L^2(\mu)$ одномерно. Получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = (\bar{\omega} z)^n$, это выражение расходится, если только ν не есть точечная масса в ω ; однако, как вытекает из предложения 3.1 ниже, сходимости может быть получена применением любого s -регулярного метода суммирования (в частности, метода Чезаро, т.е. обычных арифметических средних).

Для произвольной меры μ без атомов воспользуемся классической теоремой Винера, согласно которой для любой меры, не имеющей точечных масс, имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{-n \leq m \leq n} |\hat{\mu}(m)| = 0.$$

Отсюда следует, что средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n} 1$ стремятся к нулю.

Сходимость установлена на одном векторе $1 \in L^2(\mu)$; для остальных векторов из $L^2(\mu)$ достаточно заметить, что множество векторов, для которых имеется сходимость, есть замкнутое подпространство, приводящее оператор U_1 .

Заметим, что если последовательность $U_2^n X U_1^{-n}$ сходится в некотором естественном смысле (в сильной или слабой топологии, а также с применением многих методов суммирования), то предельный оператор A сплетает U_1 и U_2 :

$$AU_1 = U_2A.$$

Чтобы это увидеть, достаточно перейти к пределу в соотношении

$$(U_2^{n+1} X U_1^{-(n+1)})U_1 = U_2(U_2^n X U_1^{-n}).$$

Для предельного оператора B последовательности (B_n) имеем $BU_1 - U_2B = K$.

Без потери общности можно считать, что кратность спектра унитарного оператора U_1 равна 1. Действительно, при изучении последовательности операторов $U_2^n X U_1^{-n}$, применённых к вектору $h \in H_1$, вместо всего пространства H_1 можно рассматривать лишь подпространство, приводящее U_1 , порождённое вектором h . Спектральная теорема для унитарных операторов может быть сформулирована следующим образом.

Пусть U – унитарный оператор в гильбертовом пространстве H , возьмём $h \in H$. Тогда существуют мера μ на единичной окружности и изометрическое отождествление приводящего подпространства, порождённого вектором h , с пространством $L^2(\mu)$ такое, что оператор умножения на z в $L^2(\mu)$ соответствует оператору U , а функция $1 \in L^2(\mu)$ – вектору h .

Таким образом, можно предполагать, что $H_1 = L^2(\mu)$, где μ – мера на единичной окружности и U_1 – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$. Без потери общности можно считать меру μ вероятностной. При рассмотрении сходимости в слабой операторной топологии можно предполагать, что и кратность спектра оператора U_2 также равна 1. Следовательно, в качестве оператора U_2 можно взять оператор умножения на независимую переменную в $H_2 = L^2(\nu)$ для некоторой (вероятностной) меры ν на единичной окружности.

Применим оператор B_n при $K = (\cdot, \bar{v})v$ к вектору $h \in L^2(\mu)$ и найдём значение получающейся функции в точке z , $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}
 (B_n h)(z) &= \left[\left(\sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m} \right) h \right] (z) \\
 &= \sum_{m=1}^n z^{m-1} \left(\int \bar{\xi}^m h(\xi) u(\xi) d\mu(\xi) \right) v(z) \\
 &= v(z) \cdot \int \frac{1 - (\bar{\xi}z)^n}{1 - \bar{\xi}z} \bar{\xi} h(\xi) u(\xi) d\mu(\xi).
 \end{aligned}$$

Для $K = \sum_k (\cdot, \bar{u}_k) v_k$ получаем

$$(B_n h)(z) = \sum_k v_k(z) \cdot \int \frac{1 - (\bar{\xi}z)^n}{1 - \bar{\xi}z} \bar{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi). \quad (4)$$

3. РЕГУЛЯРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Здесь даётся необходимая информация о методах усреднения для ограниченных последовательностей, занумерованных неотрицательными целыми числами. Возьмём упорядоченное множество (α) , которое будет либо множеством неотрицательных целых чисел с направлением $n \rightarrow +\infty$, либо интервалом $[0, 1)$ с направлением $r \nearrow 1$. Пусть $p_{\alpha, n}$ – веса, определяющие регулярный метод суммирования. Точнее, предположим, что

- 1) $p_{\alpha, n} \geq 0; \forall \alpha \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha, n} = 1;$
- 2) $\forall n \geq 0 p_{\alpha, n} \xrightarrow{\alpha} 0.$

Усреднения последовательности (x_n) имеют вид

$$\tilde{x}_\alpha = \sum_n p_{\alpha, n} x_n.$$

Если (x_n) сходятся, то \tilde{x}_α также сходятся, однако обратное в общем случае неверно; это позволяет рассматривать усреднённые пределы последовательностей, которые не сходятся в обычном смысле. Свойство 1) означает, что каждый элемент \tilde{x}_α является усреднением последовательности (x_n) ; по свойству 2) предел (когда он существует) не зависит от любого конечного числа элементов последовательности.

Регулярный метод суммирования будет называться s -регулярным, если, кроме того,

3) $\sum_{n=0}^{\infty} |p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1}|$ – ограниченная функция от α , стремящаяся к 0;

Простое достаточное условие для свойства 3) состоит в том, что

$$3') \forall \alpha, n \quad p_{\alpha,n} \geq p_{\alpha,n+1}.$$

Свойство s -регулярности метода суммирования означает, что средние последовательности (x_n) сходятся одновременно (и к тому же самому пределу) с любой подпоследовательностью вида (x_{n+m}) , $m > 0$.

Все s -регулярные методы суммирования обладают одним важным свойством.

Предложение 3.1. Если $(p_{\alpha,n})$ – s -регулярный метод суммирования, то для любой непостоянной унимодулярной геометрической прогрессии (x_n) ($x_n = \omega^n$, где $|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) средние \tilde{x}_α стремятся к нулю.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (1 - \omega)\tilde{x}_\alpha &= (1 - \omega) \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} \omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} \omega^n - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} \omega^{n+1} \\ &= \left(p_{\alpha,0} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n+1} \omega^{n+1} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} \omega^{n+1} \\ &= p_{\alpha,0} - \sum_{n=0}^{\infty} (p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1}) \omega^{n+1} \xrightarrow{\alpha} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Простым примером s -регулярного метода суммирования является метод Чезаро $(C, 1)$, где \tilde{x}_n – арифметические средние, $\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$. Существуют s -регулярные методы суммирования более мягкие, чем $(C, 1)$, например, методы Чезаро (C, α) при $\alpha < 1$, или некоторые из методов Вороного (или Нёрлюнда), см. [3].

Теперь зафиксируем метод суммирования $(p_{\alpha,n})$ и применим процедуру усреднения к ограниченной последовательности операторов

$U_2^n X U_1^{-n}$. Определим

$$A_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} U_2^n X U_1^{-n}, \quad B_\alpha = X - A_\alpha.$$

Имеем

$$B_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} (X - U_2^n X U_1^{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} \left(\sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m} \right).$$

В силу (4), для $K = \sum_k (\cdot, \bar{u}_k) v_k$, $K : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\nu)$, имеем

$$(B_\alpha h)(z) = \sum_k v_k(z) \cdot \left(\int \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} (\bar{\xi}z)^n}{1 - \bar{\xi}z} \bar{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi) \right). \quad (5)$$

Метод усреднения по Абелю сопоставляет последовательности (x_n) семейство $(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} r^k x_k$, $0 \leq r < 1$, с направлением $r \nearrow 1$. Подставляя $p_{r,n} = (1-r)r^n$ в формулу (5), получаем

$$\begin{aligned} (B_r h)(z) &= \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n K U_1^{-(n+1)} \right) h \right] (z) \\ &= r \sum_k v_k(z) \cdot \int \frac{\bar{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi)}{1 - r \bar{\xi}z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если удастся доказать, что это выражение имеет пределы при $r \nearrow 1$ в ν -почти всех точках z , сразу же получится слабая сходимость векторов $B_r h$. Следует отметить, однако, что сам по себе факт поточечной сходимости намного глубже, чем слабая сходимость.

Для случая, когда K – оператор ранга 1, существование угловых пределов интегралов типа Коши (6) почти всюду было доказано в статье [4]. Из этого немедленно вытекает, что предположение 1.1 верно, если K – оператор ранга 1. Однако даже более сильное утверждение может быть доказано гораздо проще, см. теорему 7.1 ниже.

4. СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть μ – мера на единичной окружности, K – интегральный оператор в $L^2(\mu)$,

$$(Kh)(z) = \int k(z, \xi)h(\xi)d\mu(\xi), \quad h \in L^2(\mu). \quad (7)$$

Если $K = \sum_n (\cdot, \bar{u}_n)v_n$, то K записывается как интегральный оператор (7) с ядром k ,

$$k(z, \xi) = \sum u_n(\xi)v_n(z).$$

Как обычно, U – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$.

Предложение 4.1. Пусть K – интегральный оператор (7) в $L^2(\mu)$. Если K представим в виде $K = XU - UX$, и для μ -почти всех z выполнено $\int \left| \frac{k(z, \xi)}{\xi - z} \right| d\mu(\xi) < \infty$, то для любого s -регулярного метода суммирования операторы B_α сходятся в слабой операторной топологии к интегральному оператору B с ядром $\frac{k(z, \xi)}{\xi - z}$:

$$(Bh)(z) = \int \frac{k(z, \xi)}{\xi - z} h(\xi) d\mu(\xi), \quad h \in L^2(\mu),$$

а усреднённые пределы последовательности $U^n XU^{-n}$ существуют при $n \rightarrow \pm\infty$ и равны $X - B$.

Оператор B корректно определён на плотном множестве ограниченных функций h из $L^2(\mu)$ и может быть распространён на всё пространство $L^2(\mu)$ по непрерывности.

Доказательство. Зафиксируем точку z такую, что

$$M(z) = \int \left| \frac{k(z, \xi)}{\xi - z} \right| d\mu(\xi) < \infty.$$

По аналогии с (5), для s -регулярного метода суммирования $(p_{\alpha, n})$ получаем

$$(B_\alpha h)(z) = \int k(z, \xi) \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha, n}(\bar{\xi}z)^n}{1 - \bar{\xi}z} \bar{\xi} h(\xi) d\mu(\xi).$$

Применим операторы B_α, B к вектору $h = 1$:

$$(B_\alpha 1)(z) = \int k(z, \xi) \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha, n} (\bar{\xi} z)^n}{\xi - z} d\mu(\xi),$$

$$(B 1)(z) = \int \frac{k(z, \xi)}{\xi - z} d\mu(\xi),$$

откуда

$$(B_\alpha 1)(z) - (B 1)(z) = - \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha, n} (\bar{\xi} z)^n \right) \frac{k(z, \xi)}{\xi - z} d\mu(\xi).$$

Поскольку $\left| \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha, n} (\bar{\xi} z)^n \right| \leq 1$ для любого α , абсолютная величина подинтегрального выражения не превосходит $\left| \frac{k(z, \xi)}{\xi - z} \right|$. Из s -регулярности вытекает, что $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha, n} (\bar{\xi} z)^n \xrightarrow{\alpha} 0$, следовательно $(B_\alpha 1)(z) - (B 1)(z) \rightarrow 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

Доказано, что $B_\alpha 1 \rightarrow B 1$ поточечно μ -почти всюду. Из предположения о том, что $K = XU - UX$, следует, что нормы операторов B_α ограничены и потому $B_\alpha 1 \rightarrow B 1$ слабо. Следовательно, $B_\alpha h \rightarrow B h$ слабо для любого вектора h из приводящего подпространства, порождённого функцией 1, т.е. для всех $h \in L^2(\mu)$.

Для волнового оператора, соответствующего пределу при $n \rightarrow -\infty$, рассуждение вполне аналогично. \square

Заметим, что если $\iint \left| \frac{k(z, \xi)}{\xi - z} \right|^2 d\mu(\xi) d\mu(z) < \infty$, то все операторы B_α и оператор B принадлежат классу Гильберта–Шмидта и, кроме того, $B_\alpha \rightarrow B$ по норме класса Гильберта–Шмидта.

5. ВЗАИМНО СИНГУЛЯРНЫЕ МЕРЫ

Теорема 5.1. *Допустим, что спектральные меры унитарных операторов U_1, U_2 взаимно сингулярны, $K = XU_1 - U_2X$ – оператор конечного ранга. Тогда для любого s -регулярного метода суммирования усреднения последовательности $U_2^n XU_1^{-n}$ стремятся к нулю в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Возьмём векторы $x \in H_1, y \in H_2$, и пусть $\|x\| = \|y\| = 1$; требуется доказать, что $(\sum_n p_{\alpha, n} U_2^n XU_1^{-n} x, y) \rightarrow 0$.

Без потери общности можно предполагать, что $H_1 = L^2(\mu)$, $x = 1$; $H_2 = L^2(\nu)$, $y = 1$, где μ, ν – вероятностные меры на единичной окружности.

Рассмотрим заряд $\mu - \nu$ как элемент пространства, сопряжённого к пространству всех непрерывных функций на окружности. Норма заряда $\mu - \nu$ равна 2, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественнозначная непрерывная функция s с нормой 1 такая, что $\int s d(\mu - \nu) > 2 - \varepsilon$. Поскольку $\int s d\nu \geq -1$, получаем $\int s d\mu > 1 - \varepsilon$. Возьмём открытые множества $e_1 = \{s > \frac{1}{2}\}$ и $e_2 = \{s < -\frac{1}{2}\}$. На множестве e_1^c , дополнительном к e_1 , имеем $s \leq \frac{1}{2}$, следовательно, $\int_{e_1^c} s d\mu \leq \frac{\mu e_1^c}{2} = \frac{1 - \mu e_1}{2}$. Аналогично, $\int_{e_2^c} s d\nu \geq -\frac{1 - \nu e_2}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon < \int s d(\mu - \nu) &= \int_{e_1} s d\mu + \int_{e_1^c} s d\mu - \int_{e_2} s d\nu - \int_{e_2^c} s d\nu \\ &\leq \mu e_1 + \frac{1 - \mu e_1}{2} + \nu e_2 + \frac{1 - \nu e_2}{2} = \frac{\mu e_1}{2} + \frac{\nu e_2}{2} + 1, \end{aligned}$$

откуда $\mu e_1 + \nu e_2 > 2 - 2\varepsilon$. Следовательно, $\mu e_1 > 1 - 2\varepsilon$, $\nu e_2 > 1 - 2\varepsilon$. Множества e_1, e_2 открыты, и потому каждое из них является объединением открытых дуг. Среди них можно выбрать подмножества e'_1, e'_2 , образованные конечными наборами дуг, которые будут содержать почти полные массы ($\geq 1 - 3\varepsilon$, т.е. с точностью до любого малого числа) мер μ и ν соответственно. Это значит, что векторы $x_\varepsilon = \chi_{e'_1} x$, $y_\varepsilon = \chi_{e'_2} y$ стремятся к x, y соответственно при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\chi_{e'_i}$ обозначает характеристические функции множеств e'_i , $i = 1, 2$.

По построению, для заданного числа ε расстояние между носителями мер $\mu_\varepsilon = \chi_{e'_1} \mu$ и $\nu_\varepsilon = \chi_{e'_2} \nu$ положительно. Следовательно, для μ_ε -почти всех ξ и для ν_ε -почти всех z выражение $1 - \bar{\xi}z$ отделено от нуля. Для любого s -регулярного метода суммирования из предложения 3.1 вытекает поточечная сходимость по α ν_ε -почти всюду в формуле (5), применённой к $h = x_\varepsilon$. Таким образом, получаем сходимость $(B_\alpha x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ по α .

Чтобы получить сходимость $(B_\alpha x, y)$ по α , остаётся перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Нам понадобится следующий очевидный факт.

Предложение 5.2. Допустим, что пространства H_1, H_2 представляются в виде прямых сумм подпространств, приводящих унитарные операторы U_1, U_2 соответственно, и оператор X таким образом

может быть записан в матричной форме, соответствующей разложению пространств H_1, H_2 . Тогда предположение 1.1 верно для X тогда и только тогда, когда оно верно для каждой матричной клетки X .

Предложение позволяет рассматривать части мер μ, ν , соответствующие разбиениям единичной окружности. Это сводит общую задачу к двум частным случаям: 1) меры μ и ν взаимно сингулярны и 2) $\mu = \nu$.

Первый случай рассматривался в теореме 5.1. Случай абсолютно непрерывной меры покрывается классической теорией рассеяния; случай точечного спектра следует из примера в §2. Таким образом, можно ограничиться случаем, когда спектральные меры подчинены скалярной сингулярной мере без точечных масс. Можно предполагать, что оператор K действует в $L^2(\mu)$, где μ – сингулярная мера без атомов, K – конечная сумма $K = \sum(\cdot, \bar{u}_n)v_n$.

6. ПРОСТРАНСТВА K_θ

С вероятностной сингулярной мерой μ на единичной окружности свяжем внутреннюю функцию θ по формуле

$$\frac{1 + \theta(z)}{1 - \theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z} d\mu(\xi).$$

Это соотношение задаёт взаимно-однозначное соответствие между вероятностными мерами μ на единичной окружности и внутренними функциями θ в единичном круге с единственным условием $\theta(0) = 0$.

Имеем $\theta = 1$ μ -почти всюду в смысле угловых граничных значений. Определим $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Хорошо известно (см. [5, 6]), что имеется естественное изометрическое отождествление V пространств K_θ и $L^2(\mu)$, отображающее функцию из K_θ в её граничную функцию в $L^2(\mu)$. Для оператора, обратного к V , имеется формула

$$(V^{-1}s)(z) = (1 - \theta(z)) \int \frac{s(\xi)d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi}z}, \quad s \in L^2(\mu).$$

Техника пространств K_θ позволяет установить важное необходимое условие для того, чтобы оператор K мог быть записан в виде $K = XU - UX$. Предположим, что K – ядерный оператор (т.е. принадлежит классу операторов со следом) в $L^2(\mu)$. Тогда K записывается в виде $K = \sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$, причём u_k, v_k удовлетворяют соотношению

$$\sum \|u_k\| \cdot \|v_k\| < \infty.$$

Линейное отображение

$$\Lambda : \sum (\cdot, \bar{u}_k) v_k \mapsto \sum u_k v_k$$

корректно определено на классе ядерных операторов в $L^2(\mu)$ (корректность определения следует, например, из того, что коэффициенты $\int (\sum u_k v_k) z^n d\mu$ равны следам операторов $U^n K$, где U — оператор умножения на z в $L^2(\mu)$). Отображение Λ является непрерывным (сжимающим) из класса ядерных операторов в пространство $L^1(\mu)$.

Теорема 6.1. Пусть μ — сингулярная мера на единичной окружности, U — оператор умножения на z в $L^2(\mu)$. Предположим, что K — ядерный оператор в $L^2(\mu)$, $K = \sum (\cdot, \bar{u}_k) v_k$, причём K представим в виде $K = XU - UX$. Тогда μ -почти всюду имеем $\sum u_k v_k = 0$.

Доказательство этого утверждения опирается на ограниченность норм абелевых средних операторов $\sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m}$, которые равномерно ограничены, если $K = XU - UX$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что μ — вероятностная мера. Построим θ и функции $f_k \in K_\theta$, $f_k = V^{-1} u_k$. Применим (6) к вектору h , $h(\xi) = \xi$; получим

$$(B_r h)(z) = r \cdot \sum v_k(z) \cdot \int \frac{u_k(\xi) d\mu(\xi)}{1 - r \bar{\xi} z} = \frac{r \cdot \sum v_k(z) f_k(rz)}{1 - \theta(rz)}.$$

В [6] показано, что функции $f_{k,r}$ со значениями $f_k(rz)$, рассматриваемые как элементы пространства $L^2(\mu)$, стремятся к u_k в $L^2(\mu)$, причём $\|f_{k,r} - u_k\| \leq \|u_k\|$. Следовательно,

$$\sum v_k f_{k,r} \rightarrow \sum u_k v_k \quad \text{в } L^1(\mu).$$

С другой стороны, для функций $B_r h$, где $h(\xi) = \xi$, по построению имеем $\|B_r h\| \leq 2 \|X\|$; поскольку $\theta(rz) \rightarrow 1$ для μ -почти всех z , получаем, что $1 - \theta_r \rightarrow 0$ в $L^2(\mu)$, и, следовательно, $(1 - \theta_r)(B_r h) \rightarrow 0$ в $L^1(\mu)$. Отсюда заключаем, что

$$\sum u_k v_k = \lim \sum v_k f_{k,r} = \lim (1 - \theta_r)(B_r h) = 0,$$

как и требовалось. \square

Замечание. Без предположения, что мера μ сингулярна, результат неверен. Возьмём ортопроектор P_+ на H^2 в качестве примера оператора X на протрансве L^2 (относительно меры Лебега на единичной окружности), где $U_1 = U_2$ – оператор умножения на z . Тогда ясно, что $K = (\cdot, \bar{u})v$, где $u = z, v = 1$ – оператор ранга 1, и таким образом $uv = z$. Похожие примеры могут быть построены для любых унитарных операторов U_1, U_2 с абсолютно непрерывными спектральными мерами.

Отметим, что обращение теоремы 6.1 имеет место для операторов из плотного множества относительно нормы класса ядерных операторов.

Предложение 6.2. Среди операторов $K = \sum (\cdot, \bar{u}_k)v_k$ из класса ядерных операторов в $L^2(\mu)$ со свойством $\sum u_k v_k = 0$, операторы, которые представляются как коммутаторы $K = XU - UX$, образуют плотное множество в норме класса ядерных операторов.

Для доказательства достаточно взять множество всех операторов конечного ранга вида $K = \sum (\cdot, \bar{u}_k)v_k$, где сумма конечна, а функции u_k, v_k бесконечно гладкие и удовлетворяют условию $\sum u_k v_k = 0$.

7. СЛУЧАЙ РАНГА НЕ ВЫШЕ 2

Теорема 7.1. Пусть U_1, U_2 – унитарные операторы с сингулярным спектром, и предположим, что X – такой оператор, что $K = XU_1 - U_2X$ является оператором ранга 1. Тогда для любого s -регулярного метода суммирования усреднения последовательности $U_2^n XU_1^{-n}$ имеют предел в слабой операторной топологии.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что оператор $U_1 = U_2$ действует в $L^2(\mu)$ как умножение на z , где μ – сингулярная мера на единичной окружности. Оператор K может быть записан в виде $K = (\cdot, \bar{u})v$. По теореме 6.1 имеем $uv = 0$ μ -почти всюду. Отсюда сразу получается известный факт, что сужения меры μ на множества, где $u \neq 0$ и $v \neq 0$, взаимно сингулярны. Остаётся применить теорему 5.1. \square

Теперь предположим, что $\text{rank } K = 2$. Как обычно, можно работать в пространстве $L^2(\mu)$. Запишем

$$K = (\cdot, \bar{u}_1)v_1 + (\cdot, \bar{u}_2)v_2.$$

По теореме 6.1 получаем $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Предложение 5.2 позволяет рассматривать счётные разбиения меры μ . Для множеств, где хотя бы одна из функций u_1, u_2, v_1, v_2 равна нулю, вопрос сводится к случаю меньшего ранга. Таким образом, задача сведена к случаю, когда все функции ненулевые, причём можно считать, что все функции u_1, u_2, v_1, v_2 ограничены и отделены от нуля. Вместо оператора X можно рассмотреть оператор $M_{v_1^{-1}}XM_{u_2^{-1}}$, где M_α обозначает оператор умножения на функцию α . Очевидно, существование волнового оператора для X равносильно его существованию для $M_{v_1^{-1}}XM_{u_2^{-1}}$. Исходный оператор K преобразуется в оператор $(\cdot, \bar{u}_1/\bar{u}_2)1 + (\cdot, 1)v_2/v_1$. Положим

$$\varphi = \frac{u_1}{u_2} = -\frac{v_2}{v_1}.$$

Доказан следующий результат.

Теорема 7.2. *Предположение 1.1 верно для общего случая, когда K – оператор ранга 2, тогда и только тогда, когда оно верно для частного случая, где K – оператор в $L^2(\mu)$, μ – сингулярная вероятностная мера на единичной окружности,*

$$K = (\cdot, \bar{\varphi})1 - (\cdot, 1)\varphi, \quad (9)$$

$$\varphi \in L^2(\mu).$$

Утверждение верно и для других видов сходимости, не только для абелевых средних, как в предположении 1.1.

Более того, достаточно рассматривать случаи вещественнозначных или унимодулярных функций φ . В первом случае, поскольку коммутатор K имеет вид $XU - UX$ тогда и только тогда, когда K^* также представляется в таком виде, общий случай комплекснозначной функции φ сводится к случаю, когда функция φ вещественнозначная. Далее, это рассуждение позволяет рассматривать только самосопряжённые операторы K . Тогда K может быть записан в виде $K = (\cdot, a)a \pm (\cdot, b)b$. По теореме 6.1 получаем, что $|a|^2 \pm |b|^2 = 0$, откуда знак может быть только минусом и K не может быть положительным или отрицательным оператором. Также μ -почти всюду имеем $|a| = |b|$. Преобразуем пространство $L^2(\mu)$ в весовое пространство $L^2(|a|^2\mu)$ унитарным оператором умножения на функцию $1/a$; тогда K перейдёт в оператор $(\cdot, 1)1 - (\cdot, \varphi)\varphi$ при унимодулярной функции

$\varphi = b/a$. Если вместо оператора K рассмотреть его суперпозицию с оператором умножения на φ , получится формула (9).

С помощью предложения 4.1 можно получить достаточные условия для существования волновых операторов в терминах модулей непрерывности меры μ и функции φ . Однако, как показано в [2], класс операторов K вида (9), являющихся коммутаторами $K = XU - UX$, гораздо шире и не связан с гладкостью функции φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*. Изд-во СПбГУ, С.-Петербург, 1994.
2. V. V. Kapustin, PDMI Preprint 06/2010.
3. Г. Харди, *Расходящиеся ряды*. Изд-во иностранной литературы, Москва, 1951.
4. В. В. Капустин, *Граничные значения интегралов типа Коши*. — Алгебра и анализ **16** (2004), No. 4, 114–131.
5. D. N. Clark, *One-dimensional perturbations of restricted shifts*. — J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.
6. А. Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций*. — Алгебра и анализ **5** (1993), No. 2, 189–210.

Kapustin V. V. On wave operators on the singular spectrum.

The problem of the existence of a wave operator is considered in the general case where spectral measures of the unitary operators are not assumed to be absolutely continuous. The case of commutators of rank at most 2 is studied in more detail.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 8 июня 2010 г.