Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

М. Ф. Гамаль

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТЁПЛИЦА С УНИМОДУЛЯРНЫМИ СИМВОЛАМИ: ОБРАТИМОСТЬ СЛЕВА И ПОДОБИЕ ИЗОМЕТРИИ

В статье рассматриваются операторы Тёплица с унимодулярными символами в пространстве Харди H^2 на единичной окружности $\mathbb{T}$. Конечно, поведение таких операторов Тёплица очень разнообразно, и мы будем рассматривать только некоторые формы символов и некоторые свойства операторов.

Хорошо известно (см., например, [4, 2.22, 2.23; 17, §3.1, 3.2.1]), что оператор Тёплица с унимодулярным символом обратим слева тогда и только тогда, когда его символ может быть представлен в виде $\theta e^{i(u+\tilde{v})}$, где θ – внутренняя функция в единичном круге $\mathbb{D}$, u и v – ограниченные вещественные функции на $\mathbb{T}$, $\|u\|_\infty < \pi/2$, через $\tilde{v}$ обозначена гармонически сопряженная к v функция. Используя метод из работы [22], мы покажем, что обратимость слева операторов Тёплица с символами вида $e^{it} \mapsto \theta(e^{it})e^{i(t/2-\pi/2)}$, $t \in (0, 2\pi)$, где θ – внутренняя функция, зависит от θ.

Если символ F оператора Тёплица T_F представим в форме

$$\begin{aligned} &f = \theta e^{i\tilde{v}}, \quad \text{где} \quad \theta \text{ – внутренняя и} \\ &v \text{ – ограниченная вещественная функция,} \end{aligned} \tag{0.1}$$

то T_F подобен изометрии [7]. Легко видеть, что если унимодулярная функция является достаточно гладкой и приращение ее аргумента неотрицательно, то она может быть представлена в форме (0.1). Существует много результатов о подобии операторов Тёплица более простым операторам, в частности, изометриям [5–9, 12, 13, 25–28]. В этой статье мы также находим изометрии, которым подобны операторы Тёплица, для некоторых классов символов.

Ключевые слова: оператор Тёплица, пространство Харди, унимодулярный символ, непрерывный символ, обратимость слева, подобие, изометрия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 08-01-00723-а.

В статье используются следующие обозначения. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг, m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Далее, $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$ – пространство Лебега, $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ – пространство Харди, $H^2_- = L^2 \ominus H^2$, P_+ и P_- – ортогональные проекторы из L^2 на H^2 и из L^2 на H^2_-, соответственно. Оператор Тёплица T_F с символом F, $F \in L^\infty(\mathbb{T}, m)$, действует в H^2 по формуле $T_F h = P_+ F h$, $h \in H^2$. Для измеримого множества $\tau \subset \mathbb{T}$ через $L^2(\tau, m)$ обозначается пространство функций из $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$, равных нулю п.в. на $\mathbb{T} \setminus \tau$. Символом I обозначается тождественный оператор, если нужно, в нижнем индексе указывается пространство, в котором он действует. Через $B_2^{1/2} = B_2^{1/2}(\mathbb{T})$ обозначается класс Бесова (определение класса Бесова см. в [4, 17, 18]).

Статья организована следующим образом.

В §1 рассматривается обратимость слева операторов Тёплица с символами вида $e^{it} \mapsto \theta(e^{it})e^{it/2}$, $t \in (0, 2\pi)$, где θ – внутренняя функция. В §2 рассматриваются операторы Тёплица, подобные унитарным, а в §3 – операторы Тёплица, подобные односторонним сдвигам. Все три параграфа не зависят друг от друга.

§1. Об операторах Тёплица, не обратимых слева

В этом параграфе показывается, что обратимость слева операторов Тёплица с символами вида $e^{it} \mapsto \theta(e^{it})e^{it/2}$, $t \in (0, 2\pi)$, где θ – внутренняя функция, зависит от θ. Доказательство основано на лемме 2 из [22] и неравенстве Фейера–Рисса.

Если θ имеет единственную особенность в точке 1, то есть θ не является конечным произведением Бляшке и может быть мероморфно продолжена на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, то θ может быть представлена в виде $\theta(e^{it}) = e^{if(t)}$, $t \in (0, 2\pi)$, где $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ – непрерывная ветвь аргумента функции θ. Ясно, что f – возрастающая неограниченная функция. Обратимость слева операторов Тёплица с символами вида $F(e^{it}) = e^{if(t)}$, $t \in (0, 2\pi)$, где $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ – непрерывная возрастающая неограниченная функция, изучалась, например, в [3], [11]. Для символа вида $e^{it} \mapsto \theta(e^{it})e^{it/2}$, $t \in (0, 2\pi)$, где θ – внутренняя функция с единственной особенностью в точке 1, функция $t \mapsto t/2$, $t \in (0, 2\pi)$, может рассматриваться как "возмущение" непрерывной ветви аргумента f функции θ. Мы показываем, что обратимость слева оператора Тёплица с символом θ при этом "возмущении" может сохраняться или не сохраняться в зависимости от θ. В качестве следствия получается другое доказательство теоремы 4.10 из [3].

Теорема 1.1. *Пусть* $\psi(e^{it}) = e^{it/2}$, $t \in (0, 2\pi)$, *и пусть* $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. *Тогда*

1) $\operatorname{dist}(\psi h, H^\infty(\mathbb{D})) \le \sup\{|h(x)|,\ 0 < x < 1\}$;

2) *если существует предел* $\lim_{0<x<1,\ x\to 1} h(x)$ *и*

$$\lim_{0<x<1,\ x\to 1} h(x) = 1,$$

то $\operatorname{dist}(\psi h, H^\infty(\mathbb{D})) \ge 1$.

Доказательство. Часть 1) теоремы – это в точности лемма 2 из [22]. Для доказательства части 2) теоремы используем доказательство леммы 2 из [22] и доказательство теоремы 3.13 из [10] (неравенство Фейера–Рисса): *если* $f \in H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$, *то* $\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt$, именно, доказательство того, что *константа* $\frac{1}{2}$ – *наилучшая.*

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $0 < a < 1$, P_a – прямоугольник с вершинами $1 \pm i\varepsilon$, $-1 \pm i\varepsilon$, g_a – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на P_a, которое переводит отрезок $[-1, 1]$ на $[-1, 1]$, и такое что $g_a(-1) = -1$, $g_a(a) \to -1$ при $a \to 1$, $g_a(1) = 1$. Имеем $g_a' \in H^1(\mathbb{D})$, $||g_a'||_{H^1} = 2(1+\varepsilon)/\pi$, $g_a' \ge 0$ на $(-1, 1)$, $\int_a^1 g_a'(x)dx \to_{a\to 1} 2$, $\int_{-1}^a g_a'(x)dx \to_{a\to 1} 0$.

Теперь, как в лемме 2 из [22], имеем

$$\int_{\mathbb{T}} (\psi h g_a')(\zeta)d\zeta = -2\int_0^1 x^{1/2} h(x) g_a'(x)dx.$$

Поэтому

$$\Big|\int_{\mathbb{T}} (\psi h g_a')(\zeta)\zeta dm(\zeta)\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\mathbb{T}} (\psi h g_a')(\zeta)d\zeta\Big| = \frac{1}{\pi}\Big|\int_0^1 x^{1/2} h(x) g_a'(x)dx\Big|.$$

Так как $\lim_{0<x<1,\ x\to 1} h(x) = 1$, то $\int_0^a x^{1/2}h(x)g_a'(x)dx \to_{a\to 1} 0$ и $\int_a^1 x^{1/2}h(x)g_a'(x)dx \to_{a\to 1} 2$. Таким образом,

$$\operatorname{dist}(\psi h, H^\infty(\mathbb{D})) = \sup_{g\in H^1(\mathbb{D})} \frac{|\int_{\mathbb{T}}(\psi h g)(\zeta)\zeta dm(\zeta)|}{||g||_{H^1}}$$

$$\ge \sup_{0<a<1} \frac{|\int_{\mathbb{T}}(\psi h g_a')(\zeta)\zeta dm(\zeta)|}{||g_a'||_{H^1}} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Теперь $\varepsilon \to 0$, и $\operatorname{dist}(\psi h, H^\infty(\mathbb{D})) \ge 1$. $\square$

Следствие 1.2. *Пусть $\theta \in H^\infty(\mathbb{D})$ – внутренняя функция, и пусть существует предел $\lim_{0<x<1,\ x\to 1}\theta(x)$. Тогда*

1) *если $|\lim_{0<x<1,\ x\to 1}\theta(x)| < 1$, то оператор $T_{\psi\theta}$ обратим слева*;

2) *если $|\lim_{0<x<1,\ x\to 1}\theta(x)| = 1$, то оператор $T_{\psi\theta}$ не обратим слева (функция ψ определена в теореме* 1.1)

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [4, 2.20; 17, 3.1.11]), что оператор Тёплица с унимодулярным сиволом F обратим слева тогда и только тогда, когда $\operatorname{dist}(F, H^\infty(\mathbb{D})) < 1$. В случае 1) применяется часть 1) теоремы 1.1, а в случае 2) – часть 2) теоремы 1.1. $\square$

Следствие 1.3 [3, теорема 4.10]**.** *Пусть $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ – непрерывная неубывающая неограниченная функция. Тогда существует $g : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, такая что g – непрерывная неубывающая неограниченная функция, $\|f - g\|_\infty \le 5\pi/2$ и оператор T_G не обратим слева, где $G(e^{it}) = e^{ig(t)}$, $t \in (0, 2\pi)$.*

Доказательство. Пусть $\omega : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}$, $\omega(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $z \in \mathbb{C}_+$, – конформное отображение верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на $\mathbb{D}$. Определим x_n по формуле $f(\arg\omega(x_n)) = 2\pi n$, где $\arg$ – ветвь аргумента, определенная на $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Последовательность $\{x_n\}_n$ пронумерована числами $n \in \mathbb{N}$, если $f(t)$ ограничена при $t \to 0+$ или $t \to 2\pi-$, и числами $n \in \mathbb{Z}$, если f не ограничена на обоих концах отрезка $(0, 2\pi)$.

Пусть $c \ge 0$, $b \in \mathbb{R}$ и $\{\mu_n\}_n$ – последовательность чисел, такая что $\mu_n > 0$ и $\sum_n \mu_n < \infty$, если последовательность $\{x_n\}_n$ пронумерована числами $n \in \mathbb{Z}$; если последовательность $\{x_n\}_n$ пронумерована числами $n \in \mathbb{N}$, то достаточно взять последовательность $\{\mu_n\}_n$ такую, что $\sum_n \frac{\mu_n}{x_n^2+1} < \infty$. Пусть Θ – мероморфная (на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$) внутренняя (в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$) функция, определенная формулой

$$i\frac{1+\Theta(z)}{1-\Theta(z)} = cz + b + \frac{1}{\pi}\sum_n \Big(\frac{1}{x_n - z} - \frac{x_n}{1+x_n^2}\Big)\mu_n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \ne x_n$$

(см. [20, добавление 6]). Легко видеть, что

$$\lim_{y\to+\infty}\Theta(iy) \ \text{ существует}, \qquad |\lim_{y\to+\infty}\Theta(iy)| = 1 \tag{1.1}$$

и $\Theta^{-1}(1) = \{x_n\}_n$. Из этого равенства получаем, что существует число $k \in \mathbb{Z}$, такое что $\arg\Theta(x_n) = (f \circ \arg\omega)(x_n) - 2\pi k$. Так как функция

f неубывающая, из этого равенства заключаем, что

$$\|f \circ \arg \omega - \arg \Theta - 2\pi k\|_\infty \leq 2\pi. \tag{1.2}$$

Положим $\theta = \Theta \circ \omega^{-1}$, тогда, по (1.1), θ удовлетворяет условиям части 2) следствия 1.2. Наконец, положим $G = -i\psi\theta$ и $g(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} + \arg \theta(e^{it}) + 2\pi k$, $t \in (0, 2\pi)$. По части 2) следствия 1.2 оператор T_G не обратим слева, а из оценки (1.2) получаем, что $\|f - g\|_\infty \leq 5\pi/2$. $\square$

§2. Об операторах Тёплица, подобных унитарным

В этой части статьи мы занимаемся операторами Тёплица, подобными унитарным. Следуя [8], мы используем результаты работы [16] для нахождения функции спектральной кратности абсолютно непрерывного унитарного оператора, подобного оператору Тёплица. Именно, в [16] доказано, что если F – функция из класса Бесова $B_2^{1/2}$ и φ – “хорошая” функция, то оператор $\varphi(T_F) - T_{\varphi(F)}$ – ядерный. Мы используем функцию $\varphi(t) = e^{it}$ вместо функции $\varphi(z) = z^n$, используемой в [8]; это позволяет распространить метод из [8] на более широкий класс символов F операторов Тёплица T_F. Именно, этот метод можно применить к символам, аргументы которых являются неограниченными функциями из $B_2^{1/2}$, имеющими ограниченные гармонически сопряженные. Заметим, что существование вещественных неограниченных функций из $B_2^{1/2}$, имеющих ограниченные гармонически сопряженные, следует из [17, §7.8, 7.13.1; 18, §3.5, теорема 3.18].

Следующие леммы приводятся для удобства ссылок.

Лемма 2.1. *Если оператор Тёплица подобен изометрии, то эта изометрия абсолютно непрерывна, то есть не имеет сингулярного унитарного слагаемого.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [4, 2.30; 17, 3.1.7]), что если оператор Тёплица подобен изометрии, то его символ – унимодулярная функция (достаточно заметить, что если оператор T подобен изометрии, то $T - \lambda I$ обратим слева для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$). В частности, оператор Тёплица является сжатием, следовательно, он является вполне неунитарным сжатием [15]. Хорошо известно, что если вполне неунитарное сжатие подобно изометрии, то эта изометрия абсолютно непрерывна [23, IX.1.2, II.6.4]. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – функция, такая что оператор T_F подобен изометрии конечной кратности. Тогда $F \in B_2^{1/2}$.*

Доказательство. Так как F – унимодулярная функция (см. доказательство леммы 2.1), то T_F – сжатие. По [14] оператор $I - T_F^* T_F$ – ядерный. Очевидно, $\dim\ker T_F^* < \infty$, поэтому, по [1, VI.3.3] (см. также [23, VIII.1]), оператор $I - T_F T_F^*$ – тоже ядерный. Так как функция F унимодулярна, то $I - T_F^* T_F = H_F^* H_F$, где $H_F : H^2 \to H^2_-$, $H_F h = P_- F h$, $h \in H^2$, – оператор Ганкеля. Так как оператор $H_F^* H_F$ – ядерный, то H_F принадлежит классу Гильберта–Шмидта, поэтому $P_- F \in B_2^{1/2}$ [17, 6.2.2; 18, теорема 1.5]. Аналогично $P_- \overline{F} \in B_2^{1/2}$. Заключаем, что $F \in B_2^{1/2}$. □

Нам понадобится опеределение из [20, 3.11].

Определение 2.3. *Пусть $\tau \subset \mathbb{T}$ – измеримое (по мере Лебега m) множество. Положим* $\operatorname{index}\tau = 0$, *если* $m(\tau) = 0$ *или* $m(\tau) = 1$, $\operatorname{index}\tau = n, n = 1, 2, \dots,$ *если τ является объединением n непересекающихся замкнутых непустых дуг окружности $\mathbb{T}$ по модулю множества нулевой меры Лебега, и* $\operatorname{index}\tau = \infty$ *во всех остальных случаях.*

Следующие теорема и лемма взяты из [21], [8] и [16].

Теорема 2.4 [21], [16]. *Пусть $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ – функция из* BMO. *Для $x \in \mathbb{R}$ положим*

$$\gamma(x) = \{\zeta \in \mathbb{T} : \ w(\zeta) < x\}. \tag{2.1}$$

Тогда $T_w : H^2 \to H^2$ – абсолютно непрерывный самосопряженный оператор (не обязательно ограниченный), и его спектральная кратность в точке $x \in \mathbb{R}$ равна $\operatorname{index}\gamma(x)$.

Доказательство. По лемме 1 из [16] T_w – самосопряженный оператор. Поэтому заключение теоремы следует из теорем 4 и 8A из [21] (см. также [20, 3.11]). □

Лемма 2.5 [8]. *Пусть U и V – унитарные операторы, пусть T – линейный ограниченный оператор, подобный оператору U, и пусть оператор $T - V$ – ядерный. Тогда абсолютно непрерывные части операторов U и V унитарно эквивалентны.* □

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 2.4 и леммы 2.5.

Теорема 2.6. *Пусть $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ – функция из $B_2^{1/2}$. Пусть $T_{e^{iw}}$ подобен унитарному оператору. Тогда этот унитарный оператор унитарно эквивалентен оператору e^{iA}, где A – абсолютно непрерывный самосопряженный оператор, спектральная кратность которого в точке $x \in \mathbb{R}$ равна* $\operatorname{index}\gamma(x)$, *где множество* $\gamma(x)$ *определено в* (2.1) *и* index *для измеримого множества определен в определении* 2.3.

Заметим, что если функция w, удовлетворяющая условиям теоремы, не ограничена, то $T_{e^{iw}}$ подобен двустороннему сдвигу бесконечной кратности.

Доказательство. Так как $w \in B_2^{1/2}$, то $w \in \mathrm{BMO}$, и, следовательно, w удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому T_w – абсолютно непрерывный самосопряженный оператор, следовательно, e^{iT_w} – абсолютно непрерывный унитарный оператор. По [16, теорема 6] оператор $e^{iT_w} - T_{e^{iw}}$ – ядерный. Обозначим через U унитарный оператор, которому подобен оператор $T_{e^{iw}}$. По лемме 2.1 U абсолютно непрерывный. Операторы $T_{e^{iw}}$, U и e^{iT_w} удовлетворяют условиям леммы 2.5, поэтому U унитарно эквивалентен оператору e^{iT_w}. Наконец, по теореме 2.4 функция спектральной кратности оператора T_w равна функции спектральной кратности оператора A, описанного в теореме 2.6. $\square$

Следствие 2.7. *Пусть $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ – функция из $B_2^{1/2}$, и пусть гармонически сопряженная к w функция ограничена. Тогда w удовлетворяет условиям теоремы* 2.6.

Доказательство. По [7] (см. (0.1) во введении статьи) оператор $T_{e^{iw}}$ подобен унитарному оператору. $\square$

Следствие 2.8. *Пусть $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – функция, такая что оператор T_F подобен унитарному оператору конечной кратности. Тогда существует функция $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, такая что $w \in B_2^{1/2} \cap C(\mathbb{T})$ и $F = e^{iw}$.*

Доказательство. По лемме 2.2 $F \in B_2^{1/2}$, по [17, 7.8.2; 18, следствие 3.7] существует функция $w : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, такая что $w \in B_2^{1/2}$ и $F = e^{iw}$. Функция w удовлетворяет условиям теоремы 2.6. Используя описание спектральной кратности унитарного оператора, подобного оператору $T_{e^{iw}}$, в терминах функции w, и принимая во внимание, что эта кратность конечна, легко видеть, что w – непрерывная функция. $\square$

§3. Об операторах Тёплица, подобных односторонним сдвигам

В работах [27], [28] рассматривался класс операторов Тёплица T_F с гладкими символами F (не обязательно унимодулярными). В частности, в [27], [28] было доказано, что если $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – функция из $C^{1+\alpha}(\mathbb{T})$, где $\alpha > 0$, то есть $F' \in \mathrm{Lip}_\alpha$, $\operatorname{wind} F > 0$ и $F' \neq 0$ на $\mathbb{T}$, то оператор T_F подобен одностороннему сдвигу, и кратность этого сдвига равна $\operatorname{wind} F$. Легко видеть, что такая функция F может быть представлена в форме (0.1). Далее, так как $\operatorname{wind} F > 0$ и $F' \neq 0$ на $\mathbb{T}$, то F может быть представлена в форме

$$F(e^{it}) = e^{if(t)}, \quad t \in (0, 2\pi),$$

$$\text{где } f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R} \text{ – непрерывная неубывающая функция.} \tag{3.1}$$

С другой стороны, если гладкая функция F представима в форме (3.1), то, конечно, F' может быть равна нулю. Более того, если функция F представима в форме (0.1) (и, следовательно, оператор T_F подобен изометрии), функция F не обязательно должна быть гладкой. В этой части статьи предпринята попытка изучить непрерывные символы F с маленьким множеством особенностей. Мы доказываем, что если символ, непрерывный на $\mathbb{T}$, представим в виде (3.1), образ множества его особенностей имеет нулевую меру и оператор Тёплица с этим символом подобен изометрии, то эта изометрия должна быть односторонним сдвигом, но при предположении, что вне множества особенностей символ имеет гладкость $C^{1+\alpha}$, где $\alpha > 1/2$ (вместо $\alpha > 0$ в [27], [28]). Другими словами, в [27], [28] условие гладкости функции F и условие $F' \neq 0$ должны выполняться на всей окружности $\mathbb{T}$; в этой части статьи изучаются непрерывные символы F, для которых условие гладкости и условие $F' \neq 0$ выполнены локально, но для приведенного в статье доказательства нужно требовать большую гладкость.

Нам понадобятся следующие простые леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – (линейный ограниченный) оператор в $\mathcal{H}$, N – натуральное число. Предположим, что оператор $T - \lambda I$ обратим слева,* $\dim \ker (T - \lambda I)^* = N$ *для каждого $\lambda \in \mathbb{D}$ и существуют непрерывные функции $h_n : \mathbb{D} \to \mathcal{H}$, $\lambda \mapsto h_{n\lambda}$, $n = 1, \dots, N$, такие что функции $\{h_{n\lambda}\}_{n=1}^N$ порождают*

$\ker(T-\lambda I)^*$ *для каждого* $\lambda \in \mathbb{D}$. *Положим* $\mathcal{E} = \cap_{\lambda\in\mathbb{D}}(T-\lambda I)\mathcal{H}$. *Тогда* $(T-\lambda I)\mathcal{E} = \mathcal{E}$ *для каждого* $\lambda \in \mathbb{D}$.

Доказательство. Из определения пространства $\mathcal{E}$ и обратимости слева оператора $T-\lambda I$ для каждого $\lambda \in \mathbb{D}$ легко видеть, что $\mathcal{E}$ – инвариантное подпространство для T, то есть линейное замкнутое подмножество пространства $\mathcal{H}$, такое что $T\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$. Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать, что $\mathcal{E} \subset (T-\lambda I)\mathcal{E}$ для каждого $\lambda \in \mathbb{D}$. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{D}$, и пусть вектор $x \in \mathcal{H}$ таков, что $(T-\lambda_0 I)x \in \mathcal{E}$. Это означает, что $(T-\lambda_0 I)x \perp h_{n\lambda}$ для $n = 1,\dots,N$ и для всех $\lambda \in \mathbb{D}$. Имеем $x \perp (T-\lambda_0 I)^* h_{n\lambda}$ и $(T-\lambda_0 I)^* h_{n\lambda} = (T-\lambda I+\lambda I-\lambda_0 I)^* h_{n\lambda} = (\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)h_{n\lambda}$, поэтому $x \perp h_{n\lambda}$ для $n = 1,\dots,N$ и для всех $\lambda \neq \lambda_0$. Но $h_{n\lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0} h_{n\lambda}$, и мы заключаем, что $x \perp h_{n\lambda}$ для $n = 1,\dots,N$ и для всех $\lambda \in \mathbb{D}$, то есть $x \in \mathcal{E}$. Теперь пусть $\lambda \in \mathbb{D}$. Если $y \in \mathcal{E}$, то существует $x \in \mathcal{H}$, такой что $y = (T-\lambda I)x$. Как только что было доказано, $x \in \mathcal{E}$; таким образом, $y \in (T-\lambda I)\mathcal{E}$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *– непрерывная функция,* N *– натуральное число и* $\operatorname{wind} F = N$. *Тогда* $T_F : H^2 \to H^2$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.1.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [4, 2.42; 17, 3.3.3]), что оператор $T_F - \lambda I$ обратим слева, $\dim\ker(T^*-\lambda I) = N$ и $T_{\zeta^N(\overline{F}-\lambda)}$ – обратимый оператор для каждого $\lambda \in \mathbb{D}$. Положим $h_{n\lambda} = T^{-1}_{\zeta^N(\overline{F}-\lambda)}\zeta^{n-1}$, $n = 1,\dots,N$, $\lambda \in \mathbb{D}$. Так как $T^{-1}_{\zeta^N(\overline{F}-\lambda)} = (T_{\zeta^N\overline{F}} - \lambda T_{\zeta^N})^{-1}$, то $h_{n\lambda}$ – аналитические функции от λ.

Из определения функций $h_{n\lambda}$ легко видеть, что $(\overline{F}-\lambda)h_{n\lambda} = \overline{\zeta}^{N-n+1} + \overline{\zeta}^{N+1}\overline{g}_{n\lambda}$, где $g_{n\lambda}$ – некоторые функции из H^2. Из этого равенства получаем, что функции $\{h_{n\lambda}\}_{n=1}^N$ порождают $\ker(T_{\overline{F}}-\lambda I)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{D}$. Очевидно, $h_{n\lambda} \in \ker(T_{\overline{F}}-\lambda I)$. Теперь зафиксируем $\lambda \in \mathbb{D}$. Покажем, что функции $\{h_{n\lambda}\}_{n=1}^N$ линейно независимы. Пусть $\{c_n\}_{n=1}^N$ – комплексные числа, такие что $\sum\limits_{n=1}^N c_n h_{n\lambda} = 0$. Тогда $0 = \zeta^N(\overline{F}-\lambda)\sum\limits_{n=1}^N c_n h_{n\lambda} = \sum\limits_{n=1}^N (c_n\zeta^{n-1} + \overline{\zeta}\overline{g}_{n\lambda})$, и мы заключаем, что $c_n = 0$, $n = 1,\dots,N$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathcal{H}$ *– гильбертово пространство,* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *– сжатие в* $\mathcal{H}$ *и* $J \subset \mathbb{T}$ *– открытая дуга. Предположим, что существуют* *положительные числа C и $r_0 < 1$, такие что*

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1-|\lambda|} \quad \text{при} \quad \frac{\lambda}{|\lambda|} \in J,\ r_0 < |\lambda| < 1 \tag{3.2}$$

и $\sigma(T) \cap J \neq \varnothing$. Тогда существует гиперинвариантное подпространство $\mathcal{H}_0 (\neq \{0\})$ для T (то есть $\mathcal{H}_0$ инвариантно для всех операторов, коммутирующих с T), такое что оператор $T|_{\mathcal{H}_0}$ подобен унитарному и $\sigma(T|_{\mathcal{H}_0}) \subset J$.

Доказательство. Если J содержит изолированное подмножество σ_0 спектра $\sigma(T)$, то существует гиперинвариантное подпространство $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ для T, такое что $\sigma(T|_{\mathcal{H}_0}) = \sigma_0$ (см. [19, 2.10]). Очевидно, оценка (3.2) имеет место для $T|_{\mathcal{H}_0}$ и для каждого $\lambda \in \mathbb{D}$, поэтому оператор $T|_{\mathcal{H}_0}$ подобен унитарному [23, IX.1.4].

Теперь предположим, что J не содержит изолированных подмножеств спектра $\sigma(T)$. Следуя [2, лемма 3.1; 24, лемма 6], построим спрямляемые жордановы кривые Γ_0 и Γ_1, такие что:

(i) Γ_0 лежит в неограниченной компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma_1$, Γ_1 лежит в неограниченной компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma_0$;

(ii) пересечение окружности $\mathbb{T}$ с неограниченной компонентой связности множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ содержится в J, пересечение спектра $\sigma(T)$ с неограниченной компонентой связности множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ содержится в J и пересечение множества $\sigma(T) \cap J$ с ограниченной компонентой связности множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma_0$ непусто;

(iii) $\Gamma_0 \cap \mathbb{T} = \Gamma_0 \cap J = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, $\Gamma_1 \cap \mathbb{T} = \Gamma_1 \cap J = \{\zeta_3, \zeta_4\}$, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ попарно различны;

(iv) Γ_0 и Γ_1 пересекают дугу J по радиальным отрезкам;

(v) $\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{|1-|\lambda||}$ при $\lambda \in \Gamma_0 \setminus \{\zeta_1, \zeta_2\}$ и при $\lambda \in \Gamma_1 \setminus \{\zeta_3, \zeta_4\}$.
Так как J не содержит изолированных подмножеств спектра $\sigma(T)$, то пересечение множества $\sigma(T) \cap J$ с ограниченной компонентой связности множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ непусто.

Положим

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} (\lambda - \zeta_1)(\lambda - \zeta_2)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda-\zeta_3)(\lambda-\zeta_4)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda.$$

По [2, лемма 3.1] $A_0 \neq \mathbb{O}$, $A_1 \neq \mathbb{O}$ и $A_1A_0 = \mathbb{O}$, поэтому $\ker A_1 \neq \{0\}$. Так как A_1 коммутирует с каждым оператором, коммутирующим с T, то $\ker A_1$ – гиперинвариантное подпространство для T, поэтому $\sigma(T|_{\ker A_1}) \subset \sigma(T)$. По [24, лемма 6] $\sigma(T|_{\ker A_1})$ содержится в замыкании неограниченной компоненты связности множества $\mathbb{C}\setminus\Gamma_1$. Из (ii) заключаем, что $\sigma(T|_{\ker A_1}) \subset J$.

Положим $\mathcal{H}_0 = \ker A_1$. Так как оценка (3.2) выполняется для $T|_{\mathcal{H}_0}$ и для всех $\lambda\in\mathbb{D}$, то оператор $T|_{\mathcal{H}_0}$ подобен унитарному [23, IX.1.4]. □

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, и пусть $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ – (линейный ограниченный) оператор в $\mathcal{H}$, подобный абсолютно непрерывному унитарному оператору. Предположим, что $\mathcal{L}$ – линейное подмножество пространства $\mathcal{H}$, плотное в $\mathcal{H}$, и пусть вектор $x\in\mathcal{H}$ таков, что*

$$\lim_{r\to 1-}\big((T-r\lambda)^{-1}x-(T-\frac{1}{r}\lambda)^{-1}x,y\big)=0 \quad \text{для } y\in\mathcal{L} \text{ и для п.в. } \lambda\in\mathbb{T}. \tag{3.3}$$

Тогда $x=0$.

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что T подобен оператору умножения на независимую переменную ζ в $L^2(\tau,m)$, где $\tau\subset\mathbb{T}$. (Можно заменить $\mathcal{H}$ биинвариантным подпространством для T, порожденным вектором x, а $\mathcal{L}$ – его проекцией на это подпространство.) Пусть $X : L^2(\tau,m)\to\mathcal{H}$ – обратимый оператор, такой что $T = X\zeta X^{-1}$; положим $f = X^{-1}x$ и $g = X^*y$, $y\in\mathcal{L}$, тогда левая часть равенства (3.3) равна

$$\lim_{r\to 1-}\int_{\tau}\Big(\frac{1}{\zeta-r\lambda}-\frac{1}{\zeta-\frac{1}{r}\lambda}\Big)f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta)=\overline{\lambda}f(\lambda)\overline{g(\lambda)} \ \text{ для п.в. } \lambda\in\tau.$$

По (3.3) $f(\lambda)\overline{g(\lambda)}=0$ для п.в. $\lambda\in\tau$, в частности,

$$(f,g)_{L^2(\tau,m)}=\int_{\tau}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta)=0$$

для $g\in X^*\mathcal{L}$. Так как $X^*\mathcal{L}$ плотно в $L^2(\tau,m)$, то $f=0$, и, следовательно, $x=0$. □

Лемма 3.5. *Пусть* $f \in H^2$, $\lambda \in \mathbb{T}$ *и* $\lim_{r\to 1-} f(r\lambda) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{r\to 1-} \int\limits_{\mathbb{T}} \overline{\zeta} \frac{1-r^2}{|1-r\overline{\lambda}\zeta|^2} f(\zeta)\overline{p(\zeta)}dm(\zeta) = 0$$

для любого полинома p. $\square$

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа. Утверждения о подобии операторов Тёплица односторонним сдвигам являются следствиями этой теоремы.

Теорема 3.6. *Пусть* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *– непрерывная функция,* $\mathcal{J} \subset \mathbb{T}$ *– открытая дуга и* α *– число,* $\alpha > 1/2$. *Предположим, что* F, $\mathcal{J}$ *и* α *обладают следующими свойствами:*

1) $\operatorname{wind} F = 1$;

2) *если* $\lambda \in F(\mathcal{J})$, *то существует единственная точка* $a \in \mathbb{T}$, *такая что* $F(a) = \lambda$ *(конечно,* $a \in \mathcal{J}$*);*

3) $F|_{\mathcal{J}} \in C^{1+\alpha}$, *то есть* $F'(\zeta) = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \in \operatorname{Lip}_\alpha(\mathcal{J})$ *и* $F'(\zeta) \neq 0$ *при* $\zeta \in \mathcal{J}$.

Положим $\mathcal{E} = \cap_{\lambda\in\mathbb{D}}(T_F - \lambda I)H^2$. *Тогда* $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{T} \setminus F(\mathcal{J})$.

Доказательство. По леммам 3.1 и 3.2 $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{T}$. Следуя работе [25], продолжим функцию F в окрестность дуги $\mathcal{J}$ и запишем оператор $T_F - F(a)I$ в форме

$$T_F - F(a)I = V_a T_{\zeta - a}, \tag{3.4}$$

где V_a – обратимый оператор в H^2. Из (3.4) имеем

$$\bigl(T_F|_{\mathcal{E}} - F(a)I_{\mathcal{E}}\bigr)^{-1} = \frac{1}{\zeta - a} V_a^{-1}|_{\mathcal{E}}. \tag{3.5}$$

Далее мы получим оценки на операторы V_a и из этих оценок и формулы (3.5) увидим, что оценка (3.2) выполняется для оператора $T_F|_{\mathcal{E}}$ и дуги $F(\mathcal{J})$. Затем применим леммы 3.3, 3.4 и 3.5. Именно, предположив, что $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}}) \cap F(\mathcal{J}) \neq \varnothing$, мы применим лемму 3.3 и получим инвариантное подпространство $\mathcal{E}_0 \neq \{0\}$ для T_F, такое что оператор $T_F|_{\mathcal{E}_0}$ подобен унитарному. Но, применив лемму 3.5, мы увидим, что любой элемент пространства $\mathcal{E}_0$ удовлетворяет условиям леммы 3.4, поэтому пространство $\mathcal{E}_0$ окажется нулевым – противоречие.

По условию 3) теоремы существует r_0, $0 < r_0 < 1$, такое что $(1 - r)|F'(a)| < 1$ при $r_0 < r < 1$, $a \in \mathcal{J}$. Положим

$$F(ra) = (1 - (1-r)|F'(a)|)F(a) \quad \text{при} \;\; r_0 < r < 1, \;\; a \in \mathcal{J},$$

$$F(\frac{1}{r}a) = \frac{1}{|F(ra)|}F(a) \quad \text{при} \quad r_0 < r < 1, \;\; a \in \mathcal{J},$$

$$Q_w(\zeta) = \begin{cases} \frac{F(\zeta)-F(w)}{\zeta - w}, & \zeta \neq w \\ F'(\zeta), & \zeta = w \end{cases}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}, \; w = ra, \; a \in \mathcal{J}, r_0 < r < \frac{1}{r_0},$$

$$V_w = T_{Q_w}.$$

Из условия 3) теоремы легко видеть, что $Q_w \in C(\mathbb{T})$, отображение

$$\mathcal{J} \to C(\mathbb{T}), \quad a \mapsto Q_a \quad \text{непрерывно в} \;\; \| \; \|_{C(\mathbb{T})} \tag{3.6}$$

и существует константа C, такая что

$$|Q_{ra}(\zeta) - Q_a(\zeta)| \le C|\zeta - a|^{\alpha}\frac{|1-r|}{|\zeta - ra|}, \quad \text{где} \;\; \zeta \in \mathbb{T}, \; a \in \mathcal{J}, r_0 < r < \frac{1}{r_0}. \tag{3.7}$$

Из (3.7) заключаем, что

$$\|Q_{ra} - Q_a\|_{C(\mathbb{T})} \le C|1-r|^{\alpha}, \quad a \in \mathcal{J}, r_0 < r < \frac{1}{r_0}. \tag{3.8}$$

(Через C обозначаются различные константы.)

Переписав (3.6) и (3.8) для V_w, получим, что отображение

$$\mathcal{J} \to \mathcal{B}(H^2), \quad a \mapsto V_a, \quad \text{непрерывно в операторной норме}, \tag{3.9}$$

где $\mathcal{B}(H^2)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов в H^2, и

$$\|V_{ra} - V_a\| \le C|1-r|^{\alpha}, \;\; a \in \mathcal{J}, r_0 < r < \frac{1}{r_0}. \tag{3.10}$$

Если $a \in \mathcal{J}$ и $r_0 < r < \frac{1}{r_0}$, то, по условиям 2) и 3) теоремы, $Q_{ra} \neq 0$ на $\mathbb{T}$. Далее, если $r \neq 1$, то, по построению, $\operatorname{wind} Q_{ra} = 0$. Применяя (3.8), получим, что $\operatorname{wind} Q_a = 0$; значит, V_{ra} – обратимые операторы в H^2 при всех $a \in \mathcal{J}, r_0 < r < \frac{1}{r_0}$ (см. [4, 2.42; 17, 3.3.3]). Из (3.9), (3.10) и хорошо известных свойств множества обратимых элементов банаховой алгебры (в данном случае $\mathcal{B}(H^2)$) получаем, что

$$\|V_a^{-1}\| \asymp 1, \quad a \in \mathcal{J}, \tag{3.11}$$

и

$$\|V_{ra}^{-1} - V_a^{-1}\| \le C|1-r|^\alpha, \quad a \in \mathcal{J},\ r_0 < r < \frac{1}{r_0}. \tag{3.12}$$

(Для аккуратности нужно рассматривать произвольную замкнутую, и, следовательно, компактную дугу, содержащуюся в $\mathcal{J}$. Чтобы доказать (3.11), заметим, что образ замкнутой дуги при непрерывном отображении $a \mapsto V_a^{-1}$ является компактным, и следовательно, замкнутым подмножеством множества обратимых элементов банаховой алгебры $\mathcal{B}(H^2)$. Когда теорема будет доказана для произвольной замкнутой дуги, содержащейся в $\mathcal{J}$, она будет доказана и для $\mathcal{J}$. Но мы не будем вводить дополнительные обозначения.)

Теперь пусть $h \in \mathcal{E}$. Тогда для каждой точки $a \in \mathcal{J}$ и числа $r_0 < r < 1$ существует функция $g_{a,r} \in H^2$, такая что

$$h = \big(T_F - F(ra)I\big)g_{a,r} = V_{ra}(\zeta - ra)g_{a,r}. \tag{3.13}$$

Из (3.13) заключаем, что $(V_{ra}^{-1}h)(ra) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
|(V_a^{-1}h)(ra)| &= |(V_a^{-1}h)(ra) - (V_{ra}^{-1}h)(ra)| \\
&\le \|V_a^{-1}h - V_{ra}^{-1}h\| \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}} \\
&\le \|V_a^{-1} - V_{ra}^{-1}\|\|h\| \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}} \\
&\le C\|h\| \frac{(1-r)^\alpha}{(1-r^2)^{1/2}} \to_{r\to 1-} 0,
\end{aligned}$$

поскольку $\alpha > 1/2$ (мы применили (3.12)). Мы получили, что

$$\lim_{r\to 1-} (V_a^{-1}h)(ra) = 0 \quad \text{при } a \in \mathcal{J}. \tag{3.14}$$

Далее, из (3.13) имеем

$$\big((T_F - F(ra)I)|_{\mathcal{E}}\big)^{-1} = \frac{1}{\zeta - ra} V_{ra}^{-1}|_{\mathcal{E}}, \quad r_0 < r < 1, \quad a \in \mathcal{J}. \tag{3.15}$$

Также,

$$\big(T_F - F(\frac{1}{r}a)I\big)^{-1} = \frac{1}{\zeta - \frac{1}{r}a} V_{\frac{1}{r}a}^{-1}, \quad r_0 < r < 1, \quad a \in \mathcal{J}. \tag{3.16}$$

Пусть $h \in \mathcal{E}$, и пусть p – многочлен. Из (3.15) и (3.16) имеем

$$\begin{aligned}
&\Big(\Big(\big((T_F - F(ra)I)|_{\mathcal{E}}\big)^{-1} - \big((T_F - F(\frac{1}{r}a)I)|_{\mathcal{E}}\big)^{-1}\Big)h, p\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{\zeta - ra}(V_{ra}^{-1} - V_a^{-1})h, p\Big) - \Big(\frac{1}{\zeta - \frac{1}{r}a}(V_{\frac{1}{r}a}^{-1} - V_a^{-1})h, p\Big) \\
&+ \Big(\big(\frac{1}{\zeta - ra} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{r}a}\big)V_a^{-1}h, p\Big), \quad r_0 < r < 1, \quad a \in \mathcal{J}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Первое слагаемое из правой части (3.17) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Big|\Big(\frac{1}{\zeta - ra}(V_{ra}^{-1} - V_a^{-1})h, p\Big)\Big| &= \Big|\Big((V_{ra}^{-1} - V_a^{-1})h, \frac{1}{\overline{\zeta} - r\overline{a}}p\Big)\Big| \\
&\leq \|V_{ra}^{-1} - V_a^{-1}\|\|h\|_2 \Big\|\frac{1}{\overline{\zeta} - r\overline{a}}\Big\|_2 \|p\|_\infty \\
&\leq C\|h\|_2\|p\|_\infty \frac{(1-r)^\alpha}{(1-r^2)^{1/2}},
\end{aligned}$$

(мы применили (3.12)); второе слагаемое из правой части (3.17) оценивается аналогично. Так как $\alpha > 1/2$, первое и второе слагаемые из правой части (3.17) стремятся к нулю при $r \to 1-$.

Чтобы показать, что третье слагаемое из правой части (3.17) стремится к нулю при $r \to 1-$, применим (3.14) и лемму 3.5. Конечно,

$$\Big(\big(\frac{1}{\zeta - ra} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{r}a}\big)V_a^{-1}h, p\Big) = \int\limits_{\mathbb{T}} \overline{\zeta}\frac{1-r^2}{|1 - r\overline{a}\zeta|^2}(V_a^{-1}h)(\zeta)\overline{p(\zeta)}dm(\zeta), \tag{3.18}$$

по (3.14) функция $V_a^{-1}h$ и точка $a \in \mathcal{J}$ удовлетворяют условиям леммы 3.5; значит, правая часть (3.18) стремится к нулю при $r \to 1-$.

Мы доказали, что скалярное произведение в (3.17) стремится к нулю при $r \to 1-$ для любой точки $a \in \mathcal{J}$.

Из (3.15), (3.11) и (3.12) заключаем, что

$$\left\|\left((T_F - F(ra)I)|_{\mathcal{E}}\right)^{-1}\right\| \le C\frac{1}{1-r} \quad \text{при} \quad r_0 < r < 1, \quad a \in \mathcal{J}.$$

Если теперь предположить, что $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}}) \cap F(\mathcal{J}) \neq \varnothing$, то по лемме 3.3 нужно заключить, что существует гиперинвариантное подпространство $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ для T_F, такое что $\mathcal{E}_0 \neq \{0\}$, оператор $T_F|_{\mathcal{E}_0}$ подобен унитарному и $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}_0}) \subset F(\mathcal{J})$. Отметим, что унитарный оператор должен быть абсолютно непрерывным (по [15] T_F является вполне неунитарным сжатием, поэтому $T_F|_{\mathcal{E}_0}$ – также вполне неунитарное сжатие; если вполне неунитарное сжатие подобно унитарному оператору, то этот унитарный оператор должен быть абсолютно непрерывным [23, IX.1.2, II.6.4]). Пусть $\mathcal{L}$ – это проекция на $\mathcal{E}_0$ множества многочленов, и пусть h – произвольный элемент пространства $\mathcal{E}_0$. Так как скалярное произведение в (3.17) стремится к нулю при $r \to 1-$ для любой точки $a \in \mathcal{J}$, то $T_F|_{\mathcal{E}_0}$, $\mathcal{L}$ и h удовлетворяют условиям леммы 3.4, поэтому $h = 0$. Так как h – произвольный элемент пространства $\mathcal{E}_0$, то мы должны заключить, что $\mathcal{E}_0 = \{0\}$ – противоречие. Таким образом, $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}}) \cap F(\mathcal{J}) = \varnothing$. $\square$

Замечание 3.7. Если в предположении 3) теоремы 3.6 заменить условие $F|_{\mathcal{J}} \in C^{1+\alpha}$ более слабым условием $F|_{\mathcal{J}} \in C^1$, то условие (3.6), и, следовательно, (3.9) и (3.11) будут выполняться. Оценку (3.8) нужно будет заменить более слабой, но оценку (3.2) для $T_F|_{\mathcal{E}}$ и $F(\mathcal{J})$ можно будет получить. Таким образом, если предположить, что $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}}) \cap F(\mathcal{J}) \neq \varnothing$, то можно применить лемму 3.3 и получить гиперинвариантное подпространство $\mathcal{E}_0$ для T_F, такое что оператор $T_F|_{\mathcal{E}_0}$ подобен унитарному. Но автор не может доказать, что пространство $\mathcal{E}_0$ на самом деле является нулевым, без предположения $F|_{\mathcal{J}} \in C^{1+\alpha}$ для некоторого $\alpha > 1/2$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 3.6 на случай произвольного приращения аргумента унимодулярного непрерывного символа F.

Теорема 3.8. *Пусть $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – непрерывная функция, N – натуральное число, $\alpha > 1/2$ и $J \subset \mathbb{T}$ – открытая дуга. Предположим, что F, N, α и J обладают следующими свойствами:*

1) $\operatorname{wind} F = N$;

2) *существуют попарно различные непустые открытые дуги $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_N$, такие что $F(\mathcal{J}_1) = \dots = F(\mathcal{J}_N) = J$ и если $\lambda \in J$, то существует*

ровно N точек $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{T}$, таких что $F(a_n) = \lambda$, $n = 1, \dots, N$ (конечно, $a_n \in \mathcal{J}_n$, $n = 1, \dots, N$);

3) $F|_{\mathcal{J}_n} \in C^{1+\alpha}$, то есть $F'(\zeta) = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathcal{J}_n)$ и $F'(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \mathcal{J}_n$, $n = 1, \dots, N$.

Положим $\mathcal{E} = \cap_{\lambda\in\mathbb{D}}(T_F - \lambda I)H^2$. Тогда $\sigma(T_F|_\mathcal{E}) \subset \mathbb{T} \setminus J$.

Доказательство теоремы 3.8 по существу то же самое, что и доказательство теоремы 3.6, но требует больше обозначений и вычислений. Продолжим функцию F в окрестности дуг $\mathcal{J}_n$, $n = 1, \dots, N$, как в доказательстве теоремы 3.6, обозначим эти продолжения функции F через F_n. Определим функции Q_λ для λ из окрестности дуги J по формуле

$$Q_\lambda(\zeta) = \begin{cases} \frac{F(\zeta)-\lambda}{\prod_{n=1}^{N}(\zeta - F_n^{-1}(\lambda))}, & \zeta \neq F_n^{-1}(\lambda) \\ \frac{F'(\zeta)}{\prod_{n\neq k}(\zeta - F_n^{-1}(\lambda))}, & \zeta = F_k^{-1}(\lambda) \end{cases}, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Положим $V_\lambda = T_{Q_\lambda}$, тогда

$$T_F - \lambda I = V_\lambda T_{\prod\limits_{n=1}^{N}(\zeta - F_n^{-1}(\lambda))}$$

(отметим, что в теореме 3.6 мы писали Q_w и V_w вместо Q_λ и V_λ, где $w = ra = F^{-1}(\lambda)$, чтобы упростить обозначения). Получим оценки для Q_λ и V_λ, как в теореме 3.6; таким образом, если мы предположим, что $\sigma(T_F|_\mathcal{E}) \cap J \neq \varnothing$, то мы найдем пространство $\mathcal{E}_0$, такое что оператор $T_F|_{\mathcal{E}_0}$ подобен унитарному. Доказательство того, что любой элемент пространства $\mathcal{E}_0$ равен нулю, аналогично соответствующей части доказательства теоремы 3.6, но длиннее. В частности, вместо непосредственного применения леммы 3.5 нужно проделать больше вычислений, но настоящих трудностей не возникает, поэтому подробное доказательство теоремы 3.8 не приводится.

Следствие 3.9. *Пусть $F : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – непрерывная функция, N – натуральное число, и пусть $\operatorname{wind} F = N$. Предположим, что*

1) гармонически сопряженная к $\arg F(\zeta)/\overline{\zeta}^N$ функция ограничена;

2) для почти всех точек $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ существуют число $\alpha > 1/2$ и открытая дуга $J \subset \mathbb{T}$, такие что $\lambda_0 \in J$ и F, α и J удовлетворяют условиям 2) и 3) теоремы 3.8.

Тогда оператор T_F подобен одностороннему сдвигу кратности N.

Доказательство. Из условия 1) следствия и работы [7] (см. (0.1) во введении статьи) следует, что оператор T_F подобен изометрии. Любая изометрия равна ортогональной сумме унитарного оператора и одностороннего сдвига. Обозначим изометрию, подобную оператору T_F, через $U \oplus S$, где U – унитарный оператор, а S – односторонний сдвиг. Легко видеть, что кратность сдвига S равна N, а оператор U подобен $T_F|_{\mathcal{E}}$, где пространство $\mathcal{E}$ определено в теореме 3.8. Обозначим через τ множество всех точек λ_0, удовлетворяющих условию 2) следствия; по предположению, $m(\tau) = 1$. По теореме 3.8 $\sigma(T_F|_{\mathcal{E}}) \subset \mathbb{T} \setminus \tau$. Таким образом, $m(\sigma(U)) = m(\sigma(T_F|_{\mathcal{E}})) = 0$. Но, по лемме 2.1, если $U \neq \mathbb{O}$, то U должен быть абсолютно непрерывным – противоречие. Следовательно, $U = \mathbb{O}$. $\square$

Пример 3.10. Пусть $f : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ – строго возрастающая функция, такая что $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi$, f гладкая на $(0, 2\pi)$, но функция $e^{it} \mapsto f(t) - t$, $t \in [0, 2\pi]$, не принадлежит классу Бесова $B_2^{1/2}(\mathbb{T})$. Положим $F(e^{it}) = e^{if(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда оператор T_F не подобен изометрии. В самом деле, F удовлетворяет условию 2) следствия 3.9; если предположить, что T_F подобен изометрии, то, как в доказательстве следствия 3.9, нужно заключить, что T_F должен быть подобен одностороннему сдвигу кратности 1. По лемме 2.2 функция F должна принадлежать классу Бесова $B_2^{1/2}(\mathbb{T})$. По [17, 7.8.2; 18, следствие 3.7] функция $e^{it} \mapsto f(t) - t$, $t \in [0, 2\pi]$, должна принадлежать классу Бесова $B_2^{1/2}(\mathbb{T})$ – противоречие.

Литература

1. H. Bercovici, *Operator theory and arithmetic in H^∞*. — AMS, Math. Surveys and Monographs **26** (1988).
2. H. Bercovici, *Notes on invariant subspaces.* — Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 1–36.
3. A. Böttcher and S. M. Grudsky, *Toeplitz operators with discontinuous symbols: phenomena beyond piecewise continuity*, Singular integral operators and related topics. — Oper. Theory Adv. Appl. **90**, Birkhäuser, Basel (1996), 55–118.
4. A. Böttcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators.* Springer (1990).
5. D. N. Clark, *On a similarity theory for rational Toeplitz operators.* — J. Reine Angew. Math. **320** (1980), 6–31.
6. D. N. Clark, *On Toeplitz operators with loops.* — J. Operator Theory **4** (1980), 37–54.

7. D. N. Clark, *On Toeplitz operators with unimodular symbols.* Operators in indefinite metric spaces, scattering theory and other topics. — (Bucharest, 1985), Oper. Theory Adv. Appl. **24**, Birkhäuser, Basel (1987), 59–68.
8. D. N. Clark, *Perturbation and similarity of Toeplitz operators.* Topics in operator theory: Ernst D. Hellinger memorial volume, Oper. Theory Adv. Appl. **48**, Birkhäuser, Basel (1990), 235–243.
9. D. N. Clark and J. H. Morrel, *On Toeplitz operators and similarity.* — Amer. J. Math. **100** (1978), 973-986.
10. P. L. Duren, *Theory of H^p spaces.* Academic Press (1970).
11. V. B. Dybin and S. M. Grudsky, *Introduction to the theory of Toeplitz operators with infinite index.* — Oper. Theory Adv. Appl. **137**, Birkhäuser, Basel (2002).
12. М. Ф. Гамаль, *Об операторах Тёплица, подобных одностороннему сдвигу.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **345** (2007), 85–104.
13. M. F. Gamal', *On Toeplitz operators similar to isometries.* — J. Operator Theory **59** (2008), 3–28.
14. M. F. Gamal', *On contractions that are quasiaffine transforms of unilateral shifts.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **74**(2008), 757–767.
15. R. Goor, *On Toeplitz operators which are contractions.* — Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 191–192.
16. V. V. Peller, *When is a function of a Toeplitz operator close to a Toeplitz operator?* Toeplitz operators and spectral function theory. — Oper. Theory Adv. Appl. **42**, Birkhäuser, Basel (1989), 59–85.
17. V. V. Peller, *Hankel operators and their applications.* Springer monographs in math. (2003).
18. В. В. Пеллер, С. В. Хрущёв, *Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы.* — Успехи мат. наук **37** (1982), No. 1, 53–124.
19. H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspaces.* Springer (1973).
20. M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Hardy classes and operator theory.* Oxford Math. Monogr. (1985).
21. J. Rovnyak, *On the theory of unbounded Toeplitz operators.* — Pacific J. Math., **31** (1969), 481–496.
22. D. Sarason, *Approximation of piecewise continuous functions by quotients of bounded analytic functions.* — Canadian J. Math. **24** (1972), 642–657.
23. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* Мир, М. (1970).
24. K. Takahashi, *Injection of unilateral shifts into contractions.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **57** (1993), 263–276.
25. D. Wang, *Similarity theory of smooth Toeplitz operators.* — J. Operator Theory **12** (1984), 319–330.
26. D. V. Yakubovich, *Riemann surface models of Toeplitz operator*, Toeplitz operators and spectral function theory, Oper. Theory Adv. Appl. **42**, Birkhäuser, Basel (1989), 305–415.
27. Д. В. Якубович, *К спектральной теории операторов Тёплица с гладким символом.* — Алгебра и анализ **3** No. 4 (1991), 208–226.
28. D. V. Yakubovich, *Dual piecewise analytic bundle shift models of linear operators.* — J. Funct. Anal. **136** (1996), 294–330.

Gamal' M. F. On Toeplitz operators with unimodular symbols: left invertibility and similarity to isometries.

Toeplitz operators with unimodular symbols on the Hardy space H^2 on the unit circle are considered. It is shown that the left invertibility of a Toeplitz operator with symbol $e^{it} \mapsto \theta(e^{it})e^{it/2}$, $t \in (0, 2\pi)$, where θ is an inner function, depends on θ. Also, Toeplitz operators that are similar to isometries are studed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023 Фонтанка 27
С.-Петербург

E-mail: gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 21 мая 2010 г.