Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

В. В. Севостьянова

ПОЛЕ ИНВАРИАНТОВ ПРИСОЕДИНЁННОГО ДЕЙСТВИЯ УНИТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ В НИЛЬРАДИКАЛЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ

Рассмотрим полную линейную группу $\mathrm{GL}(n, K)$, определённую над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики. Пусть B (соответственно N) – её борелевская (соответственно максимальная унипотентная) подгруппа, состоящая из треугольных матриц с ненулевыми (соответственно единичными) элементами по диагонали. Фиксируем параболическую подгруппу P, содержащую B. Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}(n, K)$, соответствующие P, B, N. Разложим $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{m}$ в виде суммы нильрадикала $\mathfrak{m}$ и блочнодиагональной подалгебры $\mathfrak{r}$ с размерами блоков $(r_1, \ldots, r_s)$. Подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно присоединённого действия группы P. Продолжим это действие до представления в алгебре $K[\mathfrak{m}]$ и поле $K(\mathfrak{m})$. Подалгебра $\mathfrak{m}$ содержит открытую (по Зарискому) P-орбиту [1], которая называется орбитой Ричардсона. Следовательно, алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^P = K$. Вопрос о структуре алгебры инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ и $K[\mathfrak{m}]^B$ остаётся открытым и представляется достаточно трудным. В частном случае $P = B$ ответ следующий: алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ есть алгебра многочленов

$$K[x_{12}, x_{23}, \ldots, x_{n-1,n}].$$

Настоящая статья является продолжением работы [6], в которой была сформулирована гипотеза о строении поля инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$. Эта гипотеза доказывается в предлагаемой работе. Теорема 1.8 работы даёт полное описание поля инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$ для произвольной параболической подалгебры. Другой результат работы – теорема 1.7, в которой указываются канонические представители N-орбит общего положения.

Ключевые слова: поле инвариантов, параболическая подалгебра, треугольная группа, присоединённое представление.

Статья частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00151-а .

1. Основные определения и результаты

Каждый положительный корень γ в $\mathfrak{gl}(n,K)$ имеет вид [3]

$$\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Отождествим γ с парой (i,j) и множество положительных корней Δ^+ с множеством пар (i,j), $i<j$. Система положительных корней $\Delta^+_{\mathfrak{r}}$ редуктивной подалгебры $\mathfrak{r}$ является подсистемой в Δ^+.

Рассмотрим стандартный базис $\{E_{i,j} : i<j\}$ в $\mathfrak{n}$. Будем использовать также обозначение E_γ для базисного элемента $E_{i,j}$, если $\gamma = (i,j)$.

Определим отношение в Δ^+, для которого

$$\gamma' \succ \gamma, \quad \text{если} \quad \gamma' - \gamma \in \Delta^+.$$

Если $\gamma' \succ \gamma$ или $\gamma' \prec \gamma$, то называем корни γ и γ' сравнимыми.

Обозначим через M множество таких $\gamma \in \Delta^+$, что $E_\gamma \in \mathfrak{m}$. Отождествим алгебру $K[\mathfrak{m}]$ с алгеброй многочленов от переменных $x_{i,j}$, $(i,j)\in M$.

Определение 1.1. *Подмножество S в M будем называть базой, если элементы S попарно не сравнимы и для любого $\gamma \in M\setminus S$ существует $\xi \in S$ такой, что $\gamma \succ \xi$.*

Определение 1.2. *Пусть A – подмножество в S. Будем говорить, что γ – минимальный элемент в A, если не существует $\xi\in A$, такого, что $\gamma \succ \xi$.*

Отметим, что M имеет единственную базу S, которая строится следующим образом. Образуем множество S_1 минимальных элементов в M. По определению, $S_1 \subset S$. Образуем множество M_1, которое получается из M удалением S_1 и всех

$$\{\gamma \in M : \ \exists\, \xi \in S_1, \ \gamma \succ \xi\}.$$

Подмножество минимальных элементов S_2 в M_1 также содержится в S и т.д. Продолжая процесс дальше, мы получаем базу S.

Определение 1.3. *Упорядоченный набор положительных корней*

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$$

будем называть цепочкой, если $\gamma_1 = (a_1,a_2)$, $\gamma_2=(a_2,a_3)$, $\gamma_3=(a_3,a_4)$ и т.д. Длиной цепочки будем называть число s.

Определение 1.4. *Будем говорить, что два корня $\xi, \xi' \in S$ образуют допустимую пару $q = (\xi, \xi')$, если существует $\alpha_q \in \Delta^+_{\mathfrak{r}}$ такой, что набор корней $\{\xi, \alpha_q, \xi'\}$ является цепочкой. Заметим, что корень α_q находится по q однозначно.*

Образуем множество $Q = Q(\mathfrak{p})$, состоящее из допустимых пар корней из S. По каждой допустимой паре $q = (\xi, \xi')$ построим положительный корень $\varphi_q = \alpha_q + \xi'$. Рассмотрим подмножество

$$\Phi = \{\varphi_q : \ q \in Q\}.$$

Мы будем строить по данной параболической подалгебре диаграмму, представляющую собой квадратную матрицу, на которой корни из S отмечены символом $\otimes$, а корни из Φ – символом $\times$. Остальные места в диаграмме не заполняются.

Пример 1. Ниже приведена диаграмма для параболической подалгебры со следующими размерами её диагональных блоков (1, 3, 2, 1, 3, 2, 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	$\otimes$													1
	1			$\times$	$\times$				$\otimes$					2
		1			$\otimes$									3
			1	$\otimes$										4
				1		$\times$		$\otimes$						5
					1	$\otimes$								6
						1	$\otimes$							7
							1			$\times$	$\times$			8
								1		$\times$	$\otimes$			9
									1	$\otimes$				10
										1		$\times$	$\otimes$	11
											1	$\otimes$		12
												1		13
													1	14

Диаграмма 1.

Рассмотрим формальную матрицу $\mathbb{X}$, в которой на местах $(i,j) \in M$ стоят переменные $x_{i,j}$, а остальные элементы равны нулю. Для любого $\gamma = (a,b)$ из M обозначим через S_γ множество тех $\xi = (i,j)$ в S, для которых $i > a$ и $j < b$. Пусть $S_\gamma = \{(a_1,b_1), \ldots, (a_k,b_k)\}$. Обозначим через M_γ минор M_I^J матрицы $\mathbb{X}$ с упорядоченными системами строк I и столбцов J, где

$$I = \mathrm{ord}\{a, a_1, \ldots, a_k\}, \quad J = \mathrm{ord}\{b_1, \ldots, b_k, b\}.$$

По каждой допустимой паре $q=(\xi,\xi')$ построим многочлен

$$L_q = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in\Delta_{\mathfrak{r}}^+\cup\{0\}\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha_q}} M_{\xi+\alpha_1}M_{\alpha_2+\xi'}. \tag{1}$$

Теорема 1.5 [6]. *Для произвольной параболической подалгебры система многочленов*

$$\{M_\xi,\ \xi\in S;\ L_q,\ q\in Q\}$$

содержится в $K[\mathfrak{m}]^N$ и алгебраически независима над K.

Обозначим через $\mathcal{Y}$ подмножество в $\mathfrak{m}$, состоящее из матриц вида

$$\sum_{\xi\in S} c_\xi E_\xi + \sum_{\varphi\in\Phi} c'_\varphi E_\varphi,$$

где $c_\xi\neq 0$, $c'_\varphi\neq 0$.

Определение 1.6. *Будем называть матрицы из $\mathcal{Y}$ каноническими.*

В четвёртом параграфе мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 1.7. *Существует непустое открытое по Зарискому подмножество $U\subset\mathfrak{m}$ такое, что N-орбита любого $x\in U$ пересекает $\mathcal{Y}$ в единственной точке.*

Теорема 1.8. *Поле инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$ – поле рациональных функций от M_ξ, $\xi\in S$, и L_q, $q\in Q$.*

Как следствие из теоремы 1.8 получаем результат:

Теорема 1.9. *Максимальная размерность N-орбиты в $\mathfrak{m}$ равна*

$$\dim\mathfrak{m}-|S|-|\Phi|.$$

Обозначим $w_{i,j}:\mathfrak{m}\to K$ координатную функцию, ставящую в соответствие матрице $x\in\mathfrak{m}$ число, стоящее на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Пусть $U\subset\mathfrak{m}$ – открытое по Зарискому множество из теоремы 1.7.

Теорема 1.10. *Пусть N-орбита Ω точки $x\in U$ пересекает $\mathcal{Y}$ в точке y. Тогда Ω описывается следующими уравнениями*

$$\begin{aligned} &M_\xi - w_\xi(y)=0, \quad \text{где}\quad \xi\in S;\\ &L_q - w_\varphi(y)=0, \quad \text{где}\quad q\in Q\\ &\qquad\qquad\qquad\quad \text{и}\quad \varphi\in\Phi\quad \text{соответствует допустимой паре}\quad q. \end{aligned}$$

2. Вспомогательные утверждения о строении систем корней S и Φ

В этом параграфе мы докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть снова $(r_1, \ldots, r_s)$ – размеры блоков в редуктивной подалгебре $\mathfrak{r}$. Обозначим $R_k = \sum\limits_{t=1}^{k} r_t$.

Лемма 2.1. *Для любого корня $(i,j) \in M \setminus S$ существует номер $\widetilde{i} > i$ такой, что $(\widetilde{i}, j) \in S$, или номер $\widetilde{j} < j$, для которого $(i, \widetilde{j}) \in S$.*

Замечание. Иначе говоря, база S построена таким образом, что для любой клетки (i,j) матрицы из $\mathfrak{m}$ существует элемент из базы S, стоящий в i-ой строке и/или j-ом столбце.

Доказательство. Из определения базы S для произвольного $\gamma = (i,j)$ из $M \setminus S$ существует корень $\xi = (k,m) \in S$, что $\gamma - \xi \in \Delta^+$, то есть
$$\gamma - \xi = \varepsilon_i - \varepsilon_j - (\varepsilon_k - \varepsilon_m) \in \Delta^+.$$
Последнее вложение может быть выполнено, если $i = k$ или $j = m$. □

Лемма 2.2. *Предположим, что корень $(i,j) \in S$ такой, что $i \neq R_k$ при любом k. Тогда существует номер $\widetilde{j} < j$ такой, что $(i+1, \widetilde{j}) \in S$.*

Доказательство. Рассмотрим корень $(i+1, j) \in M$, он не лежит в S, и под ним также нет корней из S, так как иначе в одном столбце стоят два корня из S. Предположим, что для любого $\widetilde{j} < j$ выполняется $(i+1, \widetilde{j}) \notin S$. Тогда для корня $(i+1, j)$ не существует $\xi \in S$, для которого
$$(i+1, j) - \xi \in \Delta^+,$$
что противоречит определению базы. □

Следствие. *Предположим, что $(i,j) \in S$ такой, что для некоторого номера k выполняется*
$$R_{k-1} < i < R_k.$$
Тогда для любого $\widetilde{i}$, где $i < \widetilde{i} \leqslant R_k$, существует номер $\widetilde{j} < j$, для которого $(\widetilde{i}, \widetilde{j}) \in S$.

Доказательство проводится по индукции по номеру $\widetilde{i}$. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2.3. *Предположим, что корень* $(i,j) \in S$ *такой, что номер* $j \neq R_k + 1$ *при любом* k. *Тогда существует номер* $\widetilde{i} > i$ *такой, что корень* $(\widetilde{i}, j-1) \in S$.

Следствие. *Предположим, что* $(i,j) \in S$ *такой, что для некоторого номера* k *выполняется*

$$R_k + 1 < j \leqslant R_{k+1}.$$

Тогда для любого $\widetilde{j}$, *где* $R_k < \widetilde{j} < j$, *существует номер* $\widetilde{i} > i$, *такой, что* $(\widetilde{i}, \widetilde{j}) \in S$.

Лемма 2.4. *Пусть корень* $(i,j) \in S$ *такой, что не существует корня* $(\widetilde{i}, \widetilde{j}) \in S$, *где* $i > \widetilde{i}$ *и* $j < \widetilde{j}$.

Предположим теперь, что для некоторых a *и* b *выполняются*

$$R_a < i \leqslant R_{a+1}, \quad R_{b-1} < j \leqslant R_b,$$

тогда $i = 1 + R_a$ *или* $j = R_b$.

Например, на диаграмме 1 условию леммы 2.4 удовлетворяют корни $(1,2)$, $(2,10)$, $(9,12)$ и $(11,14)$.

Доказательство. Предположим противное, то есть $i > R_a + 1$ и $j < R_b$.

Рассмотрим корень $(i-1, j+1) \in M$, из условия леммы следует, что он не лежит в S. Тогда существует $\xi \in S$, для которого

$$(i-1, j+1) - \xi \in \Delta^+.$$

Из леммы 2.1 следует, что $\xi = (i-1, k)$, где $k < j+1$, либо $\xi = (m, j+1)$, где $i - 1 < m$. В первом случае, в силу следствия из леммы 2.2 для любого номера k такого, что $R_{b-1} < k < j+1$, существует корень $(i_k, k) \in S$, где $i_k > i-1$. Тогда $\xi \notin S$, так как иначе в k-ом столбце имеются два корня из S, что противоречит минимальности базы. Второй случай также невозможен в силу следствия из леммы 2.3. Следовательно, такого $\xi \in S$ не существует, $(i-1, j+1) \in S$, и мы пришли к противоречию. □

Лемма 2.5. *Предположим, что следующие r корней лежат в S:*

$$(i_1, j-r+1), (i_2, j-r+2), \ldots, (i_r, j) = (i, j), \tag{2}$$

где $i_1 > i_2 > \ldots > i_r$, причём не существует корня $(i_0, j-r) \in S$, такого, что $i_0 > i_1$. Тогда найдётся ровно r корней из S вида

$$(i+r-1, j_1), (i+r-2, j_2), \ldots, (i, j_r) = (i, j), \tag{3}$$

где $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Верно и обратное, если r корней вида (3) лежат в S и не существует корня $(i-r, j_0) \in S$, $j_0 < j_1$, то существует в точности r корней из S вида (2).

Доказательство. Следствие из леммы 2.2 утверждает, что такие корни существуют. Пусть их число равно t:

$$(i+t-1, j_1), (i+t-2, j_2), \ldots, (i, j_t) = (i, j), \quad j_k < j_{k+1}. \tag{4}$$

Первый корень $(i_1, j-r+1)$ в списке (2) является минимальным (в смысле отношения $\succ$), значение j_1 – наименьшее из возможных. Тогда

$$i_1 + 1 = j - r + 1,$$

следовательно, $i_1 = j - r$. Аналогично первый корень из (4) – также минимальный, следовательно, справедливо

$$i + t - 1 + 1 = j_1,$$

то есть $j_1 = i + t$. Так как корень $\xi = (i, j) \in S$, следовательно, ему соответствует квадратный минор M_ξ. Найдём его порядок:

$$i_1 - i + 1 = j - j_1 + 1,$$

откуда следует $j - r - i = j - (i+t)$ и $r = t$. □

Определение 2.6. *Всякий корень $(i, j) \in M$, удовлетворяющий*

$$R_{k-1} < i \leqslant R_k \quad \text{и} \quad R_k < j \leqslant n,$$

назовём корнем, лежащим правее k-ого блока в $\mathfrak{r}$.

Лемма 2.7. *Пусть корни*

$$(i, j_1), (i, j_2), \ldots, (i, j_a) \in S \cup \Phi,$$

где $j_1 < j_2 < \ldots < j_a$ *и* $a > 1$, *и в строке с номером* i *других корней из* $S \cup \Phi$ *нет. Тогда*

(1) *если* $R_{l-1} < i \leqslant R_l$, *то* $j_1 = R_l + 1$;

(2) *если* $j_1 \leqslant R_k < j_b$ *для некоторого номера* $b \leqslant a$, *то* $r_k < b$.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт леммы. Пусть $R_{l-1} < i \leqslant R_l$ и $j_1 \neq R_l + 1$. Так как корень $(i, j_1) \in \Phi$, то существуют корни $(\widetilde{i}, j_1), \widetilde{i} > i$, и (c, i), лежащие в S. Далее, поскольку $j_1 \neq R_l + 1$, то в силу леммы 2.3 найдётся $(\widehat{i}, j_1 - 1) \in S$. Тогда пара корней $\big((c, i), (\widehat{i}, j_1 - 1)\big)$ является допустимой. Отсюда имеем $(i, j_1 - 1) \in \Phi$. Противоречие, следовательно, $j_1 = R_l + 1$.

2. Пусть для некоторого номера m выполняется $R_{m-1} < j_b \leqslant R_m$. Покажем, что для любого номера k, где $l < k < m$, выполняется $r_k < b$. Доказательство проведём индукцией по k. Для $(l+1)$-ого блока в $\mathfrak{r}$ утверждение очевидно. Предположим, что размеры блоков в $\mathfrak{r}$, номера которых равны $l+1, l+2, \ldots, k-1$, меньше b. Покажем, что $r_k < b$.

Предположим противное. Пусть $r_k > b$, тогда для любого числа j, где $R_{k-1} < j \leqslant R_k$, найдётся корень $(a_j, j) \in S$, для некоторого $a_j \geqslant i$. Таким образом, существуют r_k корней из S вида

$$(i_1, R_{k-1} + 1), (i_2, R_{k-1} + 2), \ldots, (i_{r_k}, R_k)$$

для некоторых $i_1 > i_2 > \ldots > i_{r_k}$. Из леммы 2.5 следует, что существует r_k корней из S, лежащих правее некоторого блока в $\mathfrak{r}$. Тогда размер этого блока не меньше r_k, и, следовательно, больше b. Так как его номер меньше k, мы получили противоречие с предположением индукции. Значит, для любого номера k, такого, что $j_1 \leqslant R_k < j_b$, выполняется $r_k < b$. □

3. Система корней T и главные миноры

Пусть снова $w_{i,j} : \mathfrak{m} \to K$ – координатная функция, ставящая в соответствие матрице $x \in \mathfrak{m}$ число, стоящее на пересечении i-ой строки и j-ого столбца.

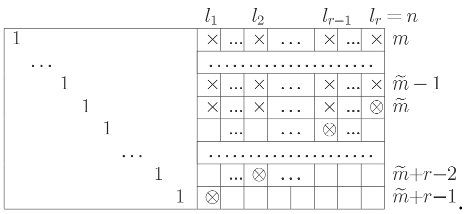
Рассмотрим $x \in \mathfrak{m}$. Пусть соответствующая блочнодиагональная подалгебра $\mathfrak{r}$ состоит из блоков с размерами $(r_1, \ldots, r_s)$, тогда $n = r_1 + \ldots + r_s$. Фиксируем размер последнего блока: $r_s = r$. Как и выше $R_k = \sum\limits_{t=1}^{k} r_t$.

Для доказательства теоремы 1.7 нам потребуется рассмотреть два случая, когда в n-ом столбце есть корень из S и когда в n-ом столбце нет корней из S. Чтобы доказать теорему в первом случае, мы введём понятие главного минора (определение 3.3) и определим некоторые системы корней Ψ и T (обозначения 3.1 и 3.6 соответственно). Начиная с этого момента всюду в данном параграфе мы предполагаем, что параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$ такая, что в n-ом столбце лежит корень из S. Обозначим его $(\widetilde{m}, n)$. Возьмём номер $m \leqslant \widetilde{m}$, такой, что $(m, n) \in S \cup \Phi$ и если $i < m$, то $(i, n) \notin S \cup \Phi$. В силу леммы 2.5 и следствия из леммы 2.2 существует ровно r корней из S вида

$$(\widetilde{m}+r-1, l_1), (\widetilde{m}+r-2, l_2), \ldots, (\widetilde{m}+1, l_{r-1}), (\widetilde{m}, l_r) = (\widetilde{m}, n)$$

для некоторых $l_1 < l_2 < \ldots < l_r = n$.

Изобразим графически часть диаграммы для $\mathfrak{m}$, содержащую эти корни:



Рассмотрим всевозможные цепочки корней из $S \cup \Phi$, содержащие корни (i, j), где $m \leqslant i < m + r$ и $j \in \{l_1, l_2, \ldots, l_r\}$. Выберем среди них цепочки, удовлетворяющие условию: если (a, b) – корень такой цепочки и при некотором $k \geqslant 1$ верно $R_k < a \leqslant R_{k+1}$, то

$$a \leqslant r + R_k. \tag{5}$$

Обозначение 3.1. Множество всех корней, входящих в такие цепочки, обозначим через Ψ.

Очевидно, что длина любой цепочки корней из $S \cup \Phi$ меньше числа клеток в $\mathfrak{r}$. На примере 1 покажем, как расположены корни из Ψ. Отметим их символом $\boxtimes$.

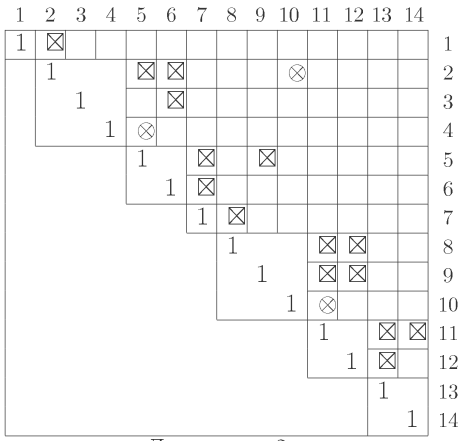


Диаграмма 2.

Напомним, что s – число блоков редуктивной подалгебры $\mathfrak{r}$. Размер последнего блока в $\mathfrak{r}$ равен r. Очевидно, что для некоторого номера $\widetilde{s} < s$ выполняется $m = R_{\widetilde{s}} + 1$. Из леммы 2.7 вытекает, что если $\widetilde{s} + 1 < t < s$, то размер t-ого блока в $\mathfrak{r}$ меньше размера последнего блока r. Поэтому все корни (i, j), содержащиеся в $S \cup \Phi$, такие, что $i > R_{\widetilde{s}+1}$, лежат в системе корней Ψ.

Пример 2. Приведём ещё один пример диаграммы для параболической подалгебры с размерами диагональных блоков $(2, 2, 1, 3, 2, 1, 3)$. Здесь числа $\widetilde{s} = 3$ и $m = R_3 + 1 = 6$.

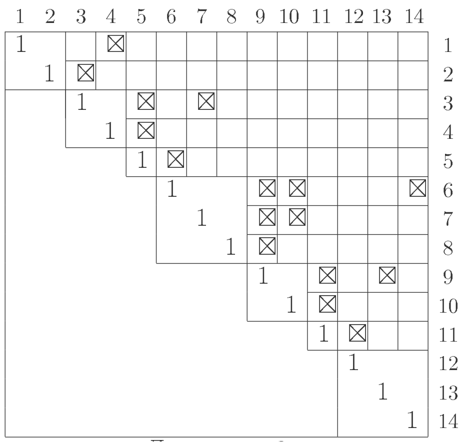


Диаграмма 3.

Обозначим $\widetilde{r}_k = \min(r, r_k)$. Тогда из определения множества Ψ следует, что если $(i,j) \in \Psi$, то при $k > 1$ выполняется

$$R_{k-1} < i \leqslant \widetilde{r}_k + R_{k-1}.$$

Лемма 3.2. *Пусть $k > 1$. Утверждается, что*

(1) *Существует $\widetilde{r}_k$ корней из $S \cup \Phi$ в строке с номером $R_{k-1}+1$.*

(2) *Первые (по номеру столбца) $\widetilde{r}_k$ корней из строки с номером $R_{k-1}+1$, содержащиеся в $S \cup \Phi$, лежат в Ψ.*

(3) *Все корни из Ψ, лежащие правее k-ого блока в $\mathfrak{r}$, содержатся в строках с номерами $R_{k-1}+1, R_{k-1}+2, \dots, R_{k-1}+\widetilde{r}_k$ и тех же столбцах, что и корни из Ψ в строке с номером $R_{k-1}+1$.*

Доказательство. 1. (a) Покажем сначала, что правее k-ого блока лежит не менее $\widetilde{r}_k$ корней из S.

Доказательство проведём от противного. Предположим, что правее k-ого блока лежит меньше $\widetilde{r}_k$ корней из S. Тогда в строке с номером $R_{k-1}+1$ нет корней из S. В противном случае правее k-ого блока лежит $r_k \geqslant \widetilde{r}_k$ корней из S. Из леммы 2.1 для каждого корня $(R_{k-1}+1, j) \in M$, лежащего в строке с номером $R_{k-1}+1$, существует корень $\xi = (i,j) \in S$, где $i > R_{k-1}+1$.

Очевидно, что $r = r_s \geqslant \widetilde{r}_k$. Пусть l – наименьшее число, для которого $r_l \geqslant \widetilde{r}_k$, $l > k$. Так как $r_s = r \geqslant \widetilde{r}_k$ и $s > k$, то $l \leqslant s$.

Далее, в каждом из столбцов с номерами

$$R_{l-1}+1, R_{l-1}+2, \dots, R_{l-1}+r_l = R_l$$

лежит корень $(a_i, R_{l-1}+i) \in S$, где $i = 1, \dots, r_l$. Из леммы 2.3 следует, что $a_1 > a_2 > \dots > a_{r_l}$. Тогда по лемме 2.5 существует номер $k \leqslant p < l$ такой, что правее p-ого блока в $\mathfrak{r}$ лежит r_l корней из S. Тогда $r_p \geqslant r_l \geqslant \widetilde{r}_k$. Из минимальности выбора l получаем $l = k$. Но это противоречит предположению, что правее k-ого блока лежит меньше $\widetilde{r}_k$ корней из S. Таким образом, правее k-ого блока лежит $\widetilde{r}_k$ корней из S. Утверждение пункта (a) доказано.

(b) Завершим доказательство утверждения 1. Пусть размер k-ого блока в $\mathfrak{r}$ больше 1. Для $r_k = 1$ доказательство тривиально, поскольку $(R_k, R_k+1) \in S$ для любого номера k.

Следствие из леммы 2.3 гласит, что корни из S, лежащие правее k-ого блока в $\mathfrak{r}$, имеют следующий вид:

$$\xi_1 = (R_k, j_1), \xi_2 = (R_k - 1, j_2), \dots, \xi_{\widetilde{r}_k} = (R_k - \widetilde{r}_k + 1, j_{\widetilde{r}_k}), \dots,$$

где $j_1 = R_k + 1$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_{\widetilde{r}_k}$. Покажем, что все корни вида $(R_{k-1}+1, j_a)$, где $1 \leqslant a \leqslant \widetilde{r}_k$, лежат в $S \cup \Phi$.

Рассмотрим корень $\eta = (R_{k-1}, R_{k-1}+1)$; так как $k > 1$, то он, очевидно, лежит в S. Обозначим

$$I = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \widetilde{r}_k - 1, & \text{если } \ \widetilde{r}_k = r_k; \\ 1, 2, \ldots, \widetilde{r}_k, & \text{если } \ \widetilde{r}_k < r_k. \end{cases}$$

Каждый корень $\gamma_a = (R_{k-1}+1, R_k - a + 1)$, где $a \in I$, лежит в $\Delta^+_{\mathfrak{r}}$. Следовательно, все пары корней (η, ξ_a), $a \in I$, – допустимые. Обозначим

$$\zeta_a = \begin{cases} \gamma_a + \xi_a = (R_{k-1}+1, j_a), & \text{если } \ \widetilde{r}_k < r_k, \\ \zeta_{\widetilde{r}_k} = \xi_{\widetilde{r}_k}, & \text{если } \ \widetilde{r}_k = r_k. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда корни

$$\zeta_a \in \Phi \quad \text{для любого} \quad a \in I.$$

Что доказывает первое утверждение леммы.

Доказательство утверждений 2 и 3 в лемме проведём для номеров k не больших $\widetilde{s}+1$. Для остальных k доказывать нечего.

2. Доказательство второго утверждения проведём по индукции по числу k, начиная с наибольшего. Для $k = \widetilde{s}+1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение пункта верно для корней из Ψ, стоящих правее блоков в $\mathfrak{r}$ с номерами $k+1, k+2, \ldots, \widetilde{s}+1$. Докажем это утверждение для блока с номером k. А именно, докажем, что для любого $1 \leqslant a \leqslant \widetilde{r}_k$ корень ζ_a, определённый в (6), лежит в системе корней Ψ.

Из леммы 2.5 следует, что существуют корни из S вида

$$(i_1, j_a - a + 1), (i_2, j_a - a + 2), \ldots, (i_a, j_a) = (R_k - a + 1, j_a)$$

для некоторых $i_1 > i_2 > \ldots > i_a = R_k - a + 1$. Для первого корня в этом списке выполняется $i_1 = j_a - a = R_b$ для некоторого номера $b \geqslant k$.

Обозначим $\xi = (R_{b+1}, R_{b+1}+1)$. Легко видеть, что корень $\xi \in S$. Если $j_a < R_{b+1}$, то корень $(j_a, R_{b+1}) \in \Delta^+_{\mathfrak{r}}$; тогда пара (ξ_a, ξ) – допустимая. Следовательно, корень $(j_a, R_{b+1}+1)$ лежит в Φ. Если $j_a = R_{b+1}$, то $(j_a, R_{b+1}+1)$ лежит в базе S. То есть в любом из случаев $(j_a <$

R_{b+1} и $j_a = R_{b+1}$) корни $(j_a, R_{b+1}+1) \in S \cup \Phi$. Осталось показать, что корни $(j_a, R_{b+1}+1) \in \Psi$. Рассмотрим цепочку

$$\begin{gathered}(j_a, R_{b+1}+1), \quad (R_{b+1}+1, R_{b+2}+1),\\ (R_{b+2}+1, R_{b+3}+1), \ldots, (R_{\widetilde{s}}+1, R_{\widetilde{s}+1}+1),\end{gathered}$$

все корни в ней лежат в $S \cup \Phi$. Так как

$$j_a = a + R_b \leqslant \widetilde{r}_k + R_b \leqslant r + R_b,$$

то для пары $(j_a, R_{b+1}+1)$ выполняется (5). Следовательно, корень $(j_a, R_{b+1}+1) \in \Psi$. Отсюда корень ζ_a также лежит в Ψ.

3. Докажем утверждение третьего пункта. Рассмотрим корень (i,j), где $R_{k-1}+1 < i \leqslant R_{k-1}+\widetilde{r}_k$, $j_{a-1} < j < j_a$ для некоторого $a \in \{2, \ldots, \widetilde{r}_k\}$. Предположим, что $(i,j) \in S \cup \Psi$. Следовательно, существует корень $(\widetilde{i}, j) \in S$, $\widetilde{i} > i$. Тогда аналогично 1 и 2 пунктам леммы получаем, что $(R_{k-1}+1, j) \in \Psi$. Получили противоречие с $j \neq j_a$ для любого a. Следовательно, $(i,j) \notin \Psi$.

Нам осталось показать, что нет корней из Ψ, лежащих в прямоугольнике $R_{k-1} < i \leqslant R_{k-1}+\widetilde{r}_k$, $j_{\widetilde{r}_k} < j \leqslant n$. Допустим противное. Пусть корень $(i,j) \in \Psi$. Тогда $(i,j) \in S \cup \Phi$ и существует число $a > \widetilde{r}_k$, такое, что $\xi_a = (R_k - a + 1, j) \in S$, где $R_k - a + 1 \geqslant i$.

Заметим, что если $a > \widetilde{r}_k$, то $r_k > \widetilde{r}_k$, следовательно, $\widetilde{r}_k = r$, тогда $a > r$. Повторяя рассуждения, проведённые во втором пункте, получаем следующую оценку для j:

$$j = R_b + a > r + R_b.$$

Следовательно, в j-ой строке корней из Ψ нет. Тогда нет корней из Ψ и в j-ом столбце. Получаем противоречие с тем, что $(i,j) \in \Psi$. $\square$

Сопоставим каждому блоку редуктивной части $\mathfrak{r}$, кроме последнего, некоторый минор матрицы $\mathbb{X}$ по следующему правилу. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_{\widetilde{r}_k}$ – номера столбцов, в которых стоят все корни из Ψ, лежащие правее k-ого блока в $\mathfrak{r}$.

Определение 3.3. *Назовём минор в $\mathbb{X}$, стоящий на пересечении*

$$R_{k-1} < i \leqslant \widetilde{r}_k + R_{k-1} \quad \text{\textit{строк и}} \quad j_1, j_2, \ldots, j_{\widetilde{r}_k} \quad \text{\textit{столбцов,}}$$

главным минором.

Выпишем все главные миноры из примеров 1 и 2. Как и выше, минор M_I^J – минор матрицы $\mathbb{X}$ с упорядоченными системами строк I и столбцов J.

В примере 1 главные миноры – это M_1^2, $M_{2,3}^{5,6}$, $M_{5,6}^{7,9}$, M_7^8, $M_{8,9}^{11,12}$ и $M_{11,12}^{13,14}$; в примере 2 – $M_{1,2}^{3,4}$, $M_{3,4}^{5,7}$, M_5^6, $M_{6,7,8}^{9,10,14}$, $M_{9,10}^{11,12}$ и M_{11}^{12}.

Порядок главного минора, стоящего правее k-ого блока в подалгебре $\mathfrak{r}$, равен $\widetilde{r}_k = \min(r, r_k)$. Число главных миноров на единицу меньше числа блоков в $\mathfrak{r}$. Заметим, никакие два главных минора не имеют общего столбца/строки.

Лемма 3.4. *Пусть (i,j) – корень из Ψ. Утверждается, что для любого $\widetilde{j} < j$ такого, что $(i,\widetilde{j}) \notin \Delta_{\mathfrak{r}}^+$, существует корень $(\widetilde{i},\widetilde{j})$, $\widetilde{i} \geqslant i$, содержащийся в Ψ.*

Доказательство. Пусть корень $(i,\widetilde{j}) \notin \Delta_{\mathfrak{r}}^+$ и $\widetilde{j} < j$. По определению базы S существует корень $\xi \in S$ такой, что $(i,\widetilde{j}) - \xi \in \Delta^+$. Из леммы 2.1 следует, что корень $\xi = (i,b)$, где $b > \widetilde{j}$, либо $\xi = (a,\widetilde{j})$, $a > i$. Первый случай невозможен, так как в строке правее корня из S не может стоять корень из Φ, поэтому $\xi = (a,\widetilde{j})$, где $a > i$.

Для некоторого номера l выполняется $R_{l-1} < a \leqslant R_l$. Первое утверждение леммы 3.2 гласит, что корень $(R_{l-1}+1,\widetilde{j}) \in S \cup \Phi$. Покажем, что он лежит в системе Ψ.

Для некоторого k выполняется $R_{k-1} < \widetilde{j} \leqslant R_k$. Очевидно, что корень $(R_k, R_k+1) \in S$. Если $\widetilde{j} < R_k$, то корень $(\widetilde{j}, R_k) \in \Delta_{\mathfrak{r}}^+$ и пара корней

$$\big((a,\widetilde{j}),(R_k,R_k+1)\big)$$

является допустимой. Следовательно, $(\widetilde{j},R_k) \in \Phi$. Если $\widetilde{j} = R_k$, то корень $(\widetilde{j},R_k+1) \in S$. Таким образом, имеем $(\widetilde{j},R_k+1) \in S \cup \Phi$, каким бы ни оказался номер $\widetilde{j}$ $(R_{k-1} < \widetilde{j} \leqslant R_k)$. Из леммы 3.2 и (5) вытекает, что все корни цепочки

$$(\widetilde{j},R_k+1),(R_k+1,R_{k+1}+1),\ldots,(R_{\widetilde{s}}+1,R_{\widetilde{s}+1}+1)$$

лежат в Ψ. Далее, из леммы 2.7 следует, что размер k-ого блока в $\mathfrak{r}$ меньше r. Тогда

$$\widetilde{j} \leqslant R_k = R_{k-1} + r_k < R_{k-1} + r.$$

Из (5) следует, что корень $(R_{l-1}+1, \widetilde{j})$ также содержится в Ψ.

Таким образом, мы показали, что для любого $\widetilde{j} < j$ существует число $\widetilde{i} = R_{l-1}+1$ такое, что корень $(\widetilde{i}, \widetilde{j}) \in \Psi$. □

Обозначение 3.5. Обозначим через $\mathcal{X}$ множество матриц x из $\mathfrak{m}$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Главные миноры – треугольные

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

и числа, стоящие на побочной диагонали, отличны от нуля. На приведённой диаграмме звёздочками (здесь и далее) мы обозначаем любые числа из основного поля K.

2. Если $(i,j) \in \Psi$, причём число j – наибольшее для данного i, тогда $w_{i,\widetilde{j}}(x) = 0$ для любого $\widetilde{j} > j$.

3. Пусть главный минор стоит на пересечении $i, i+1, \dots, i+\widetilde{r}-1$ строк и $j_1 < j_2 < \ldots < j_{\widetilde{r}}$ столбцов. Пусть

$$(\widetilde{i}, \widetilde{j}) \notin \Psi, \quad \text{где} \quad i \leqslant \widetilde{i} < i+\widetilde{r} \quad \text{и} \quad j_{a-1} < \widetilde{j} < j_a$$

для некоторого $a \in \{2, \ldots \widetilde{r}\}$. Тогда, если корень (i, j_a) стоит в главном миноре ниже побочной диагонали (в этом случае верно $w_{\widetilde{i}, j_a}(x) = 0$), то $w_{\widetilde{i},\widetilde{j}}(x) = 0$.

Приведём пример множества матриц $\mathcal{X} \subset \mathfrak{m}$, в котором диаграмма для $\mathfrak{m}$ – это диаграмма 1.

$$\begin{pmatrix}
0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\
 & & 0 & & & & & & & & 0 & 0 & * & * \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & * & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Обозначение 3.6. Обозначим через T множество корней $(i,j) \in \Delta^+$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Существует номер $\widetilde{i} > i$, такой, что $(\widetilde{i}, j) \in \Psi$.
2. В i-ой строке нет корней из Ψ.

Обозначим $\mathcal{T} = \operatorname{Span}\{E_\xi,\ \xi \in T\}$. Ниже изображена диаграмма примера 1, корни из T на ней обозначены символом $\bullet$.

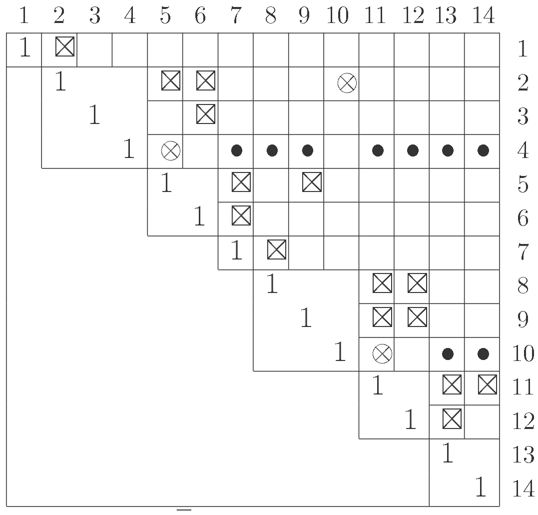


Диаграмма 4.

4. Канонические матрицы на N-орбитах общего положения

Сначала мы сформулируем два предложения, которые будут нужны для доказательства теоремы 1.7.

Замечание 4.1. Присоединённое действие

$$\operatorname{Ad}_{g(t)} x = g(t) \cdot x \cdot g(t)^{-1}$$

на произвольную матрицу x однопараметрической подгруппы

$$g(t) = E + t \cdot E_\psi \subset N,\ \psi = (u,v) \in \Delta^+$$

сводится к композиции двух преобразований:

1) к строке с номером u матрицы x прибавляется строка с номером v, умноженная на t;
2) к столбцу с номером v матрицы x прибавляется столбец с номером u, умноженный на $-t$.

Предложение 4.2. *Для любого $x \in \mathcal{X}$ и для любой матрицы $y \in \mathcal{T}$ найдётся $g \in N$, такой, что $\mathrm{Ad}_g(x+y) = x$.*

Доказательство. Достаточно доказать следующее утверждение. Пусть j – номер столбца, такой, что все элементы матрицы y, лежащие в столбцах с номерами, большими j, нулевые. Обозначим через $\{i_1, \dots, i_p\}$ номера тех строк, для которых элементы матрицы y, лежащие в j-ом столбце, не равны нулю. Утверждается, что существует $g \in N$, такой, что

$$\mathrm{Ad}_g(x+y) = x + \widetilde{y},$$

где $\widetilde{y} \in \mathcal{T}$ и все элементы $\widetilde{y}$, лежащие в столбцах с номерами, не меньшими j, нулевые.

Пусть $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$. Так как $(i,j) \in T$, то существует корень $(\widetilde{i}, j) \in \Psi$, $\widetilde{i} > i$. Тогда существует главный минор M_I^J, где I – набор строк и J – набор столбцов минора, такой, что $\widetilde{i} \in I$ и $j \in J$. Пусть главный минор M_I^J стоит правее $(c+1)$-ого блока в $\mathfrak{r}$, обозначим $k = R_c + 1$, как и ранее, $\widetilde{r} = \widetilde{r}_{c+1} = \min(r, r_{c+1})$. Пусть

$$I = \{k, k+1, \dots, k+\widetilde{r}-1\} \quad \text{и} \quad J = \{j_1, j_2, \dots, j_{\widetilde{r}}\}$$

для некоторых $j_1 < j_2 < \dots < j_{\widetilde{r}}$. Обозначим через l номер, для которого $j = j_l$. Заметим, что корень $(k+\widetilde{r}-l, j_l)$ стоит на побочной диагонали главного минора и, следовательно, значение $w_{k+\widetilde{r}-l,j}(x)$ не равно нулю.

Пусть $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$, тогда $w_{i,j}(y) \neq 0$. Рассмотрим присоединённое действие на $x+y$ элемента

$$g = \prod_{i=i_1,\dots,i_a} g_i(t_i),$$

где $g_i(t_i) = E + t_i \cdot E_{i,k+\widetilde{r}-l}$ и $t_i = -\frac{w_{i,j}(y)}{w_{k+\widetilde{r}-l,j}(x)}$.

Тогда столбцы в матрицах $\mathrm{Ad}_g(x+y)$ и x, номера которых не меньше j, одинаковые. Следовательно, все элементы матрицы

$$\widetilde{y} = \mathrm{Ad}_g(x+y) - x,$$

лежащие в столбцах с номерами не меньше j, нулевые. Отсюда получаем $\mathrm{Ad}_g(x+y) = x + \widetilde{y}$.

Для завершения доказательства осталось доказать, что $\widetilde{y} \in \mathcal{T}$. Покажем, что если $w_{a,b}(\widetilde{y}) \neq 0$, то $(a,b) \in T$.

Итак, пусть $w_{a,b}(\widetilde{y}) \neq 0$ и $w_{a,b}(\widetilde{y}) \neq w_{a,b}(y)$ для некоторого корня (a,b). Из замечания 4.1 вытекает, что либо $a = i$, либо $b = k + \widetilde{r} - l$.

1. Пусть $w_{i,b}(\widetilde{y}) \neq 0$ и $w_{i,b}(\widetilde{y}) \neq w_{i,b}(y)$, где $b \in \{j_1, j_1+1, \dots, j\}$. Покажем, что $(i,b) \in T$.

Из леммы 3.4 следует, что для каждого номера $b < j$, существует корень $(i_b, b) \in \Psi$ с некоторым номером $i_b > i$. Отсюда и из того, что в i-ой строке нет корней из Ψ, получаем, что корень (i,b) лежит в T.

2. Пусть $w_{a,k+\widetilde{r}-l}(\widetilde{y}) \neq 0$ и $w_{a,k+\widetilde{r}-l}(\widetilde{y}) \neq w_{a,k+\widetilde{r}-l}(y)$ для некоторого a. Покажем, что $(a, k+\widetilde{r}-l) \in T$.

(a) Докажем, что в строке с номером a нет корней из Ψ. Для этого сначала докажем, что в i-ом столбце нет корней из Ψ. Предположим противное, тогда в i-ой строке также стояли бы корни из Ψ, что противоречит определению системы корней T. Следовательно, в столбце с номером i нет корней из Ψ. Далее, так как $w_{a,k+\widetilde{r}-l}(y) \neq w_{a,k+\widetilde{r}-l}(\widetilde{y})$, то элемент $(a, k+\widetilde{r}-l)$ матрицы $x+y$ изменился после действия g, следовательно, $w_{a,i}(x+y) \neq 0$. Предположим теперь, что в a-ой строке есть какой-либо корень (a,v) из Ψ, и пусть v – наибольшее из возможных. Тогда, так как в матрицах из $\mathcal{X}$ и $\mathcal{T}$ правее главных миноров стоят нули, получаем, что $i \leqslant v$. Но из леммы 3.4 имеем, что в i-ом столбце тоже есть корень из Ψ. Противоречие. Следовательно, в a-ой строке корней из Ψ нет.

(b) Покажем теперь, что существует номер $\widetilde{a} > a$, такой, что корень $(\widetilde{a}, k+\widetilde{r}-l) \in \Psi$. Предположим, что в $(k+\widetilde{r}-l)$-ом столбце нет корней из Ψ. Тогда в $(k+\widetilde{r}-l)$-ом столбце нет корней из S. В противном случае из леммы 3.2 и из того, что в строке с номером $(k+\widetilde{r}-l)$ лежат корни из системы Ψ, следует, что найдётся корень $(\widetilde{a}, k+\widetilde{r}-l) \in \Psi$ для некоторого $\widetilde{a}$. Но в $(k+\widetilde{r}-l)$-ом столбце нет корней из S если только для каждого $\widetilde{c} \leqslant c$ размер $\widetilde{c}$-ого блока в $\mathfrak{r}$ меньше размера последнего блока. В частности, размер блока, правее которого стоит корень $(a, k+\widetilde{r}-l)$, меньше r. Тогда строка с номером a – строка некоторого главного минора, а так как $w_{a,i}(x+y) \neq 0$, то в a-ой строке есть корень из Ψ, что противоречит пункту (a). Значит в $(k+\widetilde{r}-l)$-ом столбце есть корень $(\widetilde{a}, k+\widetilde{r}-l)$ из Ψ.

Предположим теперь, что $\widetilde{a} < a$. Корень $(\widetilde{a}, k+\widetilde{r}-l)$ лежит в Ψ, и $i < k+\widetilde{r}-l$. Так как $(a,i) \notin \Delta^+_{\mathfrak{r}}$, то $(\widetilde{a}, i) \notin \Delta^+_{\mathfrak{r}}$. Тогда мы попадаем в условия леммы 3.4, откуда имеем, что в i-ом столбце есть корень из Ψ, но это противоречит пункту (a). Следовательно, $\widetilde{a} > a$.

Из пунктов (a) и (b) вытекает, что корень $(a, k+\widetilde{r}-l) \in T$.

Таким образом, все корни вида (a,b), где $w_{a,b}(\widetilde{y}) \neq 0$, лежат в системе корней T. □

Предложение 4.3. *Предположим, что параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$ такова, что в последнем столбце есть корень из S. Тогда существует непустое открытое по Зарискому подмножество U в $\mathcal{Y}$, такое, что N-орбита любой матрицы из U имеет с $\mathcal{X}$ ненулевое пересечение.*

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку

$$\mathcal{Y} + \sum K \cdot E_\eta, \tag{7}$$

где суммирование ведётся по всем корням $\eta = (i,j) \in M \setminus \Psi$, для которых $i \in I$ и $j \in J$, где M_I^J – некоторый главный минор (то есть корень η лежит внутри главного минора).

Покажем сначала, что существует непустое открытое по Зарискому подмножество V в $\mathcal{Y}$, такое, что для любого $x \in V$ найдётся такое $h \in N$, что $\mathrm{Ad}_h\, x$ лежит в (7) и любой главный минор в $\mathrm{Ad}_h\, x$ отличен от нуля.

Пусть $x \in \mathcal{Y}$, как и выше, обозначим $R_{k-1} = \sum\limits_{t=1}^{k-1} r_t$ и $\widetilde{r} = \widetilde{r}_k = \min(r, r_k)$. Пусть главный минор M_I^J, стоящий правее k-ого блока в $\mathfrak{r}$, стоит на пересечении $I = \{R_{k-1}+1, R_{k-1}+2, \ldots, R_{k-1}+\widetilde{r}\}$ строк и $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_{\widetilde{r}}\}$ столбцов.

Из леммы 3.2 следует, что в каждом столбце главного минора есть корень из Ψ. Но не в любой строке главного минора есть корень из Ψ. Примером могут служить корни $(4,7)$ и $(4,8)$ на диаграмме 5. Эти корни не лежат в системе Ψ, и четвёртая строка принадлежит системе строк главного минора.

Пример 3. Диаграмма для параболической подалгебры со следующими размерами диагональных блоков: $(1,1,4,2)$.

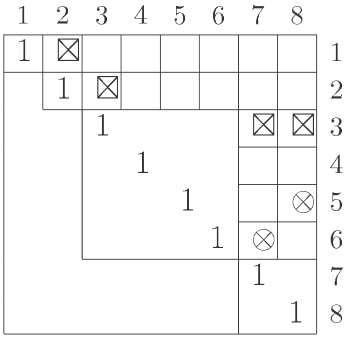


Диаграмма 5.

Пусть $i \in I$, $j \in J$ и корень $(i,j) \notin \Psi$. Тогда $(i,j) \notin S \cup \Phi$. Так как j – номер столбца главного минора, то в j-ом столбце есть корень из Ψ. Следовательно, существует корень $(\widetilde{i}, j) \in S$, предположим, что $\widetilde{i} > i$. Присоединённое действие на x элементом

$$\widetilde{h} = E + t \cdot E_{i,\widetilde{i}}, \quad t \neq 0, \tag{8}$$

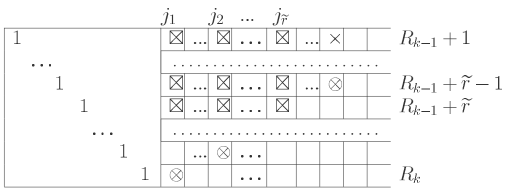
позволит сделать в клетке (i,j) матрицы x произвольное ненулевое число ($w_{\widetilde{i},j}(x) \neq 0$ из определения $\mathcal{Y}$). Покажем, что присоединённое действие (8) не изменит элементы матрицы x, кроме стоящего на (i,j) месте. С одной стороны, стоящее в $(\widetilde{i}, j)$ клетке матрицы x число – единственное ненулевое в $\widetilde{i}$-ой строке. Действительно, если $w_{\widetilde{i},\widetilde{j}}(x) \neq 0$ для некоторого $\widetilde{j}$, то корень $(\widetilde{i}, \widetilde{j}) \in \Phi$ и $\widetilde{j} < j$. Но в этом случае должен существовать корень $(b, \widetilde{i}) \in S$. Тогда из следствия из леммы 2.3 получаем, что в i-ом столбце есть корень (a,i) из S. Следовательно, пара корней $\Big((a,i), (\widetilde{i}, j)\Big)$ является допустимой, отсюда $(i,j) \in \Phi$, что невозможно. С другой стороны, чтобы ещё что-то изменилось в x после присоединённого действия (8), снова необходимо, чтобы в i-ом столбце имелся какой-нибудь корень из базы S. Опять получаем противоречие с $(i,j) \notin \Phi$. Таким образом, мы показали, что присоединённое действие (8) не изменит матрицу x, кроме элемента (i,j).

Так как корни из S стоят не выше побочной диагонали в главном миноре, существует $h \in N$, такой, что $\mathrm{Ad}_h\, x$ лежит в (7) и $w_{i,j}\left(\mathrm{Ad}_h\, x\right) \neq 0$ для любого корня (i,j), стоящего не ниже побочной диагонали в главном миноре. Тогда множество тех $x \in \mathcal{Y}$, для которых все главные миноры в $\mathrm{Ad}_h\, x$ не равны нулю, – непустое открытое по Зарискому, обозначим его через V.

Перейдём к доказательству предложения. Обозначим $x' = \mathrm{Ad}_h\, x$, и пусть x' лежит в (7). Предположим $x \in V$. Тогда все главные миноры в x' отличны от нуля.

Рассмотрим первые r_1 строк в x'. Для них, очевидно, выполнены условия 1–3, предъявляемые к матрицам из $\mathcal{X}$, поскольку в них нет корней из Φ и в любой строке/любом столбце стоит не более одного корня из S.

Предположим теперь, что для любой строки, номер которой не больше R_{k-1}, матрица x' удовлетворяет требованиям 1–3 в определении множества $\mathcal{X}$. Для доказательства предложения достаточно показать, что существует непустое открытое по Зарискому подмножество $U \subset \mathcal{Y}$, такое, что для любого $x \in U$ найдётся $g \in N$, такой, что матрица $\mathrm{Ad}_g\, x' = \mathrm{Ad}_{gh}\, x$ удовлетворяет требованиям 1–3 в определении множества $\mathcal{X}$ для строк, номера которых не превосходят R_k. Изобразим часть диаграммы, соответствующую строкам $R_{k-1}+1, R_{k-1}+2, \dots, R_k$. Из леммы 3.2 следует, что она имеет следующий вид.



Пусть правее блока с номером k в $\mathfrak{r}$ на пересечении строк $I = \{R_{k-1}+1, R_{k-1}+2, \dots, R_{k-1}+\widetilde r\}$ и столбцов $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{\widetilde r}\}$, где $j_1 < j_2 < \dots < j_{\widetilde r}$, стоит главный минор M_I^J. Обозначим через U' непустое открытое по Зарискому подмножество тех $x \in \mathcal{Y}$, для которых главный минор M_I^J в x' отличен от нуля. Покажем, что для любого $x \in U = U' \cap V$ найдётся $g \in N$, такой, что матрица $\mathrm{Ad}_g\, x'$ удовлетворяет требованиям 1–3 в определении множества $\mathcal{X}$ для строк, номера которых не превосходят R_k.

Итак, пусть $x \in U$, следовательно, главный минор M_I^J отличен от нуля. Тогда мы можем привести его к треугольному виду с помощью присоединённого действия элементов из N вида

$$\widetilde g_a = E + t_1^a \cdot E_{j_1, j_a} + \dots + t_{a-1}^a \cdot E_{j_{a-1}, j_a}, \quad a = 2, \dots, \widetilde r, \tag{9}$$

выбрав подходящие значения t_i^a, $i = 1, \dots , a - 1$. Таким образом мы добиваемся выполнения условия 1 в определении $\mathcal{X}$ для строк, номера которых не превосходят R_k.

Далее, пусть $(i, j) \in M \setminus \Psi$, где $i \in I$ и $j > j_{\widetilde{r}}$, кроме того, $w_{i,j}(x') \neq 0$. Аналогично, действуем на x' сопряжением с соответствующими $t_1, \dots , t_{\widetilde{r}}$ элементом

$$\widehat{g}_j = E + t_1 \cdot E_{j_1,j} + \dots + t_{\widetilde{r}} \cdot E_{j_{\widetilde{r}},j}. \tag{10}$$

Добиваемся, чтобы клетка (i, j) матрицы $\mathrm{Ad}_{\widehat{g}_j} x'$ была нулевой и остальные клетки матрицы в $R_{k-1} + 1, R_{k-1} + 2, \dots , R_k$ строках сопряжение $\widehat{g}_j$ не меняло. Последнее означает выполнение условия 2 в определении множества $\mathcal{X}$ для строк, номера которых не превосходят R_k.

Предположим теперь, что стоящий правее k-ого блока главный минор, есть минор треугольный. Пусть $w_{i,j}(x') \neq 0$ для какого-либо корня (i, j), где $i \in I$, $j_{a-1} < j < j_a$ для некоторых $j_{a-1}, j_a \in J$, и корень (i, j_a) лежит ниже побочной диагонали в главном миноре. Достаточно рассмотреть сопряжение элементом (9), положив число j вместо j_a. Таким образом мы добиваемся выполнения условия 3 в определении $\mathcal{X}$ для строк, номера которых не превосходят R_k. $\square$

Введём на множестве корней $S \cup \Phi$ отношение порядка, для которого

1) $\xi < \varphi$ для любых $\xi \in S$ и $\varphi \in \Phi$;
2) для остальных пар корней из $S \cup \Phi$ отношение $<$ означает следующее: $(a, b) < (c, d)$, если $c < a$ или $c = a$, $b < d$.

Пусть теперь $\mathcal{S}$ – множество знаменателей, порождённое минорами M_ξ, $\xi \in S$. Образуем локализацию $K[\mathfrak{m}]_{\mathcal{S}}$ алгебры $K[\mathfrak{m}]$ по $\mathcal{S}$.

Рассмотрим открытое по Зарискому подмножество в $\mathfrak{m}$:

$$U_0 = \{x \in \mathfrak{m} : M_\xi(x) \neq 0 \quad \text{для любого} \quad \xi \in S\}.$$

Тогда локализация $K[\mathfrak{m}]_{\mathcal{S}} = K[U_0]$. Определим регулярное отображение

$$\pi : U_0 \to \mathcal{Y} \tag{11}$$

по правилу

$$x \in U_0 \mapsto \sum_{\xi \in S} \frac{M_\xi(x)}{M_{\xi_1}(x)} \cdot E_\xi + \sum_{q \in Q} \frac{L_q(x)}{M_\xi(x) M_{\xi'_1}(x)} \cdot E_\varphi \in \mathcal{Y},$$

где

1) корень ξ_1 в первой сумме – наибольший из базы S, меньший ξ в смысле введённого ранее порядка;
2) допустимая пара $q = (\xi, \xi')$ из второй суммы соответствует корню $\varphi \in \Phi$, корень ξ'_1 – наибольший из S, меньший ξ' в смысле введённого порядка.

Тогда $M_\xi(x) = M_\xi\big(\pi(x)\big)$, $L_q(x) = L_q\big(\pi(x)\big)$ для любых $\xi \in S$, $q \in Q$. Так как M_ξ и L_q – инварианты, то $\pi\big(\mathrm{Ad}_g\, x\big) = \pi(x)$ для любого $g \in N$.

Теперь мы готовы доказать теорему 1.7.

Доказательство теоремы 1.7 проведём индукцией по n.

Для $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение теоремы верно для матриц размера меньше n, и докажем его для матриц размера n.

Пусть редуктивная часть $\mathfrak{r}$ параболической подалгебры $\mathfrak{p}$ состоит из блоков с размерами $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$, где $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$. Как и выше, $r = r_s$. Введём следующие обозначения

$$\mathfrak{z}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & 0 & & \ldots \\ & & & * \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} r \end{array} \right\}, \qquad \mathcal{Z}_0 = \exp \mathfrak{z}_0.$$

Поскольку $\mathfrak{z}_0$ является идеалом в подалгебре $\mathfrak{n}$, то $\mathrm{Ad}_N\, \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_0$. Отождествим $\mathfrak{gl}(n-1, K)$ и $\mathrm{GL}(n-1, K)$ соответственно

$$\text{с подалгеброй} \quad \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} * & \ldots & * & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & \ldots & * & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} \quad \text{в} \quad \mathfrak{gl}(n, K)$$

$$\text{и с подгруппой} \quad \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} * & \ldots & * & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & \ldots & * & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right) \right\} \quad \text{в} \quad \mathrm{GL}(n, K).$$

Пусть N_1 – подгруппа верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали в $\mathrm{GL}(n-1, K)$, $\mathfrak{n}_1 = \mathrm{Lie}\, N_1$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}_1$, $\mathcal{Y}_1$ – естественная проекция $\mathcal{Y}$ на $\mathfrak{m}_1$.

Любой элемент $x \in \mathfrak{m}$ однозначно представим в виде $x = x_1 + z_1$, где $x_1 \in \mathfrak{m}_1$, $z_1 \in \mathfrak{z}_0$. По предположению индукции, существует непустое открытое по Зарискому подмножество $U_1 \subset \mathfrak{m}_1$, такое, что для любого $x_1 \in U_1$ существует $g' \in N_1$, такой, что $\mathrm{Ad}_{g'} x_1 \in \mathcal{Y}_1$. Так как $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{z}_0$, то $U_1 + \mathfrak{z}_0$ – открытое подмножество в $\mathfrak{m}$.

Из предложения 4.3 следует существование открытого по Зарискому подмножества V в $\mathcal{Y}$, такого, что для любого $y \in V$ существует такой элемент $g_1 \in N$, что $\widetilde{y} = \mathrm{Ad}_{g_1} y \in \mathcal{X}$. Прообраз $\pi^{-1}(V)$ множества V при отображении (11) – открытое по Зарискому подмножество в $\mathfrak{m}$.

Обозначим

$$U = \begin{cases} U_1 + \mathfrak{z}_0, & \text{если в } n\text{-ом столбце нет корней из } S; \\ (U_1 + \mathfrak{z}_0) \cap \pi^{-1}(V), & \text{если в } n\text{-ом столбце есть корень из } S. \end{cases}$$

Из выше сказанного, U – открытое по Зарискому подмножество в $\mathfrak{m}$.

I часть. Покажем, что для любого $x \in U$ существует $g \in N$, такой, что $\mathrm{Ad}_g x \in \mathcal{Y}$.

Итак, пусть $x \in U$. Обозначим $x' = \mathrm{Ad}_{g'} x$, $y_0 = \mathrm{Ad}_{g'} x_1$, $z_0 = \mathrm{Ad}_{g'} z_1$. Получаем

$$x' = \mathrm{Ad}_{g'} x = \mathrm{Ad}_{g'} x_1 + \mathrm{Ad}_{g'} z_1 = y_0 + z_0,$$

где $y_0 \in \mathcal{Y}_1$, $z_0 \in \mathfrak{z}_0$.

1. Рассмотрим случай, когда в n-ом столбце нет корней из базы S. В этом случае $U = U_1 + \mathfrak{z}_0$. Покажем, что найдётся такой $g \in N$, что $\mathrm{Ad}_g x = y_0$. Из леммы 2.1 вытекает, что для любого номера i, где $1 \leqslant i \leqslant n - r$, существует корень $\xi \in S$, лежащий в i-ой строке (то есть $\xi = (i, a_i)$ для некоторого номера a_i). Так как $y_0 \in \mathcal{Y}_1$, то $w_{i,a_i}(x') = w_{i,a_i}(y_0) \neq 0$. Обозначим

$$\begin{gathered} g_{n-r} = E + t_{n-r} \cdot E_{a_{n-r},n} \in \mathcal{Z}_0, \text{ где } \ t_{n-r} = \frac{w_{n-r,n}(z_0)}{w_{n-r,a_{n-r}}(y_0)}; \\ g_i = E + t_i \cdot E_{a_i,n} \in \mathcal{Z}_0, \qquad \text{где } \ t_i = \frac{w_{i,n}\left(\mathrm{Ad}_{g_{i+1}\ldots g_{n-r}} z_0\right)}{w_{i,a_i}(y_0)}. \end{gathered} \tag{12}$$

Тогда

$$w_{a,n}\left(\mathrm{Ad}_{g_i g_{i+1}\ldots g_{n-r}} x'\right) = 0$$

для любого $a \geqslant i$. Обозначим

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_{n-r} \cdot g'.$$

Получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_g\, x = \mathrm{Ad}_{g_1 g_2 \cdots g_{n-r}} \mathrm{Ad}_{g'}\, x = \mathrm{Ad}_{g_1 g_2 \cdots g_{n-r}}\, x' \\ = \mathrm{Ad}_{g_1 g_2 \cdots g_{n-r}}\, (y_0 + z_0) = y_0 \in \mathcal{Y}.\end{aligned}$$

Что доказывает утверждение в случае 1.

2. Рассмотрим теперь случай, когда в n-ом столбце лежит корень из S. Здесь $U = (U_1 + \mathfrak{z}_0) \cap \pi^{-1}(V)$. Обозначим через $(\widetilde{m}, n)$ корень из S, лежащий в n-ом столбце. Пусть $(m, n) \in S \cup \Phi$ – корень, для которого число m наименьшее.

Из леммы 2.1 вытекает, что для каждого $(i, n) \in M$, где $i > \widetilde{m}$, в i-ой строке существует корень из S. Аналогично первому пункту найдётся элемент $h \in \mathcal{Z}_0$, такой, что $\mathrm{Ad}_h\, x'$ имеет нули в последнем столбце ниже корня $(\widetilde{m}, n)$ (то есть $w_{a,n}\, (\mathrm{Ad}_h\, x') = 0$ для любого $a > \widetilde{m}$).

Пусть теперь корень $(i, n) \notin S \cup \Phi$ и $m < i < \widetilde{m}$. Аналогично первой части в доказательстве предложения 4.3, действуя сопряжением на x' элементом (8) при $\widetilde{i} = \widetilde{m}$, можно добиться

$$w_{i,n}(\mathrm{Ad}_h\, x') = 0 \quad \text{и} \quad w_{a,b}(\mathrm{Ad}_h\, x') = w_{a,b}(x')$$

для любого корня $(a, b) \neq (i, n)$.

Ввиду всего сказанного будем дальше предполагать, что для x' справедливо $w_{i,n}(x') = 0$ для любого корня $(i, n) \notin S \cup \Phi$, такого, что $i > m$.

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}_0$, состоящее из тех $z \in \mathfrak{z}_0$, для которых $w_{i,n}(z) = 0$, если $i \geqslant m$. Обозначим через z естественную проекцию z_0 на $\mathfrak{z}$. Тогда матрица $y = x' - z$ лежит в $\mathcal{Y}$. Следовательно, $x' = y + z$, $y \in \mathcal{Y}$, $z \in \mathfrak{z}$. Из определения инвариантов следует, что $y = \pi(x')$. Так как $x' \in \pi^{-1}(V)$, то $y \in V$.

Из предложения 4.3 следует, что существует элемент $g_1 \in N$, такой, что $\widetilde{y} = \mathrm{Ad}_{g_1}\, y \in \mathcal{X}$. Тогда $\mathrm{Ad}_{g_1}\, x' = \widetilde{y} + \mathrm{Ad}_{g_1}\, z$. Так как $\mathfrak{z}$ – идеал $\mathfrak{n}$, то $\mathrm{Ad}_{g_1}\, z \in \mathfrak{z}$.

Покажем, что существует $g_2 \in \mathcal{Z}_0$, такой, что

$$\mathrm{Ad}_{g_2 g_1}\, x' = \widetilde{y} + \widetilde{z},$$

где $\widetilde{y} \in \mathcal{X}$ и $\widetilde{z} \in \mathcal{T} \cap \mathfrak{z}$. Пусть $\zeta = (i,n) \notin T$, $i < m$. В n-ом столбце есть корень из S, а, следовательно, и из Ψ. Тогда по определению T существует главный минор M_I^J, где I – номера строк, а J – столбцов минора такие, что $i \in I$. Пусть $\widetilde{r}$ – его порядок и $J = \{j_1, \ldots, j_{\widetilde{r}}\}$, $j_1 < \ldots < j_{\widetilde{r}}$. Так как $\widetilde{y} \in \mathcal{X}$, то главный минор M_I^J отличен от нуля. Подбираем числа $t_1, \ldots, t_{\widetilde{r}}$ таким образом, что для элемента

$$g_\zeta = E + t_1 \cdot E_{j_1,n} + \ldots + t_{\widetilde{r}} \cdot E_{j_{\widetilde{r}},n}$$

выполняются следующие условия:

(a) $\mathrm{Ad}_{g_\zeta}(\widetilde{y} + \mathrm{Ad}_{g_1} z) = \widetilde{y} + z'$, где $z' \in \mathfrak{z}$;

(b) $w_{i,n}\left(\mathrm{Ad}_{g_\zeta g_1} z\right) = 0$;

(c) если $i \neq j$, то присоединённое действие g_ζ не меняет клетку (j,n) матрицы $\widetilde{y} + \mathrm{Ad}_{g_1} z$.

Тогда для $g_2 = \prod\limits_{\zeta=(i,n)\notin T} g_\zeta \in \mathcal{Z}_0$ выполняется

$$\mathrm{Ad}_{g_2 g_1} x' = \widetilde{y} + \widetilde{z}, \quad \text{где} \quad \widetilde{y} \in \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \widetilde{z} \in \mathcal{T} \cap \mathfrak{z}.$$

Далее, из предложения 4.2 следует существование $g_3 \in N$ такого, что

$$\mathrm{Ad}_{g_3}(\widetilde{y} + \widetilde{z}) = \widetilde{y}.$$

Получаем

$$\mathrm{Ad}_{g_3 g_2 g_1} x' = \mathrm{Ad}_{g_3 g_2 g_1}(y + z) = \mathrm{Ad}_{g_3}(\widetilde{y} + \widetilde{z}) = \widetilde{y}.$$

Осталось применить обратное действие g_1^{-1}.

$$\mathrm{Ad}_{g_1^{-1} g_3 g_2 g_1 g'} x = \mathrm{Ad}_{g_1^{-1} g_3 g_2 g_1} x' = \mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} \widetilde{y} = \mathrm{Ad}_{g_1^{-1}}(\mathrm{Ad}_{g_1} y) = y \in \mathcal{Y}.$$

II часть. Единственность следует из того, что отображение (11) постоянно на N-орбите. □

Рассмотрим локализацию $K[\mathfrak{m}]_{\mathcal{S}}^N$ алгебры инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ по $\mathcal{S}$. Поскольку миноры M_ξ являются N-инвариантами, то

$$K[\mathfrak{m}]_{\mathcal{S}}^N = \left(K[\mathfrak{m}]_{\mathcal{S}}\right)^N.$$

Следующая теорема была доказана в работе [6], мы повторим её доказательство, чтобы сохранить понимание происходящего.

Теорема 4.4. *Кольцо* $K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}}$ *является кольцом многочленов от* $M_\xi^{\pm 1}$, $\xi \in S$, *и* L_q, $q \in Q$.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\varpi: \; f \mapsto f|_{\mathcal{Y}}$$

алгебры $K[\mathfrak{m}]^N$ на $K[\mathcal{Y}]$. Образ $\varpi(M_\xi)$ равен произведению

$$\pm x_\xi x_{\xi_1} \ldots x_{\xi_t},$$

где каждый ξ_{i+1} есть наибольший в смысле введённого выше порядка корень в S, меньший ξ_i. Продолжим ϖ до гомоморфизма

$$\varpi_S: \; K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}} \to K[\mathcal{Y}]_S,$$

где $K[\mathcal{Y}]_S$ – локализация $K[\mathcal{Y}]$ по x_ξ, $\xi \in S$. Покажем, что ϖ_S – изоморфизм.

Если $f \in \operatorname{Ker} \varpi_S$, то $f(\operatorname{Ad}_N \mathcal{Y}) = 0$. Так как, согласно теореме 1.7, $\operatorname{Ad}_N \mathcal{Y}$ содержит открытое по Зарискому подмножество, то $f = 0$. Следовательно, ϖ_S является вложением $K[\mathfrak{m}]^N_{\mathcal{S}}$ в $K[\mathcal{Y}]_S$. Далее, перепишем формулы в виде

$$\begin{aligned} \varpi\left(M_\xi\right) &= \pm x_\xi \varpi\left(M_{\xi_1}\right), \\ \varpi\left(L_q\right) &= \pm x_\varphi \varpi\left(M_\xi\right) \varpi\left(M_{\xi_1'}\right), \end{aligned}$$

где допустимая пара $q = (\xi, \xi')$ соответствует корню $\varphi \in \Phi$ и корень ξ_1 (соответственно ξ_1') – наибольший из базы, меньший ξ (соответственно ξ') в смысле введённого порядка. Получаем

$$\begin{aligned} \varpi_S\left(M_\xi M_{\xi_1}^{-1}\right) &= \pm x_\xi, \\ \varpi_S\left(L_q M_\xi^{-1} M_{\xi_1'}^{-1}\right) &= \pm x_\varphi. \end{aligned}$$

Из (13) вытекает, что образ ϖ_S совпадает с $K[\mathcal{Y}]_S$. Окончательно, ϖ_S – изоморфизм. □

Теорему 1.8 получаем как следствие из теоремы 4.3.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А. Н. Панову за помощь в подготовке этой статьи.

Литература

1. R. W. Richardson, *Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups.* — Bull. London Math. Soc. **6** (1974), 21–24.
2. M. Brion, *Représentations exceptionnelles des groupes semi-simplés.* — Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **18** (1985), 345–387.
3. М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли.* Мир, М., 1981.
4. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов.* — Итоги науки и техники. Совр. проб. математики, фунд. исследования **55**, ВИНИТИ, М. (1989), 137–309.
5. Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов.* Мир, М., 1987.
6. А. Н. Панов, В. В. Севостьянова, *Регулярные N-орбиты в нильрадикале параболической подалгебры.* — Труды международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В. Е. Воскресенского. Изд-во “Самарский университет”, Самара, 2007, 152–161.
7. В. В. Севостьянова, *Поле инвариантов присоединённого действия унитреугольной группы.* — Тезисы докладов летней школы-конференции “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”. Изд-во “Универс групп”, Самара (2009), 44–45.

Sevostynova V. V. The invariant field of the adjoint action of the unitriangular group in the nilradical of a parabolic subalgebra.

In the present paper the invariant field of the adjoint action of the unitriangular group in the nilradical of any parabolic subalgebra is described.

Самарский государственный университет
Самара, Россия
E-mail: berlua@mail.ru

Поступило 10 марта 2010 г.