Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

**П. Иванишвили, С. В. Кисляков**

# ИСПРАВЛЕНИЕ ДО ФУНКЦИИ С РЕДКИМ СПЕКТРОМ И РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИМСЯ РЯДОМ ФУРЬЕ

## §0. Введение

Пусть $G$ – компактная конечномерная абелева группа, $\Gamma$ – двойственная с ней дискретная группа. В статье [1] было доказано следующее обобщение классической теоремы Меньшова об исправлении: любую непрерывную функцию $f$ на $G$ изменением на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в функцию с равномерно сходящимся рядом Фурье и редким спектром. При этом равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}\widehat{f}(\gamma)\,\gamma$ могла пониматься в любом разумном смысле. Например, характеры могли быть просто занумерованы произвольным образом – тогда речь шла о сходимости последовательных частичных сумм в этой нумерации. В случае, когда $G$ – $n$-мерный тор $\mathbb{T}^n$, допускалась, например, сходимость частичных сумм по шарам либо по прямоугольникам и т.п. Условие редкости спектра гласило, что спектр исправленной функции можно поместить в объединение $R_1 \cup R_2$, где $(R_1, R_2)$ – предписанная заранее *достаточная пара* подмножеств группы $\Gamma$. Последнее означает, что для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ найдется такой характер $\lambda \in \Gamma$, что $-\lambda + K \subset R_1$, $\lambda + K \subset R_2$.

Для торов близкий результат иным методом получил примерно в то же время Ф. Г. Арутюнян, см. [2, 3]. Его заметка [2], в которой рассматривался лишь случай окружности, послужила второму автору мотивом для исследования, описанного в работе [1]. Отметим, что на настоящую статью повлиял, среди прочего, некий момент из [3] (подробности см. ниже), хотя мы и придерживаемся здесь подхода из [1].

Результат работы [1] тесно связан с аппроксимацией в простран-

---

*Ключевые слова*: теорема Меньшова об исправлении.
Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 08-01-00358 .

ствах $L^p(G)$ при $p < 1$. Говоря конкретно, в его основе лежит рассуждение, использованное А. Б. Александровым [4], чтобы доказать, что линейные комбинации характеров из объединения $R_1 \cup R_2$ плотны в $L^p(G)$ $(p < 1)$ для любой достаточной пары $(R_1, R_2)$. С тех пор в теории аппроксимации спектральными подпространствами в $L^p$ $(p < 1)$ на группах произошел заметный прогресс, см. [5]. Этим можно воспользоваться, чтобы уточнить теорему об исправлении из [1], что мы и делаем. Заодно мы добъемся равномерной сходимости ряда Фурье в несколько более сильном смысле, чем это допускалось в [1]. В сущности, все уточнения получаются с помощью более правильных *слов*, сказанных в нужном месте, а суть *действий* в сравнении с [1] почти не меняется. Однако, на наш взгляд, нововведения в совокупности складываются в достаточно интересные формулировки. Тем не менее, жанр этой статьи – заметка, несмотря на ее размер.

Чтобы сделать статью читаемой, мы вынуждены будем повторить некоторые рассуждения из [1].

В [1] рассматривались также и некомпактные локально-компактные абелевы группы $G$ – например, $\mathbb{R}^n$; тогда речь шла о равномерной сходимости интегралов Фурье. Здесь для простоты мы ограничимся компактными группами, хотя распространить все на случай некомпактных групп не составляет труда.

Заканчивая Введение, упомянем главный (пожалуй) технический инструмент из [1]. *Пусть* $0 < r < 1$, $\mathbb{T}$ *– единичная окружность с нормированной мерой Лебега* $m$. *Тогда* $\|1 - 2^{-1}(z + \bar{z})\|_{L^r(\mathbb{T},m)} < 1$.

Это утверждение очень просто – достаточно заметить, что функция $1 - 2^{-1}(z + \bar{z}) = 1 - \cos\theta$ $(z = e^{i\theta})$ неотрицательна, непостоянна и обладает единичным интегралом по нормированной мере Лебега на окружности (на отрезке $[-\pi, \pi]$). Мы находим уместным сразу сформулировать более тонкую теорему, доказанную в [5], на которой основана существенная часть дальнейшего.

**Теорема A** (см. [5, теорема 9.7]). *Пусть $G$ – компактная абелева группа, а $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ – конечное подмножество двойственной группы $\Gamma$ такое, что $0 \notin E$, но $n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k = 0$ для некоторых неотрицательных целых чисел $n_1, \dots, n_k$, из которых не все равны нулю. Тогда найдутся такое число $r$, $0 < r < 1$, и комплексные коэффициенты $a_1, \dots, a_k$, что тригонометрический полином $p(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\gamma_j(x)$ отстоит от 1 в $L^r(G)$ меньше, чем на 1.*

В этом утверждении и всюду далее мера Хаара $m$ на $G$ считается вероятностной. Условимся еще о некоторых обозначениях и терминах. Компактную группу $G$ мы всегда записываем мультипликативно, а двойственную с ней дискретную группу $\Gamma$ – аддитивно. Под тригонометрическим полиномом на группе $G$ мы понимаем произвольную линейную комбинацию ее характеров. Далее, зафиксируем (уже использованное!) обозначение для преобразования Фурье: $\widehat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,dm(x)$, $f \in L^1(G)$, $\gamma \in \Gamma$.

На самом деле в [5] был доказан более сильный результат: условие на множество $E$, приведенное в теореме A, не только достаточно, но и необходимо для существования полинома $p$. Это условие еще можно пересказать так: полугруппа, порожденная множеством $E \not\ni 0$, содержит ноль. При такой формулировке конечность множества $E$ несущественна. Отметим, что в случае, когда $E\cap(-E) = \varnothing$, может случиться так, что заключение теоремы A выполнено *не для всех* $r < 1$. В [5] содержится некая информация о том, для каких именно $r$ теорема верна, но, строго говоря, нам это не понадобится.

## §1. Формулировка

В этом параграфе мы сформулируем основную теорему, в следующем – обсудим формулировку, а в §3 – наметим доказательство. В отличие от [1], основной результат будет представлен здесь скорее в виде “схемы”, конкретизации которой будут описаны в §2.

**1.1. Спектр.** Начнем с обобщения понятия достаточной пары множеств. Пусть $l$ – натуральное число, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma^l$ – упорядоченный набор из $l$ характеров группы $G$, а $m = (m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}^l$. Через $\langle m, \gamma\rangle$ мы будем обозначать характер $m_1\gamma_1 + \dots m_l\gamma_l$, т.е. функцию $x \mapsto \gamma_1(x)^{m_1} \dots \gamma_l(x)^{m_l}$ на группе $G$.

*Шаблоном* (точнее, *$l$-шаблоном*) мы будем называть любое конечное множество $M = \{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\} \subset \mathbb{Z}^l$ такое, что $m^{(j)} \neq 0$ при всех $j$, но существуют неотрицательные целые числа $n_1, \dots, n_k$, не равные нулю, для которых $n_1 m^{(1)} + \dots + n_k m^{(k)} = 0$. Иными словами, требуется, чтобы полугруппа, порожденная множеством $M$, содержала ноль – как в теореме $A$. Набор $(R_1, \dots, R_k)$ из $k$ подмножеств группы $\Gamma$ называется *достаточным с шаблоном* $M$ (или просто *$M$-достаточным*), если для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ найдется такой упорядоченный набор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ из характеров группы $G$, что $\langle m^{(j)}, \gamma\rangle + K \subset R_j$ при $j = 1, \dots, k$.

Из определения видно, что достаточные пары, упомянутые во Введении – это просто достаточные наборы с 1-шаблоном $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$.

**1.2. Базисы суммирования.** Обозначим через $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G)$ множество всех тригонометрических полиномов на группе $G$. Для любого конечного множества $E \subset \Gamma$ соответствующий оператор частичной суммы ряда Фурье,

$$P_E f = \sum_{\gamma \in E} \widehat{f}(\gamma)\gamma,$$

определен по крайней мере на $\mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{B}$ – система конечных подмножеств группы $\Gamma$. Введем на множестве $\mathcal{P}$ полунорму

$$\|f\| = \sup_{E \in \mathcal{B}} \|P_E f\|. \tag{1}$$

Будем рассматривать только такие системы $\mathcal{B}$, что для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ найдется множество $E \in \mathcal{B}$, для которого $E \supset K$. Тогда формула (1) определяет норму, мажорирующую норму $\|f\|_\infty = \sup_{t \in G} |f(t)|$. Обозначим через $u(G, \mathcal{B})$ пополнение пространства $\mathcal{P}$ по этой норме.

С точностью до деталей, о которых речь впереди, $u(G, \mathcal{B})$ и будет тем самым пространством функций с равномерно сходящимся рядом Фурье, которым мы будем заниматься. Тип равномерной сходимости определяется системой $\mathcal{B}$, которую мы будем называть *базисом суммирования.* Разумеется, нам выгодно включить как можно больше множеств в систему $\mathcal{B}$, однако *все* конечные множества (обозначим их совокупность через $\mathcal{F}_\Gamma$) включить заведомо не удается.[1] Действительно, $u(G, \mathcal{F}_\Gamma)$ совпадает с пространством $l^1(\Gamma)$ всех абсолютно сходящихся рядов Фурье на группе $G$, а для него теорема об исправлении уже неверна (см., например, обсуждение в [6]). Следующее условие, помимо прочего, ограничивает "размер" базиса $\mathcal{B}$. Если $K$ – конечное подмножество группы $\Gamma$, обозначим через $K_{\mathcal{B}}$ объединение тех множеств $E \in \mathcal{B}$, для которых оба множества $K \cap E$ и $K \setminus E$ непусты (т.е. $E$ *разбивает* $K$).

**Определение 1.** *Базис суммирования $\mathcal{B}$ и $M$-достаточный набор $(R_1, \dots, R_k)$ подмножеств группы $\Gamma$ называются согласованными,*

[1] Если сама группа $\Gamma$ бесконечна – но только в этом случае задача об исправлении и содержательна.

*если для любого конечного множества* $K \subset \Gamma$ *набор* $(R_1 \setminus K_{\mathcal{B}}, \dots, R_k \setminus K_{\mathcal{B}})$ *является достаточным с тем же самым* $l$*-шаблоном* $M$.

В статье [1] рассматривалось одно конкретное семейство базисов $\mathcal{B}$, которое действительно было согласовано с достаточными парами – это проверялось во вспомогательной лемме. Здесь нам удобнее пока ввести условие согласованности как постулат, поскольку конкретные примеры базисов суммирования будут устроены сложнее, чем в [1].

**1.3. Пространство $U$ и основная теорема.** Пусть заданы шаблон $M$ и $M$-достаточный набор $R = (R_1, \dots, R_k)$ подмножеств группы $\Gamma$. Пусть еще $\mathcal{B}$ – базис суммирования в $\Gamma$. Обозначим через $u(G, \mathcal{B}, R_j)$ множество тех функций $f$ из $u(G, \mathcal{B})$, для которых $\widehat{f}(\gamma) = 0$ при $\gamma \notin R_j$. Наконец, пусть $U = U(G, \mathcal{B}, R)$ – это множество всех сумм вида $h = f_1 + \dots + f_k$, где $f_i \in u(G, \mathcal{B}, R_j)$, $j = 1, \dots, k$. Снабдим пространство $U$ нормой

$$\|h\|_U = \inf \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \|f_j\|_{u(G, \mathcal{B}, R_j)},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям функции $h$ в виде, указанном выше. Стоит отметить, что если множества $R_j$ попарно не пересекаются (а так и будет во всех интересных примерах), то такое представление единственно. Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

**Теорема 1.** *Предположим, что система* $R$ *и базис суммирования* $\mathcal{B}$ *согласованы. Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *и всякой функции* $f \in L^\infty(G)$ *существует функция* $g \in U$ *такая, что* $m\{f \neq g\} \leqslant \varepsilon$ *и* $\|g\|_U \leqslant C\varepsilon^{-D}\|f\|_\infty$. *Константы* $C$ *и* $D$ *не зависят от* $f$.

## §2. Обсуждение

**2.1.** Начнем с примеров, показывающих, как могут быть устроены достаточные наборы множеств. В статье [1] использовался только один шаблон, а именно, $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ (т.е. параметр $l$ равен 1). Как уже отмечалось, ему соответствует то, что во Введении было названо достаточными парами. Типичный пример достаточной пары $(R_1, R_2)$ в случае, когда $G$ – это тор $\mathbb{T}^n$, выглядит так. Пусть $V_k$ – попарно непересекающиеся шары в $\mathbb{R}^n$ с радиусами, стремящимися к бесконечности; положим $R_1 = \bigcup_{k \geqslant 1} (V_k \cap \mathbb{Z}^n)$, $R_2 = -R_1$.

Достаточные наборы с шаблоном $\{-1,2\} \subset \mathbb{Z}$ устроены несколько иначе. Для торов $\mathbb{T}^n$, например, очевидно, существуют $\{-1,2\}$-достаточные наборы $(R_1, R_2)$, для которых $R_1 \cap (-R_2) = \varnothing$. Это интересно и для группы окружности $\mathbb{T}$.

Важный пример $l$ шаблона с $l > 1$ доставляет набор $M_l = \{e_1, \dots e_l, -(e_1 + \dots + e_l)\}$ из $l+1$ элемента группы $\mathbb{Z}^l$. Здесь через $e_j$ обозначен $j$-й координатный орт, т.е. вектор, у которого на $j$-м месте стоит 1, а на остальных – нули. Очевидно, что набор $(R_1, \dots, R_{l+1})$ подмножеств группы $\Gamma$ является $M_l$-достаточным тогда и только тогда, когда для каждого конечного множества $K \subset \Gamma$ существуют такие характеры $\gamma_1, \dots, \gamma_{l+1} \in \Gamma$, что $\gamma_1 + \dots + \gamma_{l+1} = 0$ и $\gamma_j + K \subset R_j$, $j = 1, \dots, l+1$.

Для тора $\mathbb{T}^2$ в качестве $G$, примеры $M_2$-достаточных множеств получаются следующим образом. Рассмотрим конфигурацию из трех непересекающихся кругов одного радиуса $r$ с центрами на трех лучах, исходящих из начала координат под углом $120^\circ$ друг к другу; считаем, что центры удалены на равные расстояния от начала. См. рис. 1.

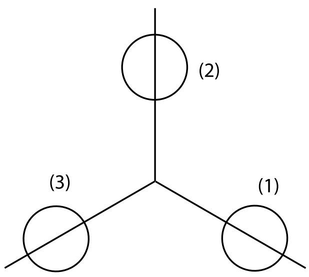


Рис. 1. Элемент построения.

Теперь рассмотрим последовательность таких конфигураций; пусть $r_s$ – радиусы кругов $s$-й конфигурации. Предположим, что $r_s \to \infty$ и что все круги в совокупности попарно не пересекаются. В остальном взаимное расположение конфигураций произвольно (каждая может быть повернута вокруг начала на какой-то угол относительно конфигурациии на рис. 1). Разные конфигурации не обязаны быть гомотетичны (отношение радиуса $r_s$ к расстоянию от центра круга до начала координат может быть разным для разных конфигураций). Искомый набор $(R_1, R_2, R_3)$ возникает так: $R_i$ – это объединение кругов, помеченных индексом $i$ $(i = 1, 2, 3)$ в разных конфигурациях, пересеченное с решеткой $\mathbb{Z}^2$. Заметим, что среди этих наборов есть такие, в которых $-R_i$ не пересекается ни с одним из множеств $R_1$, $R_2$, $R_3$.

Читатель легко представит себе, как выглядят похожие множества для шаблонов $M_l$ с другими $l$ в случае торов любой размерности. Нетрудно также представить себе и возможности, доставляемые более причудливыми шаблонами (например, $\{e_1, 5e_2, 10e_3, -e_1 - 5e_2 - 10e_3\}$ в случае $l = 3$ и т.п.).

Во всех этих примерах множества $R_i$, составляющие достаточный набор, – относительно небольшие подмножества группы Γ. Вообще говоря, не для всякой группы найдется достаточный набор из "малых" множеств, отвечающий произвольному наперед заданному шаблону. Так, если $G = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ – диадическая группа (соответственно, $\Gamma = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$), то, например, для 1-шаблона $M = \{-2, 2\}$ нет никаких $M$-допустимых наборов, кроме набора $(\Gamma, \Gamma)$. Все, однако, и в этом случае будет в порядке для шаблона $\{-1, 1\}$.

**2.2. При построении базисов суммирования** мы начнем примерно как в [1], а потом введем важное усовершенствование. Нам необходимо соблюсти баланс между двумя противоположными требованиями: с одной стороны, желательно включить в базис как можно больше множеств, а с другой – надо обеспечить условие согласованности, говорящее и о том, что слишком обширным базис быть не может. Описанная ниже конструкция – довольно громоздкая на первый взгляд. Однако мы увидим, что она удачно совмещает оба требования.

Пусть $\Delta$ – произвольное множество. Система $\mathcal{A}$ его подмножеств называется *блоком*, если она линейно упорядочена по включению, замкнута относительно образования любых пересечений и удовлетворяет условиям $\varnothing \in \mathcal{A}$ и $\cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \Delta$. Ясно, что если $\mathcal{A}$ – блок, то каждое конечное подмножество $E \subset \Delta$ содержится в некотором множестве из $\mathcal{A}$, и что среди таких множеств есть наименьшее, которое мы будем обозначать через $D_{\mathcal{A}}(E)$.

Рассмотрим конечный набор $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$ из $N$ блоков в дискретной группе Γ. Он называется *каркасом*, если все пересечения $A = A_1 \cap \ldots \cap A_N$, где $A_j \in \mathcal{A}_j$ при $1 \leqslant j \leqslant N$, конечны. Каждое такое множество $A$ называется *ячейкой*. Нетрудно понять, что если $A$ –

ячейка, то $A = \bigcap_{j=1}^{N} D_{\mathcal{A}_j}(A)$. Множество $\mathrm{om}\, A = \bigcup_{j=1}^{N} D_{\mathcal{A}_j}(A)$ называется *тенью* ячейки $A$. *Базисом суммирования* $\mathcal{B}$, порожденным каркасом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$, называется совокупность всех конечных подмножеств $E$ группы $\Gamma$ таких, что для любой ячейки $A$ либо $A \subset E$, либо $E \subset \mathrm{om}\, A$.

Из линейной упорядоченности каждого блока по включению следует, что *все ячейки заведомо принадлежат базису суммирования.* В [1] только ячейками дело и ограничивалось. Наше определение включает в базис значительно более широкий класс множеств. Остановимся на этом подробнее.

Пусть для начала каркас составлен *только из одного* блока $\mathcal{A}$. Тогда все множества $A \in \mathcal{A}$ конечны. Перенумеруем их в порядке возрастания: $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $\bigcup_{k \geqslant 0} A_k = \Gamma$.

Пусть $E$ – непустое конечное подмножество группы $\Gamma$. Найдем наименьший индекс $k$ такой, что $E \subset A_k$. Легко понять, что для того, чтобы $E$ принадлежало базису суммирования $\mathcal{B}$, построенному по нашему каркасу, необходимо и достаточно, чтобы $A_{k-1} \subset E$ (поскольку $E$ непусто, разумеется, $k \geqslant 1$, так что множество $A_{k-1}$ имеет смысл). Иными словами, $\mathcal{B}$ состоит из множеств вида $A_j \cup C$, где $C$ – *произвольное* подмножество разности $A_{j+1} \setminus A_j \stackrel{def}{=} \Delta_j$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$. Это означает следующее. Занумеруем характеры группы $G$ в последовательность $\{\gamma_k\}$ так, чтобы сначала шли все элементы множества $\Delta_0$, за ними – множества $\Delta_1$, затем – $\Delta_2$ и т.д. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(\gamma_k)\gamma_k$ сходится равномерно для любой функции $f$ из $u(G, \mathcal{B})$, но при этом еще и

$$\sup_j \sum_{\gamma \in \Delta_j} |\widehat{f}(\gamma)| \leqslant c \|f\|_{u(G,\mathcal{B})}.$$

Пусть, например, $G = \mathbb{T}$ (а $\Gamma = \mathbb{Z}$), шаблон – это множество $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ (как было в [1]), достаточный набор имеет вид $(-R, R)$, где $R = \bigcup_{k \geqslant 1} (2^{2k}, 2^{2k+1}]$, а каркас имеет единственный блок $\mathcal{A}$, состоящий из пустого множества и отрезков $A_j = [-2^j, 2^j]$. Определим по этим данным пространство $U$ как перед теоремой 1. Тогда $U$ состоит из функций, у которых оба ряда $\sum_{n \geqslant 0} \widehat{f}(n) z^n$ и $\sum_{n < 0} \widehat{f}(n) z^n$ сходятся равномерно, но кроме того еще и суммы чисел $|\widehat{f}(j)|$ по двоичным интервалам, составляющим множества $R$ и $-R$, равномерно ограничены, а на дополнительных интервалах коэффициенты Фурье равны нулю. Далее, в описанной ситуации *очевидно*, что базис суммирования и достаточный набор согласованы. Значит, теорема 1 позволяет исправлять (ограниченные) измеримые функции на окружности до функций с перечисленными свойствами.

Заметим еще, что при переходе от последовательности $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j\geqslant 0}$ к некоторой ее подпоследовательности базис $\mathcal{B}$ расширяется.

Обращаясь к каркасам с несколькими блоками, упомянем сразу конкретное обстоятельство, послужившее мотивом для нашего определения базиса суммирования. Рассмотрим в качестве $G$ $n$-мерный тор $\mathbb{T}^n$ при $n > 1$, тогда $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Назовем конечное множество $E \subset \Gamma$ *солидным*, если вместе с любой своей точкой $a = (a_1, \dots, a_n)$ оно содержит и все точки $b = (b_1, \dots, b_n)$, для которых $|b_j| \leqslant |a_j|$ при всех $j$. Методом, отличным от наших, в статье [3] было показано, что на торе $\mathbb{T}^n$ возможно исправление до функций, равномерная сходимость ряда Фурье которых определяется базисом из *всех* солидных множеств. (При таком выборе базиса равномерно сходятся частичные суммы ряда Фурье по прямоугольникам и одновременно частичные суммы по шарам и т.п.). Мы увидим, что этого (и даже большего) можно достичь и нашими методами. Удобно начать с полезного описания базиса $\mathcal{B}$, порожденного произвольным каркасом.

Итак, пусть имеется каркас $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ в произвольной дискретной группе $\Gamma$. Для каждой точки $x \in \Gamma$ рассмотрим наименьшее множество из блока $\mathcal{A}_j$, содержащее $x$. Мы будем обозначать его через $D_j(x)$ вместо "правильного" обозначения $D_{\mathcal{A}_j}(\{x\})$, введенного выше.

Обозначим ячейку $D_1(x)\cap\ldots\cap D_N(x)$ через $D(x)$ (это – наименьшая ячейка, содержащая точку $x$). Пусть $d_j(x)$ – это объединение всех множеств $A \in \mathcal{A}_j$, не содержащих $x$. Поскольку система $\mathcal{A}_j$ линейно упорядочена по включению, ясно, что $d_j(x) \subset D_j(x)$. Положим $d(x) = d_1(x) \cap \ldots \cap d_N(x)$.

**Предложение 1.** (а) *Множество $d(x)$ является ячейкой.*

(б) *Конечное множество $E$ принадлежит базису $\mathcal{B}$, порожденному каркасом $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$, тогда и только тогда, когда $d(x) \subset E$ при всяком $x \in E$.*

**Доказательство.** (а) Ячейка $D(x)$ конечна, поэтому конечно и множество $d(x)$. Для каждого $y \in d(x)$ и для каждого $j$ найдем множество $C_j^y \in \mathcal{A}_j$ такое, что $y \in C_j^y$, но $x \notin C_j^y$. Поскольку система $\mathcal{A}_j$ линейно упорядочена, в конечном наборе $\{C_j^y : y \in d(x)\}$ (индекс $j$ здесь зафиксирован) существует самое широкое множество, которое мы обозначим через $C_j$. Ясно, что $C_j \supset d(x)$, поэтому $d(x)$ содержится в ячейке $C_1 \cap \ldots \cap C_N$. С другой стороны, эта ячейка содержится в $d(x)$ по определению.

(б) Пусть сначала $E \in \mathcal{B}$. Предположим, что $d(x) \not\subset E$ для некоторого $x \in E$. Тогда множество $E$ должно лежать в тени ячейки $d(x)$, следовательно, в объединении множеств $C_j$, $j = 1, \ldots, N$, из доказательства пункта (а). В частности, $x \in C_{j_0}$ для некоторого индекса $j_0$, однако $C_{j_0}$ не может содержать $x$ по определению множества $d(x)$.

Обратно, пусть конечное множество $E$ содержит $d(x)$ вместе с каждой своей точкой $x$. Возьмем произвольную ячейку $A$ и положим $A_j = D_{\mathcal{A}_j}(A)$, $j = 1, \ldots, N$. Тогда $A = A_1 \cap \ldots \cap A_N$. Предположим, что $E$ не содержится в множестве $\operatorname{om} A = A_1 \cup \ldots \cup A_N$ и возьмем точку $y \in E \setminus (\operatorname{om} A)$. Тогда ясно, что $A_j \subset d_j(y)$ при всех $j$, следовательно, $A_1 \cap \ldots \cap A_N \subset d_1(y) \cap \ldots \cap d_N(y) = d(y) \subset E$. $\square$

**Следствие 1.** *Базис $\mathcal{B}$ состоит в точности из объединений $\bigcup_{x \in F} (d(x) \cup \{x\})$, где $F$ – конечное подмножество группы $\Gamma$.*

Действительно, всякое множество из базиса есть такое объединение ввиду утверждения (б) предложения 1. Чтобы убедиться в обратном, достаточно заметить, что если $A$ – произвольная ячейка и $y \in A$, то $d(y) \subset A$. В частности, $d(y) \subset d(x)$ при любом $y \in d(x)$. $\square$

Перейдем теперь к конкретным примерам базисов суммирования в случае, когда $G = \mathbb{T}^n$, $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Рассмотрим в группе $\mathbb{Z}^n$ каркас из $N$ блоков $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$, где $\mathcal{A}_j = \{A_k^{(j)}\}_{k=0}^{\infty}$, $A_0^{(j)} = \varnothing$, а при $k \geqslant 1$ множество $A_k^{(j)}$ состоит из точек, у которых $j$-я координата по модулю не превосходит $k-1$. Ячейки этого каркаса – прямоугольные параллелепипеды с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям. Далее, для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ очевидны равенства $D(x) = [-|x_1|, |x_1|] \times \ldots \times [-|x_n|, |x_n|]$ и $d(x) = (-|x_1|, |x_1|) \times \ldots \times (-|x_n|, |x_n|)$. Отсюда вытекает, что *базис суммирования $\mathcal{B}$, порожденный этим каркасом, содержит все солидные множества.*

В действительности предложение 1 дает больше (солидные множества – это конечные объединения ячеек $D(x)$, а мы могли бы объединять множества $\{x\} \cup d(x)$, см. следствие 1). Эта дополнительная информация становится все более и более существенной, если мы будем прореживать каждую из последовательностей $\{A_k^{(j)}\}_{k=0}^{\infty}$. Как и в случае единственного блока, после такой операции “все будет только лучше”.

Итак, переопределим блоки $\mathcal{A}_j$, взяв в качестве $A_k^{(j)}$ при $k \geqslant 1$ множество тех точек, у которых $j$-я координата по модулю не превосходит $2^k$ (как и раньше, $A_0^{(j)} = \varnothing$). Тогда $D(x)$ и $d(x)$ (в случае, если $d(x)$ не вырождается) – это по прежнему 2 прямоугольных параллелепипеда, но теперь больший из них получается из меньшего растяжением вдвое относительно их общего центра. Отсюда легко усмотреть, что *базис $\mathcal{B}$ содержит все множества вида $X \cup V$, где $X$ – объединение конечного числа ячеек, а $V \subset 2X \setminus X$.*

Действительно, проверим, что $d(y) \subset X$ для каждого $y \in X \cup V$ (после этого достаточно будет сослаться на следствие 1). Пусть $X$ есть объединение ячеек $C_1, \ldots, C_k$. Если $y \in C_i$ для некоторого $i$, то, очевидно, $d(y) \subset C_i$. Если же $y \in 2C_i \setminus C_i$ для некоторого $i$, то из вида каркаса легко заключить, что в этом случае тоже $d(y) \subset C_i$.

Рассмотрим теперь пример каркаса из четырех блоков $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ для двумерного тора $\mathbb{T}^2$: $\mathcal{A}_j = \{A_k^{(j)}\}_{k=0}^{\infty}$, где $A_0^{(j)} = \varnothing$, а при $k > 0$ множество $A_k^{(j)}$ состоит из пар $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, для которых: $|m_1| \leqslant k-1$, если $j = 1$; $|m_2| \leqslant k-1$, если $j = 2$; $|m_1 + m_2| \leqslant k-1$, если $j = 3$; наконец, $|m_1 - m_2| \leqslant k-1$, если $j = 4$. Каждая ячейка является пересечением 4 прямолинейных полос (“горизонтальной”, “вертикальной” и двух “диагональных”) и может быть 4-, 6- или 8-угольником. Множества $D(x)$ и $d(x)$ – всегда параллелограммы, их вид зависит от того, в какой из 8 углов, на которые плоскость разбивается координатными осями и биссектрисами координатных углов, попадает точка $x$ (см. рис. 2 и 3).

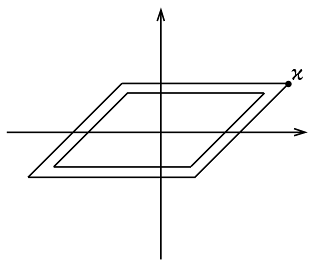


Рис. 2. Параллелограммы $D(x)$ и $d(x)$.

Читатель легко представит себе, сколь причудливо может выглядеть произвольное конечное объединение множеств вида $\{x\} \cup d(x)$,

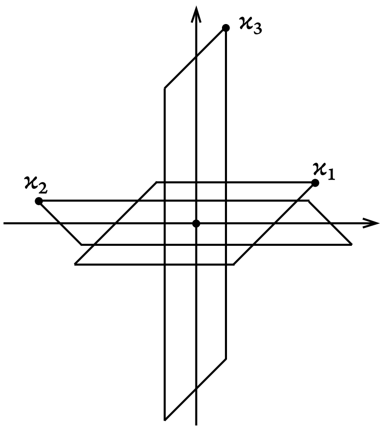


Рис. 3. Параллелограмм $D(x)$ при различных расположениях точки $x$.

т.е. произвольное множество базиса $\mathcal{B}$.

**2.3. Небольшое усложнение.** Возвратимся к общей ситуации. Эффекта, похожего на тот, что возникает при "прореживании" блоков $\mathcal{A}_j$, можно добиться несколько иным способом.

*Оснащением* каркаса $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ называется произвольное *несжимающее* отображение $\Phi : \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_N \to \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_N$; термин "несжимающее" означает, что если $(B_1, \dots, B_N) = \Phi(A_1, \dots, A_N)$, то $B_j \supset A_j$ при $j = 1, \dots, N$. $\Phi$-тенью ячейки $A = A_1 \cap \dots \cap A_N$ называется объединение $B_1 \cup \dots \cup B_N$, где $(B_1, \dots, B_N) = \Phi(D_{\mathcal{A}_1}(A), \dots, D_{\mathcal{A}_N}(A))$. Обозначение: $\mathrm{om}_\Phi A$.

Базис суммирования $\mathcal{B}$, порожденный оснащенным каркасом $(A_1, \dots, A_N; \Phi)$, состоит, по определению, из таких множеств $B$, что для любой ячейки $A$ либо $A \subset B$, либо $B \subset \mathrm{om}_\Phi A$.

Рассмотрим случай *простого* оснащения, когда отображение $\Phi$ имеет вид $\Phi(A_1, \dots, A_N) = (\Phi_1(A_1), \dots, \Phi_N(A_N))$, где $\Phi_j$ – несжимающее и *возрастающее* отображение блока $\mathcal{A}_j$ в себя $(1 \leqslant j \leqslant N)$. (Термин "возрастащее" означает, что $\Phi_j(A) \subset \Phi_j(B)$ всякий раз, когда $A$, $B \in \mathcal{A}_j$ и $A \subset B$.) Остановимся, например, на уже встречавшихся нам $n$ блоках в группе $\mathbb{Z}^n$: $j$-й блок состоит из полос $|m_j| \leqslant t$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ($m_j$ – $j$-я координата точки $m \in \mathbb{Z}^n$).[2] Типичный пример

[2] Строго говоря, встречались нам не совсем эти блоки – число $t$ пробегало лишь целые значения.

простого оснащения – это когда $\Phi_j$ сопоставляет такой полосе полосу вдвое большей ширины.

Опишем (снова в общей ситуации) достаточно широкий подкласс базиса суммирования $\mathcal{B}$ в случае простого оснащения. По аналогии с группой $\mathbb{Z}^n$, назовем конечное множество $E \subset \Gamma$ *солидным*, если $D(x) \subset E$ для любого $x \in E$. Обозначим еще через $D_\Phi(x)$ ячейку $\Phi_1(D_1(x)) \cap \ldots \cap \Phi_N(D_N(x))$. Далее, пусть $E_\Phi = \bigcup\limits_{x \in E} D_\Phi(x)$ для $E \subset \Gamma$.

**Предложение 2.** *Любое множество вида $E \cup C$, где $E$ – солидное множество, а $C$ – произвольное подмножество в $E_\Phi \setminus E$, принадлежит базису $\mathcal{B}$.*

**Доказательство.** Пусть $A$ – произвольная ячейка, $A_j = D_j(A)$ $(j = 1, \ldots, N)$. Предположим, что $E \cup C \not\subset \operatorname{om}_\Phi A$ и покажем, что тогда $A \subset E \cup C$. Возьмем любую точку $y \in E \cup C$, для которой $y \notin \operatorname{om}_\Phi A$, т.е. существует такая точка $x \in E$, что $y \in D_\Phi(x) = \Phi_1(D_1(x)) \cap \ldots \cap \Phi_N(D_N(x))$. Далее, если $D_{j_0}(x) \subset A_{j_0}$ для некоторого индекса $j_0$, то $y \in \Phi_{j_0}(D_{j_0}(x)) \subset \Phi_{j_0}(A_{j_0}) \subset \operatorname{om}_\Phi A$, а это неверно. Следовательно, $A_j \subset D_j(x)$ для всех $j$ (вспомним, что все блоки линейно упорядочены по включению), т.е. $A \subset D(x) \subset E \subset E \cup C$. $\square$

В рассмотренном выше стандартном примере для тора (когда все отображения $\Phi_j$ – растяжения полос вдвое) получается, что базису $\mathcal{B}$ принадлежат все множества вида $E \cup C$, где $E$ – солидное конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$, а $C \subset 2E \setminus E$.

**2.4. Условие согласования.** Напомним, что базис суммирования $\mathcal{B}$ называется согласованным с $M$-достаточным набором $(R_1, \ldots, R_k)$ подмножеств группы $\Gamma$, если для любого конечного множества $K \subset \Gamma$ набор $(R_1 \setminus K_\mathcal{B}, \ldots, R_k \setminus K_\mathcal{B})$ является достаточным с тем же самым шаблоном $M$. Здесь через $K_\mathcal{B}$ обозначено объединение тех множеств $E \in \mathcal{B}$, которые разбивают $K$ (т.е. оба множества $K \cap E$ и $K \setminus E$ непусты).

В дальнейшем мы будем предполагать, что базис $\mathcal{B}$ порожден оснащенным каркасом $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N; \Phi)$ в группе $\Gamma$. Пусть $K \subset \Gamma$ – конечное множество и пусть $A$ – произвольная ячейка, содержащая $K$. Существование такой ячейки следует из линейной упорядоченности каждого блока $\mathcal{A}_j$ по включению и равенства $\cup\{C : C \in \mathcal{A}_j\} = \Gamma$ при каждом $j$. Если множество $E$ из базиса $\mathcal{B}$ разбивает множество $K$, то тем более оно разбивает и множество $A$, а тогда $E$ содержится в $\operatorname{om}_\Phi A$. Далее, по определению $\operatorname{om}_\Phi A = B_1 \cup \ldots \cup B_N$ для некоторых множеств $B_j$, $B_j \in \mathcal{A}_j$ при $1 \leqslant j \leqslant N$. Таким образом, согласованность гарантируется следующим условием.

$$\begin{gathered}\text{Для любых множеств} \quad B_j \in \mathcal{A}_j,\ j = 1, \dots, N, \quad \text{набор} \\ (R_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j, \dots, R_k \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j) \text{ является } M\text{-достаточным.}\end{gathered} \tag{C}$$

Мы опишем широкий класс каркасов, удовлетворяющих условию (C) *для любого* $M$-достаточного набора $(R_1, \dots, R_k)$. Назовем блок $\mathcal{D}$ подмножеств группы $\Gamma$ *правильным* по отношению к $l$-шаблону $M = \{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\}$ (или *$M$-правильным*), если выполнены следующие два условия.

(a) Каково бы ни было множество $D \in \mathcal{D}$, найдется набор характеров $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma^l$ такой, что $\langle m^{(j)}, \gamma\rangle \notin D$ при всех $j = 1, \dots, k$.

(b) Для любых $D_1$, $D_2 \in \mathcal{D}$ найдется множество $D_3 \in \mathcal{D}$ такое, что $D_1 - D_2 \subset D_3$.

**Предложение 3.** *Если все блоки $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ некоторого каркаса в группе $\Gamma$ являются $M$-правильными, то условие $(C)$ выполнено для любого $M$-достаточного набора $(R_1, \dots, R_k)$. В частности, оснащенный каркас $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N; \Phi)$ с произвольным оснащением $\Phi$ порождает базис, согласованный с любым $M$-достаточным набором.*

Ниже будут приведены примеры, показывающие, что условие $M$-правильности – вполне "рабочее" и обеспечивается легко. Но сначала мы докажем предложение 3. Оно сводится к последовательному применению $N$ раз следующего утверждения.

**Предложение 3′.** *Если $\mathcal{D}$ – $M$-правильный блок, то набор $(R_1 \setminus D, \dots, R_k \setminus D)$ является $M$-достаточным для любого $M$-достаточного набора $(R_1, \dots, R_k)$ и любого множества $D$ из блока $\mathcal{D}$.*

Для доказательства предложения 3′ сначала сформулируем лемму.

**Лемма 1.** *Если $\mathcal{D}$ – $M$-правильный блок и $H \in \mathcal{D}$, то для любого $t \in \mathbb{N}$ найдутся $t$ точек $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(t)} \in \Gamma^l$, для которых $\langle m^{(j)}, \lambda^{(u)} - \lambda^{(v)}\rangle \notin H$ при всех $j$ и всех $u \neq v$.*

**Доказательство** – индукция. Точку $\lambda^{(1)}$ выбираем произвольно. Пусть $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(t)}$ уже выбраны. Нужно добавить к ним еще одну точку $\lambda^{(t+1)}$. Пусть $H_1$ – множество из блока $\mathcal{D}$, содержащее все точки $\langle m^{(j)}, \lambda^{(i)}\rangle$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant t$. Согласно условию (b), в блоке $\mathcal{D}$

найдется такое множество $H_2$, что $H_1 - H \subset H_2$. В качестве $\lambda^{(t+1)}$ достаточно взять любую точку $\gamma$, для которой $\langle m^{(j)}, \gamma\rangle \notin H_2$ при всех $j$, $1 \leqslant j \leqslant k$ (см. условие (a)). $\square$

**Доказательство предложения 3′.** Пусть, как и ранее, $k$ – число точек в шаблоне $M$; пусть множество $\Lambda \subset \Gamma^l$ содержит $k+1$ точку. Рассмотрим произвольное конечное множество $K \subset \Gamma$. Множество $K_1 = \bigcup_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ 1\leqslant j\leqslant k}} (\langle m^{(j)}, \lambda\rangle + K)$ тоже конечно, а потому найдется точка $\mu \in \Gamma^{(l)}$ такая, что $\langle m^{(s)}, \mu\rangle + K_1 \subset R_s$, $1 \leqslant s \leqslant k$. В частности,

$$\langle m^{(j)}, \lambda+\mu\rangle + K \subset R_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

при всех $\lambda \in \Lambda$.

Предложение было бы доказано, если бы оказалось, что для некоторого $\lambda \in \Lambda$ объединение $\bigcup_{1\leqslant j\leqslant k} (\langle m^{(j)}, \lambda+\mu\rangle + K)$ не пересекает множества $D$. Предположим, что это не так, тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется такой номер $j_\lambda$, что

$$\langle m^{(j_\lambda)}, \lambda+\mu\rangle \in D - K.$$

Поскольку число точек в множестве $\Lambda$ равно $k+1$, найдутся $\alpha$, $\beta \in \Lambda$, для которых индексы $j_\alpha$ и $j_\beta$ совпадают. Пусть $i$ – общее значение этих индексов, тогда

$$\langle m^{(i)}, \alpha-\beta\rangle = \langle m^{(i)}, \alpha+\mu\rangle - \langle m^{(i)}, \beta+\mu\rangle \in D - K - (D-K).$$

Однако множество $\Lambda$ с самого начала можно выбрать так, чтобы последнее соотношение не выполнялось ни для каких $\alpha$, $\beta \in \Lambda$ и ни для какого $i$. Действительно, в силу условия (b) правая часть этого соотношения содержится в некотором множестве $H \in \mathcal{D}$, и достаточно применить лемму 1 с $t = k+1$ к этому $H$. $\square$

**2.4.1. Примеры.** Мы ограничимся примерами правильных блоков – составить каркас из нескольких блоков нетрудно. Условие (a) из определения $M$-правильности не требует особых комментариев – обычно сразу видно, выполнено оно или нет. Заметим, что препятствием может здесь служить наличие элементов конечного порядка в группе $\Gamma$ (см. замечание о диадической группе в п. 2.1).

Условие (b) по существу говорит о некоей “равномерной структуре” на $\Gamma$, в каком-то смысле согласованной “в бесконечности” со стандартной равномерной структурой дискретной группы. Понятно поэтому, что правильные блоки порождаются “равномерно непрерывными” (термин не нужно понимать слишком буквально) отображениями группы $\Gamma$ в равномерные пространства.

Пусть, например, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\nu$ – ненулевое линейное отображение. Множества $\{\lambda \in \mathbb{Z}^n : |L(\lambda)| \leqslant t\}$, $t > 0$, дополненные еще пустым множеством, образуют блок в $\mathbb{Z}^n$ (через $|\cdot|$ обозначена евклидова норма), который, очевидно, удовлетворяет условию (b). В п. 2.2 и 2.3 мы рассматривали каркасы в группе $\mathbb{Z}^n$ именно из таких блоков с $\nu = 1$; см. также [1]. Однако отображение $L$ можно и не считать линейным: условие (b) гарантируется, например, оценкой $|L(\lambda - \mu)| \leqslant F(|L(\lambda)|, |L(\mu)|)$, $\lambda$, $\mu \in \mathbb{Z}^n$, где $F$ – *любая* неотрицательная конечная функция на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Это, в частности, ведет к блокам из “криволинейных полос”, см. рис. 4. Заметим, что в соответствующем базисе суммирования могут содержаться очень причудливые множества

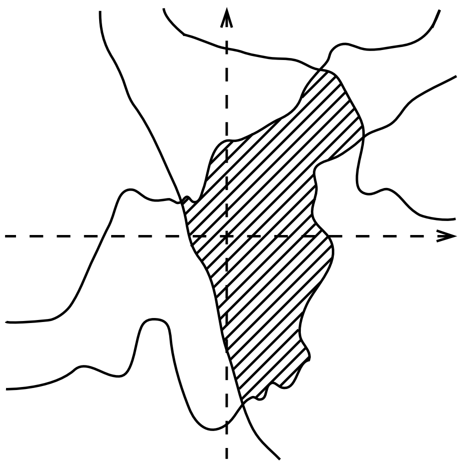

Рис. 4. Типичные ‘‘криволинейные полосы’’ из двух разных блоков в $\mathbb{Z}^2$. Заштрихована ‘‘криволинейная ячейка’’.

Укажем еще, что в каком-то смысле “криволинейные” полосы могут быть начертаны практически "свободным влечением руки" внутри "прямолинейных полос" (разумеется, надо следить за тем, чтобы получился блок). Точнее, пусть $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$ – два блока. Будем говорить, что блок $\mathcal{C}$ *подчинен* блоку $\mathcal{D}$, если для всякого множества $C \in \mathcal{C}$ найдется множество $D \in \mathcal{D}$, для которого $C \subset D$. Назовем блоки $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ сравнимыми, если каждый из них подчинен другому. Точная форма приведенного выше нестрогого утверждения такова.

**Лемма 2.** *Если два блока сравнимы и один из них $M$-правилен, то $M$-правилен и другой.* □

Приведем еще один класс примеров, в которых выполнено условие (b) (в них, кстати, и условие (a) совсем прозрачно). Именно, таков произвольный блок $\mathcal{D}$, представляющий собой последовательность $\varnothing = D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$ *конечных* подмножество группы $\Gamma$, обладающую тем свойством, что любое конечное множество $K \subset \Gamma$ содержится в $D_j$ при некотором $j$.

Мы воздерживаемся от дальнейших комментариев.

## §3. Доказательство теоремы 1

Теорема 1 доказывается практически так же, как и главный результат статьи [1], поэтому мы лишь наметим рассуждения.

**3.1. Разбиение функции на 2 слагаемых.** Как показано в [1] (см. лемму 2 и рассуждения после нее в той статье), достаточно доказать следующее утверждение. В нем мы сохраняем обозначения теоремы 1.

**Теорема о разложении.** *Найдется число $r$, $0 < r < 1$, со следующими свойствами. Каковы бы ни были функция $f \in L^\infty(G)$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$, и число $\eta > 0$, существуют функции $g \in U$ и $h \in L^r(\mu)$ такие, что $f = g + h$, $\|g\|_U \leqslant \eta$ и $\|h\|_{L^r(G)} \leqslant C\eta^{-\beta}$ ($C, \beta$ – положительные постоянные, не зависящие от $f$).*

**3.2.** Как и в [1], сначала мы будем разбивать *тригонометрические полиномы* в сумму двух слагаемых со свойствами, даже несколько более сильными в сравнении с теоремой о разложении. Напомним, что шаблон $M$ – это подмножество $\{m^{(1)}, \dots, m^{(k)}\}$ группы $\mathbb{Z}^l$, удовлетворяющее условиям теоремы $A$. Согласно этой теореме, на торе $\mathbb{T}^l$ существует тригонометрический полином вида

$$u_x(z) = \sum_{1 \leqslant s \leqslant k} a_s z_1^{m_1^{(s)}} \dots z_l^{m_l^{(s)}} \tag{2}$$

(через $m_s^{(j)}$ обозначены компоненты точки $m^{(j)} \in \mathbb{Z}^l$) такой, что для некоторого $r$, $0 < r < 1$, имеем

$$\varepsilon = \left( \int\limits_{\mathbb{T}^l} |1 - u(z)|^r \frac{dz}{(2\pi)^l} \right)^{1/r} < 1. \tag{3}$$

Напомним, что $\mathcal{P}(G)$ обозначает множество тригонометрических полиномов (т.е. линейных комбинаций характеров) на группе $G$. Мы снабдим это множество нормой пространства $l^1(\Gamma)$: если $p = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \gamma$, то $|||p||| = \sum |c_\gamma|$.

**Лемма 3.** *Пусть $r$ – число из формулы* (3). *Существует такая постоянная $c > 0$, что для любого $\xi \geqslant c$, любого $M$-достаточного набора $(R_1, \dots, R_k)$ подмножеств группы $\Gamma$ и любого $p \in \mathcal{P}(G)$ найдутся тригонометрические полиномы $q_1, \dots, q_k$ на $G$ со следующими свойствами*: *при каждом $j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, спектр тригонометрического полинома $q_j p$ лежит в $R_j$ и, кроме того, $|||q_j||| \leqslant \xi$ и $\|(1 - \sum\limits_{s=1}^{k} q_s)p\|_{L^r(G)} \leqslant c\xi^{-\beta}\|p\|_{L^r(G)}$. Здесь $c$ и $\beta$ не зависят от $p$, $\xi$ и $M$-достаточного набора $(R_1, \dots, R_k)$.*

**Доказательство.** Положим $a = \max_{1 \leqslant s \leqslant k} |a_s|$, где числа $a_s$ – коэффициенты полинома (2). Пусть $t \in \mathcal{P}(G)$. Обозначим через $K$ носитель преобразования Фурье функции $t$. По определению $M$-достаточного набора множеств, существует набор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \Gamma^l$, для которого $\langle m^{(j)}, \gamma \rangle + K \subset R_j$ при $1 \leqslant j \leqslant k$. Далее, для этого набора характеров $\gamma$ можно найти такие комплексные числа $\zeta_1, \dots, \zeta_l$, $|\zeta_j| = 1$, что

$$\left\| \left( 1 - \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} a_j (\zeta_1 \gamma_1)^{m_1^{(j)}} \dots (\zeta_l \gamma_l)^{m_l^{(j)}} \right) t \right\|_{L^r(G)}^r \leqslant \varepsilon^r \|t\|_{L^r(G)}^r,$$

где число $\varepsilon$ определено формулой (3). Действительно, если проинтегрировать левую часть этого неравенства по $\zeta_1, \dots, \zeta_l$ по нормированной мере Лебега на торе $\mathbb{T}^n$, то в силу той же формулы (3) мы получим правую часть.

Используя это наблюдение, возьмем функцию $p$ из формулировки леммы и построим по индукции последовательности $\{q_j^{(n)}\}_{n \geqslant 0}$ ($j =$

$1, \dots, k$) тригонометрических полиномов на группе $G$ так, чтобы

$$\operatorname{supp} \widehat{(pq_j^{(n)})} \subset R_j, \quad j = 1, \dots, k, \tag{4}$$

$$|||q_j^{(n+1)}||| \leqslant |||q_j^{(n)}||| + a\bigl(1 + \sum_{s=1}^{k} |||q_s^{(n)}|||\bigr), \ 1 \leqslant j \leqslant k, \tag{5}$$

$$\|\bigl(1 - \sum_{s=1}^{k} q_s^{(n)}\bigr)p\|_{L^r(G)} \leqslant \varepsilon^n \|p\|_{L^r(G)}. \tag{6}$$

Делается это следующим образом. Положим $q_j^{(0)} = 0$ при всех $j$. Если для некоторого $n$ полиномы $q_1^{(n)}, \dots, q_k^{(n)}$ уже построены, рассмотрим полином $t = \bigl(1 - \sum_{s=1}^{k} p_s^{(n)}\bigr)p$ и найдем для него характеры $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ и числа $\zeta_1, \dots, \zeta_l$, как было описано выше. После этого положим

$$q_j^{(n+1)} = q_j^{(n)} + a_j(\zeta_1\gamma_1)^{m_1^{(j)}} \dots (\zeta_l\gamma_l)^{m_l^{(j)}} \bigl(1 - \sum_{s=1}^{k} q_s^{(n)}\bigr).$$

Соотношения (4)–(6) проверяются легко. Из (5) видно, что $|||q_s^{(n)}||| \leqslant b^n$ для некоторого $b > 1$ (число $b$ зависит только от $a$ и $k$). Вместе с (6) это доказывает лемму. $\square$

**3.3. Покрывающие окрестности.** За доказательствами утверждений этого пункта мы отсылаем читателя к [1] или к более ранней статье [6]. Компактная окрестность $\mathcal{V}$ единицы в группе $G$ называется *покрывающей*, если $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}$ и существует такое конечное семейство $\{x_i\}$ точек группы $G$, что $G = \bigcup_i (x_i + \mathcal{V})$ и $(x_i + \mathcal{V}) \cap (x_j + \mathcal{V})$ имеет меру ноль при $i \neq j$.

С каждой покрывающей окрестностью $\mathcal{V}$ свяжем функции

$$\alpha_i(t) = (m\mathcal{V})^{-1} \mathbb{1}_{\mathcal{V}} * \mathbb{1}_{\mathcal{V}}(tx_i^{-1}), \quad t \in G \tag{7}$$

($x_i$ – точки, упоминавшиеся выше). Ясно, что $\sum_i \alpha_i \equiv 1$ и $\|\alpha_i\|_{L^\infty(G)} = \|\widehat{\alpha}_i\|_{l^1(\Gamma)} = 1$. Кроме того, $\alpha_i(x_i) = 1$. Далее, $\|\alpha_i\|_{L^r} \leqslant m(\mathcal{V}\cdot\mathcal{V})^{1/r}$. Если размерность группы $G$ конечна, то у точки $1 \in G$ имеется база из покрывающих окрестностей, которые можно выбрать так, что $m(\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}) \leqslant 2^{\dim G} m(\mathcal{V})$ для каждой окрестности из базы.

**3.4. Завершение доказательства теоремы о разложении.** Пусть $f$ – функция из формулировки этой теоремы. Пусть $\sigma$ – маленькое положительное число. Найдется такая непрерывная функция $\varphi$ на $G$, что $\|\varphi\|_{C(G)} \leqslant 1$ и $\|f-\varphi\|_{L^r(G)} \leqslant \sigma$. Далее, в базе покрывающих окрестностей единицы, о которой говорилось выше, найдется такая окрестность $\mathcal{V}$, что $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant \sigma$, если $xy^{-1} \in \mathcal{V}\cdot\mathcal{V}$. Пусть $x_i$ – точки, соответствующие окрестности $\mathcal{V}$, как описано в п. 3.3. Тогда

$$\|\varphi - \sum \varphi(x_i)\alpha_i\|_\infty \leqslant \sigma \quad \text{и} \quad \||\varphi| - \sum |\varphi(x_i)|\alpha_i\|_\infty \leqslant \sigma,$$

где функции $\alpha_i$ определены формулой (7). Тем более

$$\|\varphi - \sum \varphi(x_i)\alpha_i\|_{L^r(G)} \leqslant \sigma$$

и, значит, $\|f - \sum \varphi(x_i)\alpha_i\|_{L^r(G)} \leqslant 2^{1/r}\sigma$. В дальнейшем удобно считать, что точки $x_i$ и функции $\alpha_i$ занумерованы натуральными числами от 1 до $N$. Отметим еще неравенство

$$m(\mathcal{V})\sum|\varphi(x_i)|^r = \int_G |\sum_i \varphi(x_i)\mathbb{1}_{x_i\mathcal{V}}|^r \leqslant \int_G |\varphi|^r + \sigma^r \leqslant 2, \tag{8}$$

если $\sigma \leqslant 1$.

Пусть $\delta$ – еще одно малое положительное число. Найдем такие тригонометрические полиномы $p_i$ на $G$, что $\|\widehat{p}_j - \widehat{\alpha}_j\|_{l^1(\Gamma)} \leqslant \delta$. Тогда $\|f - \sum\limits_j \varphi(x_i)p_i\|_{L^r} \leqslant (2\sigma^r + (\delta N\sigma)^r)^{1/r} \leqslant 3^r\sigma$, если $\delta$ достаточно мало.

Дальнейшая стратегия состоит в том, чтобы применить лемму 3 к каждому из полиномов $p_i$. Сделать это, однако, надо аккуратно, как описывается в следующей лемме. Число $\eta$ в ней взято из формулировки теоремы о разложении. Отметим, что в той теореме при небольших $\eta$ годится разложение $f = 0 + f$ $(g = 0, h = f)$, поэтому без потери общности можно считать $\eta$ достаточно большим. Это полезно ввиду ограничения снизу на константу $\xi$ в лемме 3.

**Лемма 4.** *На группе $G$ найдутся тригонометрические полиномы $q_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant N; 1 \leqslant j \leqslant k)$ со следующими свойствами*:

(i) $\|p_i(1 - \sum\limits_{1\leqslant s\leqslant k} q_{is})\|_{L^r(G)} \leqslant C\eta^{-\beta}\|p_i\|_{L^r(G)}$;

(ii) $|||q_{ij}||| \leqslant \eta$ *при всех* $i$ *и* $j$; $\operatorname{supp}\widehat{(q_{ij}p_i)} \subset R_i$;

(iii) *для каждого* $i_0$, $1 \leqslant i_0 \leqslant N$, *ни одно из множеств* $\operatorname{supp}(\widehat{p_{i_0} q_{i_0 j}})$, $1 \leqslant j \leqslant k$, *не пересекает множество* $K_{\mathcal{B}}$, *где* $K$ *– это объединение носителей преобразований Фурье функций* $p_i q_{ij}$ *с* $i < i_0$.

Напомним, что $K_{\mathcal{B}}$ – это объединение всех множеств базиса $\mathcal{B}$, которые разбивают $K$, см. определение 1 и обозначения перед ним.

Лемма 4 легко проверяется по индукции с использованием предположения о том, что базис суммирования $\mathcal{B}$ и достаточный набор $(R_1, \dots, R_k)$ согласованы: на шаге с номером $i_0$ лемма 3 применяется к полиному $p_{i_0}$ и достаточному набору $(R_1 \setminus K_{\mathcal{B}}, \dots, R_k \setminus K_{\mathcal{B}})$; в качестве $\xi$ берем то же самое число $\eta$. $\square$

Чтобы доказать теорему о разложении, достаточно теперь положить $g = g_1 + \ldots + g_k$, где $g_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \varphi(x_i) p_i q_{ij}$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Оценим сначала нормы $\|g_j\|_{u(G,\mathcal{B},R_j)}$ (следует отметить, что спектр функции $g_j$ действительно лежит в $R_j$ по построению). Пусть $E \in \mathcal{B}$. В силу утверждения (iii) в лемме 4, найдется индекс $i_0$, $1 \leqslant i_0 \leqslant N$, такой что

$$P_E g_j = \sum_{i < i_0} \varphi(x_i) p_i q_{ij} + P_E(\varphi(x_{i_0}) p_{i_0} q_{i_0 j}).$$

Второе слагаемое оценим через величину $|||p_{i_0} q_{i_0 j}|||$:

$$\begin{aligned}
&\|P_E(\varphi(x_{i_0}) p_{i_0} q_{i_0 j})\|_{L^\infty} \leqslant |\varphi(x_{i_0})|\, |||p_{i_0} q_{i_0 j}||| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty} |||p_{i_0}|||\, |||q_{i_0 j}||| \\
&\leqslant \eta(\|\widehat{\alpha}_{i_0}\|_{l^1(\Gamma)} + \delta) \leqslant 2\eta,
\end{aligned}$$

если $\delta$ мало. Первое слагаемое не требует особой заботы:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{i<i_0} \varphi(x_i) p_i q_{ij}\|_{L^\infty(G)} \leqslant \|\sum_{i<i_0} \varphi(x_i) \alpha_i q_{ij}\|_{L^\infty(G)} + \eta\delta N \\
&\leqslant \eta \|\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} |\varphi(x_i)| \alpha\|_{L^\infty(G)} + \eta\delta N \leqslant \eta(1 + \sigma + \delta N) \leqslant 2\eta,
\end{aligned}$$

если $\delta$ и $\sigma$ (в этом порядке!) выбраны достаточно малыми. Соединяя две оценки, получим, что $\|q_i\|_{u(G,\mathcal{B},R_j)} \leqslant 4\eta$.

Осталось оценить норму $\|f - g\|_{L^r}$ через $C\eta^{-\beta}$. Из предыдущего видно, что достаточно получить такую же оценку для нормы $\|\sum_i \varphi(x_i) p_i - g\|_{L^r}$, а затем в очередной раз воспользоваться произволом в выборе величин $\delta$ и $\sigma$. Однако

$$\begin{aligned}\|\sum_i \varphi(x_i)p_i - g\|^r_{L^r(G)} &\leqslant \sum_i |\varphi(x_i)|^r \|p_i\bigl(1 - \sum_{1\leqslant s\leqslant k} q_{is}\bigr)\|^r_{L^r(G)}\\ &\leqslant \sum_i |\varphi(x_i)|^r (C\eta^{-\beta})^r \|p_i\|^r_{L^r(G)}\end{aligned}$$

в силу утверждения (i) в лемме 4. Далее, $\|p_i\|^r_{L^r(G)} \leqslant \|\alpha_i\|^r_{L^r(G)} + \delta^r \leqslant 2^{\dim G} m(\mathcal{V}) + \delta^r$. Поэтому для завершения доказательства осталось воспользоваться неравенством (8) и (еще раз) произволом в выборе $\delta$. $\square$

**Благодарность.** Авторы признательны В. П. Хавину за ценные замечания об устройстве каркасов.

## Литература


1. С. В. Кисляков, *Новая теорема об исправлении*, Изв. АН СССР, сер. матем., **48** №2, (1984), 305–330.
2. Ф. Г. Арутюнян, *Представление функций кратными рядами*, Докл. АН Арм. ССР, **64** (1977), 72–76.
3. Ф. Г. Арутюнян, *Некоторое усиление теоремы Меньшова "Об исправлении"*, Матем. заметки, **35** (1984), №1, 31–41.
4. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes.* Complex analysis and spectral theory (Seminar, Leningrad 1979/80), Lecture Notes Math., 864, Springer-Verlag, 1981, pp. 1–89.
5. А. Б. Александров, *Спектральные подпространства пространства $L^p$ при $p < 1$*, Алгебра и анализ, **19** №3 (2007), 1–75.
6. С. В. Хрущев, *Теорема Меньшова об исправлении и гауссовские процессы*, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **155** (1981), 151–181.


Ivanishvili P., Kislyakov S. V. Correction up to a function with sparse spectrum and uniformly convergent Fourier series.

In 1984, the second author proved that, after correction on a set of arbitrarily small measure, any continuous function on a finite-dimensional compact Abelian group acquires sparse spectrum and uniformly convergent Fourier series. In the present paper we refine the result in two directions: first, we ensure uniform convergence in a stronger sense; second, we

prove that the spectrum after correction can be put in even more peculiar sparse sets.

Поступило 1 марта 2010 г.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

*E-mail*: ivanishvili.Paata@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

*E-mail*: skis@pdmi.ras.ru