Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП ТИПА C_n С МАЛЫМИ КРАТНОСТЯМИ ВЕСОВ

1. Введение

Получены нижние оценки максимальных кратностей весов в неприводимых представлениях алгебраических групп типа C_n над полями малых положительных характеристик. Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$ и $G = C_n(K)$. Рассматриваются только рациональные G-модули и представления. Далее M^μ – весовое подпространство веса μ в G-модуле M, $\operatorname{mult}\mu = \dim M^\mu$, $\Lambda(M)$ – множество весов модуля M. Обозначим символом $\operatorname{wdeg} M$ максимальную размерность весового подпространства в M, т.е.

$$\operatorname{wdeg} M = \max_{\mu\in\Lambda(M)} \operatorname{mult}\mu.$$

Для простых алгебраических групп простые модули M, для которых $\operatorname{wdeg} M = 1$, были классифицированы в [5, 12]. Этот результат использовался при описании максимальных подгрупп классических алгебраических групп в [12]. В [1] получены нижние оценки максимальных кратностей весов в неприводимых представлениях алгебраических групп типов B_n и D_n в нечетной характеристике и типа C_n в характеристике $p > 7$. В [6] вопрос был решен для групп типа D_n в характеристике 2. В этих ситуациях при $n \geq 8$ оказывается, что либо такая кратность не меньше $n - 4 - [n]_4$, где $[n]_4$ – вычет числа n по модулю 4, либо все кратности весов равны 1. В этой работе для групп $C_n(K)$ ограничения на p сняты. Таким образом, во всех случаях для модулярных представлений спинорных и симплектических групп имеются искомые оценки, поскольку $B_n(K) \cong C_n(K)$ (как абстрактные группы) при $p = 2$.

Ключевые слова: симплектическая группа, неприводимое представление, кратность веса.

Работа выполнена в рамках проекта Ф08-011 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ – фундаментальные веса группы G, занумерованные, как в [3, табл. IV]. Напомним, что доминантный вес $a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$ называется p-ограниченным, если все $a_i < p$. Неприводимое представление (или простой модуль) называется p-ограниченным, если таков его старший вес. Символ $\omega(M)$ обозначает старший вес простого G-модуля M, $L(\omega)$ – простой G-модуль со старшим весом ω. Далее Ω – множество доминантных весов ω группы G таких, что $\operatorname{wdeg} L(\omega) = 1$, а Ω_p – подмножество всех p-ограниченных весов в Ω. Согласно [5, предложение 2], при $p > 2$ и $n \geq 4$

$$\Omega_p = \left\{0, \omega_1, \frac{p-1}{2}\omega_n, \omega_{n-1} + \frac{p-3}{2}\omega_n\right\}, \tag{1}$$

$$\Omega = \left\{\sum_{j=0}^{s} p^j \lambda_j \mid \lambda_j \in \Omega_p\right\}.$$

Обозначим символом $\operatorname{Irr} G$ множество всех рациональных неприводимых представлений (или простых модулей) группы G (рассматриваемых с точностью до эквивалентности или изоморфизма), $\operatorname{Irr}_p G \subset \operatorname{Irr} G$ – подмножество p-ограниченных представлений.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 8$ и $p > 2$. Предположим, что $M \in \operatorname{Irr} G$ и $\omega(M) \notin \Omega$. Тогда $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4 - [n]_4$, где $[n]_4$ – вычет числа n по модулю 4. В частности, $\operatorname{wdeg} M \geq n - 7$.*

При $p = 2$ картина сложнее. Для любых n и l группа $C_n(K)$ имеет простые модули M с $\operatorname{wdeg} M = 2^l$. В этом случае согласно [5, предложение 2],

$$\Omega_2 = \{0, \omega_1, \omega_n\}.$$

Положим

$$\Omega_2' = \Omega_2 \cup \{\omega_1 + \omega_n\}.$$

Для любого доминантного веса ω группы G можно записать его 2-адическое разложение

$$\omega = \lambda_0 + 2\lambda_1 + \dots + 2^k\lambda_k,$$

для подходящих 2-ограниченных весов λ_i, $0 \leq i \leq k$. Это разложение однозначно определено, если предположить, что $k = 0$ для $\omega = 0$ и $\lambda_k \neq 0$ в противном случае. Положим

$$S(\omega) = (\lambda_0, \dots, \lambda_k).$$

Ввиду [5, предложение 2], $\omega \in \Omega$ тогда и только тогда, когда все $\lambda_i \in \Omega_2$ и для $i < k$ имеем $(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \neq (\omega_n, \omega_1)$. Таким образом, в этой ситуации связь между множествами Ω и Ω_p сложнее, чем для других классических групп или для нечетного p. Обозначим символом Ω' множество всех доминантных весов ω группы G, для которых все члены последовательности $S(\omega)$ принадлежат Ω'_2.

Теорема 2. *Пусть $p = 2$, $n \geq 8$, $M \in \operatorname{Irr} G$ и $\omega(M) \notin \Omega$. Тогда справедливо следующее:*

(i) *если $\omega \in \Omega'$, вес $\omega_1 + \omega_n$ встречается в последовательности $S(\omega)$ ровно l раз и при $0 \leq i < k$*

$$(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \notin \{(\omega_n, \omega_1), (\omega_1+\omega_n, \omega_1), (\omega_n, \omega_1+\omega_n), (\omega_1+\omega_n, \omega_1+\omega_n)\},$$

то $\operatorname{wdeg} M = 2^l$;

(ii) *в противном случае* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4 - [n]_4$, *где* $[n]_4$ *– вычет числа n по модулю 4; в частности,* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 7$.

Результаты [1] и [6] и теоремы 1 и 2 показывают, что для групп типов B_n и C_n в нечетной характеристике и типа D_n в произвольной характеристике простые модули M с $\operatorname{wdeg} M = 1$ составляют класс модулей с малыми кратностями весов, который в определенном смысле не может быть расширен; то же самое справедливо для групп типа C_n в характеристике 2 и их тензорно неразложимых простых модулей.

Следующая лемма показывает, что оценки в теоремах 1 и 2 асимптотически точны.

Лемма 1. *Пусть $l \geq 2$ и M – простой модуль для $C_l(K)$ со старшим весом ω_2. Тогда* $\operatorname{wdeg} M = l - 2$, *если p делит l, и $l - 1$ в противном случае.*

Мотивировка рассматриваемой задачи приведена в [1]. Заметим, что полученные результаты могут быть использованы для распознавания линейных групп, содержащих матрицы с малыми кратностями собственных значений.

2. Обозначения и предварительные сведения

Далее $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Для простой алгебраической группы Γ над K символы $W(\Gamma)$, $\Lambda(\Gamma)$ и $R(\Gamma)$ обозначают ее группу Вейля, множество весов и систему корней соответственно; $R^+(\Gamma) \subset R(\Gamma)$ – множество положительных корней относительно фиксированного максимального тора $T \subset \Gamma$ и фиксированного базиса системы $R(\Gamma)$; $\langle \lambda, \alpha \rangle$ – значение веса $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ на корне $\alpha \in R(\Gamma)$. Запись $\mu \sim \nu$ означает, что веса μ, $\nu \in \Lambda(\Gamma)$ находятся в одной орбите относительно действия группы $W(\Gamma)$. Для $\alpha \in R(\Gamma)$ символы X_α и $\mathcal{X}_\alpha$ обозначают корневой элемент алгебры Ли группы Γ и корневую подгруппу группы Γ, соответствующие корню α. Если k – неотрицательное целое число, то $X_{\alpha,k}$ – элемент гипералгебры группы Γ, соответствующий паре $(\alpha,\ k)$. При $k < p$ элемент $X_{\alpha,k} = (X_\alpha)^k/k!$. Подгруппа группы Γ, порожденная подгруппами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_i$, обозначается символом $\langle \Gamma_1, \dots, \Gamma_i \rangle$. При $\beta_1, \dots, \beta_j \in R^+(\Gamma)$ положим

$$\Gamma(\beta_1, \dots, \beta_j) = \langle \mathcal{X}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{X}_{\beta_j}, \mathcal{X}_{-\beta_1}, \dots, \mathcal{X}_{-\beta_j} \rangle.$$

Во всех случаях, когда рассматриваются подгруппы $H = \Gamma(\beta_1, ..., \beta_j)$, корни $\beta_1, ..., \beta_j$ выбираются таким образом, чтобы подгруппа H была полупроста и эти корни составляли базис системы $R(H)$. В этой ситуации фундаментальные веса подгруппы H определяются относительно этого базиса. Пересечение $T \cap H$ является максимальным тором подгруппы H. Если $\omega \in \Lambda(\Gamma)$, то $\omega|H$ – ограничение веса ω на $T \cap H$. Символ $\operatorname{Irr}\Gamma$ обозначает множество всех рациональных неприводимых представлений (или простых модулей) группы Γ (рассматриваемых с точностью до эквивалентности или изоморфизма), $\operatorname{Irr}_p \Gamma \subset \operatorname{Irr}\Gamma$ – множество p-ограниченных представлений.

Для Γ-модуля M и весового вектора $v \in M$ обозначим вес вектора v символом $\omega(v)$ и положим $\omega_H(v) = \omega(v)|H$; $\operatorname{Irr} M \subset \operatorname{Irr}\Gamma$ – множество композиционных факторов модуля M без учета кратностей. Если $\alpha \in R(\Gamma)$ и $t \in K$, то согласно [2, предложение 5.13], для корневого элемента $x_\alpha(t) \in \mathcal{X}_\alpha$

$$x_\alpha(t)v = \sum_{d=0}^{\infty} t^d X_{\alpha,d} v. \tag{2}$$

Далее $L(\omega)$ и $V(\omega)$ – простой модуль и модуль Вейля со старшим весом ω. Символ v^+ всегда обозначает ненулевой вектор старшего веса в соответствующем модуле.

Фиксируем базис $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ системы корней $R(G)$, фундаментальные веса рассматриваются относительно этого базиса. В дальнейшем

ε_j, $1 \leq j \leq n$, – веса естественной реализации группы G, нумерация корней α_i и весов ε_j стандартна и соответствует [3, гл. VI, §4] и [4, гл. VIII, §13]. Положим $X_{\pm i} = X_{\pm\alpha_i}$, аналогично определим $\mathcal{X}_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$. Пусть $G(i_1, \ldots, i_j) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_j})$ и $b_i(\mu) = \langle \mu, \alpha_i \rangle$ при $\mu \in \Lambda(G)$. Если $H = G(\beta_1, \ldots, \beta_j)$, $\alpha_i \in R(H)$ и $\mu' = \mu | H$, то определим $b_i(\mu')$ аналогичным образом.

Пусть $M^{[k]}$ обозначает Γ-модуль M, подкрученный k-ой степенью морфизма Фробениуса. Следующая лемма почти очевидна.

Лемма 2. *Пусть N_1 и N_2 – Γ-модули и $M = N_1 \otimes N_2$. Тогда*

$$\operatorname{wdeg} M \geq \operatorname{wdeg} N_1 \cdot \operatorname{wdeg} N_2.$$

Если в этой ситуации каждый вес в $\Lambda(M)$ однозначно представляется в виде $\nu_1 + \nu_2$ с $\nu_j \in \Lambda(N_j)$, $j = 1, 2$, то

$$\operatorname{wdeg} M = \operatorname{wdeg} N_1 \cdot \operatorname{wdeg} N_2.$$

Для $N_j = M_j^{[k_j]}$, $j = 1, 2$, имеем

$$\operatorname{wdeg} M \geq \operatorname{wdeg} M_1 \cdot \operatorname{wdeg} M_2.$$

Случай, когда $N_j = M_j^{[k_j]}$, был рассмотрен в [1, лемма 2.1].

Пусть $M \in \operatorname{Irr}\Gamma$. Предположим, что $\omega(M) = \sum\limits_{s=0}^{k} p^s \lambda_s$, где веса λ_s p-ограничены. Положим $M_s = L(\lambda_s)$. По теореме Стейнберга о тензорном произведении [14]

$$M \cong \bigotimes_{s=0}^{k} M_s^{[s]}. \tag{3}$$

Поэтому в силу леммы 2 $\operatorname{wdeg} M \geq \operatorname{wdeg} M_0 \cdot \ldots \cdot \operatorname{wdeg} M_k$.

Следующая лемма доказана в [2, лемма 5.14] и [12, 1.5]. Как обычно, мы полагаем $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$.

Лемма 3. (i) *Для операторов $X_{\alpha,d}$ справедливы следующие равенства:*

$$X_{-\alpha} X_{\alpha,d} = X_{\alpha,d} X_{-\alpha} - H_\alpha X_{\alpha,d-1} + (d-1) X_{\alpha,d-1},$$

$$X_{\alpha,d} X_\beta = X_\beta X_{\alpha,d} + \sum_{t=1}^{d} c_t X_{t\alpha+\beta} X_{\alpha,d-t}, \quad c_t \in \mathbb{Z}$$

$$(c_t = 0, \quad \text{если} \ \ t\alpha + \beta \notin R(G)).$$

В частности, $X_{i,k}X_{-j,d} = X_{-j,d}X_{i,k}$ *при* $i \neq j$.

(ii) *Пусть* V – G*-модуль,* $\mu \in \Lambda(G)$, $v \in V^\mu \setminus \{0\}$, $\alpha \in R(G)$, $X_{\alpha,b}v = 0$ *при* $b > 0$ *и* $\langle \mu, \alpha \rangle = c \geq 0$. *Тогда* $X_\alpha X_{-\alpha,b}v = (c - b + 1)X_{-\alpha,b-1}v$ *и* $X_{-\alpha,c}v \neq 0$. *В частности, если* $0 < c < p$, *то* $X_{-\alpha,d}v \neq 0$ *при* $0 < d \leq c$.

Предложение 1 ([10], [13])**.** *Пусть* $H = G(i_1, \ldots, i_j) \subset G$. *Тогда* $KHv^+ \subset L(\omega)$ *– простой* H*-модуль со старшим весом* $\omega_H(v^+)$ *и является прямым слагаемым* H*-модуля* $L(\omega)$.

Пусть $H = G(\beta_1, \ldots, \beta_j) \subset G$ и M – G-модуль. Положим $U^+(H) = \langle \mathcal{X}_\alpha \mid \alpha \in R^+(H) \rangle$. Напомним, что вектор $v \in M$ называется примитивным относительно H, если v – ненулевой вектор и $U^+(H)$ фиксирует v.

Лемма 4 ([15, лемма 2.46])**.** *Пусть* M *– неразложимый* G*-модуль со старшим весом* $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i$ *и* $v^+ \in M$ *– ненулевой вектор старшего веса. Пусть* $1 \leq i, j \leq n$. *Предположим, что* $0 < a_j < p$ *для некоторого* j. *Пусть* $b_k = -\langle \alpha_{k+1}, \alpha_k \rangle$ *и* $c_k = -\langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle$. *Для целого* d *с* $0 < d \leq a_j$ *определим вектор* $v(i, j, d)$ *следующим образом. Пусть* $d_j = d$. *Если* $i < j$, *положим* $d_k = a_k + d_{k+1}b_k$ *при* $i \leq k < j$. *Если* $i > j$, *положим* $d_k = a_k + d_{k-1}c_k$ *при* $i \geq k > j$. *Теперь запишем*

$$v(i, j, d) = X_{-i,d_i} \ldots X_{-k,d_k} \ldots X_{-j,d}v^+.$$

При $i = j$ *положим* $v(i, j, d) = X_{-i,d}v^+$. *Тогда* $v(i, j, d) \neq 0$ *и* $X_{l,b}v(i, j, d) = 0$ *для положительного* $l \neq i$ *и* $b > 0$. *Следовательно,* $\mathcal{X}_l$ *фиксирует* $v(i, j, d)$.

Лемма 5. *Пусть* M *и* $v(i, j, d)$ *такие, как в лемме* 4. *Положим* $k = i-1$, *если* $j > i$, *и* $k = i + 1$, *если* $j < i$. *При* $j = i$ *предположим, что* $k \in \{i - 1, i + 1\}$. *Пусть* $a_k < p$. *Тогда* $X_{-k}v(i, j, d) \neq 0$, *если* $a_k \neq 0$, *и* $X_{-k,2}v(i, j, d) \neq 0$, *если* $a_k > 1$.

Доказательство. Положим

$$v = \begin{cases} v(i + 1, j, d), & \text{если } \ j > i, \\ v(i - 1, j, d), & \text{если } \ j < i, \\ v^+, & \text{если } j = i, \end{cases}$$

$m_1 = X_{-k}v(i, j, d)$ и $m_2 = X_{-k,2}v(i, j, d)$. По лемме 4 $v \neq 0$. Тогда v порождает неразложимый $G(i)$-модуль N со старшим весом

$d_i\omega_1$. Согласно свойству универсальности модуля Вейля [11, часть II, лемма 2.13b), N – фактормодуль модуля $V(d_i\omega_1)$. Поскольку $v(i,j,d)$ – вектор младшего веса в модуле N, то из [7, лемма 5] следует, что $X_{i,d_i}v(i,j,d) = v$, если $i \neq j$. Используя лемму 3(ii), легко видеть, что $X_{i,d_i}v(i,i,d) = cv$ при $c \in K^*$. Теперь из леммы 3(i) следует, что $X_{i,d_i}m_1 = X_{-k}v$ и $X_{i,d_i}m_2 = X_{-k,2}v$. Остается применить часть (ii) леммы 3.

Приведенные ниже предложение 2 и лемма 6 были доказаны в [1] для всех p, включая $p = 2$.

Предложение 2 ([1, предложение 2.7]). *Пусть* $\Gamma = G(i_1, \dots, i_t)$, $M \in \operatorname{Irr} G$ *и* $N \in \operatorname{Irr}(M|\Gamma)$. *Тогда* $\operatorname{wdeg} N \leq \operatorname{wdeg} M$.

Лемма 6 ([1, лемма 2.8]). *Пусть* $\Gamma = A_n(K)$, $1 \leq j < k \leq n$ *и* $\omega = a_j\omega_j + \dots + a_k\omega_k$ – *p-ограниченный вес группы* Γ, *для которого* a_j *и* a_k *ненулевые. Тогда*

$$\operatorname{wdeg} L(\omega) \geq k - j.$$

Лемма 7 ([4, гл. VIII, §13.3]). *Пусть* $L_{\mathbb{C}}$ – *алгебра Ли типа* C_l *над* $\mathbb{C}$ *и* $l > 1$. *Обозначим символами* V *и* $\wedge^2(V)$ *стандартный* $L_{\mathbb{C}}$*-модуль и его внешний квадрат. Тогда* $\wedge^2(V)$ – *прямая сумма простого* $L_{\mathbb{C}}$*-модуля со старшим весом* ω_2 *и тривиального модуля.*

Доказательство леммы 1. Известно, что $\Lambda(M)$ содержит только два доминантных веса: ω_2 и 0. Следовательно, $\dim M^\lambda = 1$ при $\lambda \in \Lambda(M) \setminus \{0\}$. Используем обозначения леммы 7. Пусть $M_{\mathbb{C}}$ – простой $L_{\mathbb{C}}$-модуль со старшим весом ω_2. Легко заметить, что размерность подпространства нулевого веса в $\wedge^2(V)$ равна l. Поскольку кратности весов в модулях $V(\omega_2)$ и $M_{\mathbb{C}}$ совпадают, из леммы 7 следует, что $\dim V(\omega_2)^0 = l - 1$. Вычисляя явно коэффициенты в формуле для композиционных факторов фундаментальных модулей Вейля в [8, теорема 2.4], заключаем, что $V(\omega_2) \cong M$, если p не делит l, и что у модуля $V(\omega_2)$ два композиционных фактора: M и тривиальный, если $p|l$. Отсюда следует утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы 1

Общий подход к доказательству теоремы 1 такой же, как для достаточно больших p в [1]. Однако предположение, что $p > 7$, существенно использовалось при анализе многих конкретных представлений в [1], особенно представлений со старшими весами $a_{n-1}\omega_{n-1} +$

$a_n\omega_n$ при $a_{n-1}+a_n=\frac{p-1}{2}$. Поэтому сейчас в ряде случаев пришлось найти другие аргументы. Для удобства читателей мы цитируем общие результаты, доказанные в [1] для произвольного p, и приводим полное доказательство главного предложения (предложение 3).

Далее $n\geq 8$ и $M\in \operatorname{Irr} G$ – модуль со старшим весом $\omega=a_1\omega_1+\dots+a_n\omega_n$. Предположим, что $\omega\notin\Omega$. Пусть $\beta=2\alpha_4+\dots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n=2\varepsilon_4$. Будем рассматривать подгруппу $H\subset G$ следующего вида: $H=H_1\times H_2$, где $H_1=G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ и $H_2=G(5,\dots,n)$. Определим $\Omega(H_i)$ аналогично определению множества Ω. Множество $\Omega(H_i)$ задается формулами (1), если заменить n на ранг подгруппы H_i. Для веса $\mu\in\Lambda(H)$ будем писать $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, если $\mu_i=\mu|H_i$. Сведем задачу к случаю, когда $n=4k$ и $M\in\operatorname{Irr}_p G$. В этом параграфе предполагается, что p нечетно.

В доказательстве теоремы 1 существенно используются следующие леммы.

Лемма 8 ([1, лемма 3.3]). *Пусть* $n\equiv 0 \pmod 4$. *Если* $n>8$, *предположим, что теорема* 1 *справедлива для группы* $C_{n-4}(K)$. *Предположим, что* $M\in\operatorname{Irr} G$ *и ограничение* $M|H$ *имеет композиционный фактор* $N_1\otimes N_2$, *для которого* $N_i\in\operatorname{Irr} H_i$ *и* $\omega(N_i)\notin\Omega(H_i)$. *Тогда* $\operatorname{wdeg} M\geq n-4$.

Лемма 9 ([1, лемма 3.5]). *Предположим, что для всех целых чисел* l *с* $8\leq l=4k\leq n$ *теорема* 1 *справедлива для групп* $G_l=C_l(K)$ *и модулей из* $\operatorname{Irr}_p G_l$. *Тогда она справедлива для* G *и* M.

Подчеркнем, что леммы 8 и 9 были доказаны в [1] без ограничений на p.

Чтобы доказать теорему, нам понадобятся еще несколько технических лемм.

Лемма 10. *При* $\omega=\omega_{n-2}$ *ограничение* $M|H$ *содержит композиционный фактор со старшим весом* (ω_2,ω_{n-6}).

Доказательство. Положим $\mu=\omega-\alpha_3-2\alpha_4-\dots-2\alpha_{n-1}-\alpha_n$. Найдем вектор в подпространстве M^μ, примитивный относительно H. Для этого определим $\operatorname{mult}\mu$. Пусть $\lambda=\omega-\alpha_{n-3}-2\alpha_{n-2}-2\alpha_{n-1}-\alpha_n$. Легко видеть, что $\mu\sim\lambda$. Следовательно, $\operatorname{mult}\mu=\operatorname{mult}\lambda$. Положим $P=G(n-3,n-2,n-1,n)$. Тогда $P\cong C_4(K)$ и $M^\lambda\subset N=KPv^+$. Ограничение $\omega|P=\omega_2$ и $\lambda|P=0$. Ввиду предложения 1, $N\cong L(\omega_2)$, как P-модуль. Используя рассуждения из доказательства леммы 1, убедимся, что $\operatorname{mult}\mu=3$.

Заметим, что

$$\mu+\alpha_3 \sim \omega-2\alpha_{n-2}-2\alpha_{n-1}-\alpha_n \sim \omega-\alpha_{n-2}-2\alpha_{n-1}-\alpha_n$$
$$\sim \omega-\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}-\alpha_n \sim \omega-\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1} \sim \omega$$

и

$$\mu+\alpha_{n-1} \sim \omega-\alpha_3-2\alpha_4-\cdots-2\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}$$
$$\sim \omega-\alpha_{n-3}-2\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1} \sim \omega-\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1} \sim \omega.$$

Поэтому $\operatorname{mult}(\mu+\alpha_3)=\operatorname{mult}(\mu+\alpha_{n-1})=1$.

Элементы X_3 и X_{n-1} задают линейные отображения $f_3: M^\mu \to M^{\mu+\alpha_3}$ и $f_{n-1}: M^\mu \to M^{\mu+\alpha_{n-1}}$. Поскольку $\operatorname{mult}\mu=3$, получаем, что $\dim\ker f_3$ и $\dim\ker f_{n-1} \geq 2$ и $\ker f_3 \cap \ker f_{n-1} \neq 0$. Фиксируем ненулевой вектор $t \in \ker f_3 \cap \ker f_{n-1}$. Из формулы (2) следует, что $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ фиксируют t, поскольку $\mu+k\alpha_i \notin \Lambda(M)$ при $i=1$ или 2 и $k>0$. Аналогично $\mathcal{X}_\beta$ фиксирует t. По построению $X_3t=X_{n-1}t=0$. При $4<i<n-1$ вес $\mu+\alpha_i \sim \mu+2\alpha_4+\alpha_5+\cdots+\alpha_i \notin \Lambda(M)$. Следовательно, $X_it=0$. Теперь из формулы (2) следует, что $\mathcal{X}_j$ фиксирует t при $4<j<n$ и при $j=3$. Аналогично вес $\mu+\alpha_n \sim \omega-\alpha_{n-3} \notin \Lambda(M)$. Значит, подгруппа $\mathcal{X}_n$ фиксирует t и вектор t примитивен относительно H. Вес $\omega_H(t)=(\omega_2,\omega_{n-6})$. □

Лемма 11. *Пусть $p \neq 5$ и $\omega=\omega_{n-3}$. Тогда ограничение $M|H$ имеет композиционный фактор со старшим весом (ω_2,ω_{n-7}).*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 10. Положим

$$\mu=\omega-\alpha_3-2\alpha_4-\cdots-2\alpha_{n-1}-\alpha_n,$$
$$\lambda=\omega-\alpha_{n-4}-2\alpha_{n-3}-2\alpha_{n-2}-2\alpha_{n-1}-\alpha_n$$

и определим $\operatorname{mult}\mu$. Вес $\mu\sim\lambda$. Следовательно, $\operatorname{mult}\mu=\operatorname{mult}\lambda$. Пусть $P=G(n-4,n-3,n-2,n-1,n)$. Тогда $P\cong C_5(K)$ и $M^\lambda \subset N=KPv^+$. Ограничение $\omega|P=\omega_2$ и $\lambda|P=0$. Применяя предложение 1, лемму 7 и рассуждения из доказательства леммы 1, как в доказательстве леммы 10, можно показать, что $\operatorname{mult}\mu=4$.

Теперь определим $\mathrm{mult}(\mu+\alpha_3)$, $\mathrm{mult}(\mu+\alpha_{n-2})$ и $\mathrm{mult}(\mu+\alpha_{n-1})$. Имеем

$$\begin{aligned}\mu+\alpha_3 &\sim \omega-2\alpha_{n-3}-2\alpha_{n-2}-2\alpha_{n-1}-\alpha_n\\ &\sim \omega-\alpha_{n-3}-2\alpha_{n-2}-2\alpha_{n-1}-\alpha_n\\ &\sim \omega-\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}-2\alpha_{n-1}-\alpha_n\\ &\sim \omega-\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}-\alpha_n\sim\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu+\alpha_{n-2} &\sim \omega-\alpha_3-2\alpha_4-\dots-2\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}-\alpha_n\\ &\sim \omega-\alpha_3-2\alpha_4-\dots-2\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}\\ &\sim \omega-\alpha_{n-4}-2\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}\\ &\sim \omega-\alpha_{n-4}-\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}\sim\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu+\alpha_{n-1} &\sim \omega-\alpha_3-2\alpha_4-\dots-2\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}\\ &\sim \omega-\alpha_3-2\alpha_4-\dots-2\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}\\ &\sim \omega-\alpha_3-2\alpha_4-\dots-2\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}\\ &\sim \omega-\alpha_{n-4}-2\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2}\sim\omega.\end{aligned}$$

Поэтому $\mathrm{mult}(\mu+\alpha_3)=\mathrm{mult}(\mu+\alpha_{n-2})=\mathrm{mult}(\mu+\alpha_{n-1})=1$.

Элементы X_3, X_{n-2} и X_{n-1} задают линейные отображения $f_3 : M^\mu \to M^{\mu+\alpha_3}$, $f_{n-2} : M^\mu \to M^{\mu+\alpha_{n-2}}$ и $f_{n-1} : M^\mu \to M^{\mu+\alpha_{n-1}}$. Поскольку $\mathrm{mult}\,\mu=4$, то $\dim\ker f_j\geq 3$ при $j\in\{3,n-2,n-1\}$ и $\ker f_3\cap\ker f_{n-2}\cap\ker f_{n-1}\neq 0$. Выберем ненулевой вектор $t\in\ker f_3\cap\ker f_{n-2}\cap\ker f_{n-1}$. Рассуждая как при доказательстве леммы 10, получаем, что группы $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ и $\mathcal{X}_\beta$ фиксируют t. По построению $X_3t=X_{n-2}t=X_{n-1}t=0$. При $4<i<n-2$ вес $\mu+\alpha_i\sim\mu+2\alpha_4+\alpha_5+\dots+\alpha_i\notin\Lambda(M)$. Аналогично вес $\mu+\alpha_n\notin\Lambda(M)$, поскольку

$$\mu+\alpha_n\sim\omega-\alpha_3-2\alpha_4-\dots-2\alpha_{n-4}-2\alpha_{n-3}\sim\omega-\alpha_{n-4},$$

а последний вес не принадлежит $\Lambda(M)$. Следовательно, $X_jt=0$ при $5\leq j\leq n$, и из формулы (2) вытекает, что $\mathcal{X}_j$ фиксирует t. Значит, вектор t примитивен относительно H. Заметим, что $\omega_H(t)=(\omega_2,\omega_{n-7})$. □

Лемма 12. *Пусть* $p\neq 5$, $n=8$ *и* $\omega=\omega_5$. *Тогда* $\mathrm{wdeg}\,M\geq 4$.

Доказательство. Положим $P = G(4,5,6,7)$, $u = v(8,5,1)$ и $\nu = \omega_P(u)$. Тогда $P \cong A_4(K)$. По лемме 4 вектор u примитивен относительно P. Вес $\nu = \omega_1 + \omega_4$ – старший вес присоединенного представления группы P. Теперь из [9, табл. 1] следует, что $\dim L(\nu) = 24$ и $L(\nu)$ – присоединенный модуль для P. Поэтому $\dim L(\nu)^0 = 4$ (ранг группы P) и $\operatorname{wdeg} M \geq 4$. $\square$

Лемма 13. *Пусть $v \in M$ – примитивный относительно H вектор. Предположим, что либо*

$$p > 3, \qquad \omega_{H_2}(v) = \omega_{n-5} + \frac{p-3}{2}\omega_{n-4},$$
$$t_1 = X_{-n}X_{-(n-1)}v, \quad t_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}v,$$

либо

$$p = 5, \qquad \omega_{H_2}(v) = 2\omega_{n-4},$$
$$t_1 = X_{-n}X_{-(n-1),2}X_{-n}v, \quad t_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}X_{-n}v.$$

Пусть t_1 и t_2 линейно независимы. Тогда существует вектор $s = b_1t_1 + b_2t_2$ ($b_i \in K$), примитивный относительно H.

Доказательство. Положим $\lambda = \omega_{H_2}(v)$, $\rho = \omega_{H_2}(t_i)$ ($i = 1,2$) и $U = KH_2v$ и обозначим символом U_m максимальный H_2-подмодуль модуля U. Тогда $U/U_m \cong L(\lambda)$. Так как $\lambda \in \Omega_p(H_2)$ и векторы t_1 и t_2 порождают 2-мерное подпространство пространства U^ρ, получаем, что подмодуль U_m содержит ненулевой вектор s вида $b_1t_1+b_2t_2$. Легко заметить, что если $\tau \in \Lambda(U)$ и $\tau > \rho$, то $\dim U^\tau = \dim L(\lambda)^\tau = 1$. Здесь, как обычно, $\tau > \rho$ означает, что $\tau - \rho$ – сумма положительных корней группы H_2. Следует учесть, что при $p = 5$ и $\lambda = 2\omega_{n-4}$ веса $\rho + (\alpha_{n-1}|H_2)$ и $\lambda - (\alpha_{n-1}|H_2) - (\alpha_n|H_2)$ лежат в одной орбите относительно группы $W(H_2)$ и что это справедливо и для пары $\rho + (\alpha_n|H_2)$ и $\lambda - (\alpha_n|H_2)$. Значит, $\tau \notin \Lambda(U_m)$. Отсюда вытекает, что для каждого положительного корня δ подгруппы H_2 группа $\mathcal{X}_\delta$ фиксирует s. Следовательно, s примитивен относительно H_2. Поскольку $X_{-(n-1)}$ и X_{-n} перестановочны с H_1, вектор s также примитивен относительно H_1 и H. $\square$

Следующее предложение завершает доказательство теоремы 1.

Предложение 3. *Пусть* $n \geq 8$ *и* $n \equiv 0 (\operatorname{mod} 4)$. *Предположим, что* $M \in \operatorname{Irr}_p G$ *и* $\omega \notin \Omega_p$. *Тогда* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4$.

Доказательство. Положим $\Gamma = G(1, \dots, n-2, n-1)$. Тогда $\Gamma \cong A_{n-1}(K)$. Доказательство основано на анализе ограничений $M|H$ и $M|\Gamma$. Напомним, что $H = H_1 \times H_2$, где

$$\begin{aligned} H_1 &= G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \cong C_4(K), \\ H_2 &= G(5, \dots, n) \cong C_{n-4}(K), \\ \beta &= 2\varepsilon_4 = 2\alpha_4 + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n. \end{aligned}$$

Назовем доминантный вес $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_H$ *специальным*, если хотя бы один из $\mu_i \in \Omega(H_i)$. В противном случае μ *неспециальный*.

Если $n > 8$, применим индукцию по n, предполагая, что теорема 1 справедлива для $C_{n-4}(K)$. Корректность такого расширенного предположения индукции, когда мы предполагаем, что не только наше предложение, но и теорема 1 выполняется для группы $C_{n-4}(K)$, следует из леммы 9. Теперь из леммы 8 вытекает, что $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4$, если ограничение $M|H$ имеет композиционный фактор N с неспециальным весом $\omega(N)$.

Для построения нужного фактора $N \in \operatorname{Irr}(M|H)$ используется следующая схема. Если вектор $m \in M$ примитивен относительно H, очевидно, что он порождает неразложимый H-модуль со старшим весом $\omega_H(m)$ и, следовательно, $L(\omega_H(m)) \in \operatorname{Irr}(M|H)$. Легко видеть, что вектор m примитивен относительно H, если его фиксируют подгруппы $\mathcal{X}_i$ с $i \neq 4$ и $\mathcal{X}_\beta$. Очевидно, что ненулевой вектор старшего веса порождает неразложимый H-модуль со старшим весом $\omega|H$ и поэтому $L(\omega|H) \in \operatorname{Irr}(M|H)$. При $j < n$ и $0 < d \leq a_j$ построим вектор $m = v(4, j, d)$, как в лемме 4. Положим $\mu = \omega_H(m)$. По лемме 4 подгруппа $\mathcal{X}_i$ фиксирует m при $i \neq 4$. Поскольку $\beta = 2\alpha_4 + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$, группа $\mathcal{X}_\beta$ также фиксирует m. Следовательно, вектор m примитивен относительно H, а значит, $L(\mu) \in \operatorname{Irr}(M|H)$. Выясним сначала, когда вес $\omega|H$ неспециален, и решим вопрос в этом случае. Затем попытаемся найти вектор m с неспециальным весом μ. Часто не удается построить подходящие векторы этого вида и приходится использовать более сложные конструкции, чтобы получить примитивные относительно H векторы с неспециальными весами. В частности, типичны следующие рассуждения. Пусть $l = 3$ или 5 и $a_l \neq 0$. Найдем вектор $m = v(4, j, d_j)$, для которого $\langle \omega, \alpha_l \rangle = p$ или $p + 1$, $j \geq 4$ при $l = 3$ и $j \leq 4$ при $l = 5$. Предположим, что $a_l > 1$, если $\langle \omega, \alpha_l \rangle = p + 1$. Пусть

$t = X_{-l}m$ или $X_{-l,2}m$ при $\langle\omega,\alpha_l\rangle = p$ или $p+1$ соответственно. По лемме 5 $t \neq 0$. Из леммы 3 следует, что группы $\mathcal{X}_k$ с $k \neq 4$ фиксируют t: при $k \neq l$ это вытекает из пункта (i) этой леммы, так как подгруппа $\mathcal{X}_k$ перестановочна с X_{-l} и $X_{-l,2}$ и фиксирует m по лемме 4, при $k = l$ используем пункт (ii). Поскольку $j < n$, очевидно, что вектор t фиксируется подгруппой $\mathcal{X}_\beta$. Следовательно, t примитивен относительно H. Положим $\delta = \omega_H(t)$. Если вес δ неспециален, то цель достигнута. В некоторых случаях используются еще более специальные рассуждения. Для определенных фундаментальных представлений задача решается с помощью лемм 10, 11 и 12.

В некоторых ситуациях строится композиционный фактор $F \in \mathrm{Irr}(M|\Gamma)$ с $\operatorname{wdeg} F \geq n-4$ и применяется предложение 2. По лемме 4, если $1 \leq k \leq n$ и $a_k \neq 0$, то вектор $u = v(n,k,d_k) \neq 0$ и фиксируется подгруппами $\mathcal{X}_l$ при $l < n$. Следовательно, u примитивен относительно Γ. Положим $\nu = \omega_\Gamma(u)$. Тогда $L(\nu) \in \mathrm{Irr}(M|\Gamma)$. Из предложения 2 следует, что $\operatorname{wdeg} M \geq \operatorname{wdeg} L(\nu)$. Обозначения m, μ, t, δ, u и ν сохраняются до конца доказательства.

Сначала рассмотрим специальный случай. Предположим, что $\omega = a_i\omega_i$ с $a_i > 0$ и $2 \leq i \leq 4$ или $\omega = a_1\omega_1$ с $a_1 > 1$. Пусть $u = v(n,i,a_i)$ в первом случае и $u = v(n,1,1)$ во втором. Тогда $\nu = a_i\omega_{i-1}+a_i\omega_{n-1}$ или $(a_1-1)\omega_1+\omega_{n-1}$ соответственно. Из леммы 6 следует, что $\operatorname{wdeg} L(\nu) \geq n-i$ в первом случае и $\operatorname{wdeg} L(\nu) \geq n-2$ во втором. Следовательно, в обоих случаях $\operatorname{wdeg} M \geq n-4$.

Теперь пусть $\omega \neq a_i\omega_i$ с $i \leq 4$. Здесь в большинстве случаев мы строим композиционный фактор $N \in \mathrm{Irr}(M|H)$ с неспециальным весом $\omega(N)$, но иногда рассматриваем ограничение $M|\Gamma$ и применяем лемму 6 и предложение 2, как выше.

Положим $\lambda = a_1\omega_1+a_2\omega_2+a_3\omega_3$ и $\lambda' = \sum\limits_{i=5}^{n} a_i\omega_i$. Тогда $\omega = \lambda+a_4\omega_4+\lambda'$. Заметим, что $\omega|H$ неспециален, если не выполняется следующее условие:

$$\lambda \in \{0,\omega_1,\omega_3\} \quad \text{или} \quad \lambda' \in \left\{0,\omega_5,\omega_{n-1}+\frac{p-3}{2}\omega_n,\frac{p-1}{2}\omega_n\right\}. \qquad (4)$$

Поэтому предположим, что справедлива формула (4). Подчеркнем, что веса λ и λ' не могут оба равняться 0, поскольку $\omega \neq a_4\omega_4$.

I. Пусть сначала $a_4 \geq 2$.

1. Предположим, что $\lambda \in \{0, \omega_1\}$ или $\lambda' = 0$. Пусть $m = v(4,4,2)$. Если a_3 и $a_5 < p-2$, то вес μ неспециален, поскольку $1 < b_i(\mu) < p$ при $i = 3, 5$.

Заметим, что при наших предположениях $a_3 a_5 = 0$. Следовательно, a_3 или $a_5 < p-2$. Положим $t = X_{-3}m$, $X_{-3,2}m$, $X_{-5}m$ и $X_{-5,2}m$, если $a_3 = p-2$, $a_3 = p-1$, $a_5 = p-2$ или $a_5 = p-1$ соответственно. Во всех случаях вес δ неспециален, поскольку либо $b_2(\delta) \neq 0$ и $1 < b_5(\delta) < p$, либо $1 < b_3(\delta) < p$ и $b_6(\delta) \neq 0$.

2. Пусть $\lambda = \omega_3$ и $\lambda' \neq 0$. Положим $m = v(4,4,1)$. При $a_5 < p-1$ вес μ неспециален, так как $b_3(\mu) = 2$, вес μ_2 p-ограничен, $b_5(\mu) > 0$ и $\mu_2 \neq \omega_1$. В противном случае положим $t = X_{-5}m$. Тогда вес δ неспециален, ибо $b_3(\delta) = 2$ и $b_6(\delta) \neq 0$.

3. Наконец, пусть $\lambda' = \omega_5, \omega_{n-1} + \frac{p-3}{2}\omega_n$ или $\frac{p-1}{2}\omega_n$ и $\lambda \notin \{0, \omega_1, \omega_3\}$. Положим $m = X_{-4}v^+$. Если $a_3 < p-1$, то вес μ неспециален, поскольку μ_1 и μ_2 p-ограничены, $b_1(\mu) + b_2(\mu) + b_3(\mu) > 1$, $\mu_2 \neq \omega_1$ и $b_5(\mu) > 0$. Если $a_3 = p-1$, положим $t = X_{-3}m$. Тогда вес δ неспециален, так как $b_2(\delta) \neq 0$ и $\delta | H_2 = \mu_2$.

II. Предположим, что $a_4 = 1$.

1. Пусть $a_3 \neq 0$. Положим $m = v(4,3,1)$. Тогда при $a_5 < p-2$ вес μ неспециален, поскольку $b_2(\mu) \neq 0$ и $1 < b_5(\mu) < p$. Положим $t = X_{-5}m$ при $a_5 = p-2$ и $t = X_{-5,2}m$ при $a_5 = p-1$. Вес δ неспециален, так как $b_2(\delta) \neq 0$ и $b_6(\delta) \neq 0$.

2. Затем пусть $a_3 = 0$ и $a_5 \neq 0$. Положим $m = v(4,5,1)$. Тогда вес μ неспециален, поскольку $b_3(\mu) = 2$ и $b_6(\mu) \neq 0$.

3. Наконец, пусть $a_3 = a_5 = 0$. Положим

$$w = X_{-4}X_{-3}X_{-5}X_{-4}v^+$$

и $\xi = \omega(w)$. Несколько раз применяя лемму 3 (ii) к соответствующим подгруппам типа A_1 (сначала к $G(4)$, затем к $G(5)$, $G(3)$ и снова к $G(4)$), получаем, что $w \neq 0$. При $i \neq 3, 4, 5$ группа $\mathcal{X}_i$ фиксирует w, поскольку подгруппы $\mathcal{X}_i$ перестановочны с операторами X_{-3}, X_{-4} и X_{-5}. Заметим, что $\xi + \alpha_3 \sim \omega - \alpha_5 \notin \Lambda(M)$ и $\xi + \alpha_5 \sim \omega - \alpha_3 \notin \Lambda(M)$. Значит, $X_3 w = X_5 w = 0$. Очевидно, что $\xi + k\beta \notin \Lambda(M)$ при $k > 0$. Следовательно, $\mathcal{X}_3$, $\mathcal{X}_5$ и $\mathcal{X}_\beta$ также фиксируют вектор w и он примитивен относительно H. Вес $\xi | H$ неспециален, ибо $b_2(\xi) \neq 0$ и $b_6(\xi) \neq 0$.

III. Наконец, предположим, что $a_4 = 0$.

1. Пусть $\lambda = 0$. Тогда $\lambda' \neq 0$.

a) Предположим, что $\omega = \omega_i$, $5 \leq i \leq n$.

Сначала пусть $p = 3$. Тогда $i < n - 1$. Ввиду лемм 10, 11 и 12, предложение справедливо при $i = n-3$ и $n-2$. Поэтому можно предположить, что $5 \leq i < n-3$. Пусть $\tau = \omega - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \cdots - 2\alpha_i - \alpha_{i+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau &\sim \omega - \alpha_3 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - \cdots - 2\alpha_i - \alpha_{i+1} \sim \omega - \alpha_{i-1} - 2\alpha_i - \alpha_{i+1} \\ &\sim \omega - \alpha_{i-1} - \alpha_i - \alpha_{i+1} \sim \omega.\end{aligned}$$

Следовательно, $\tau \in \Lambda(M)$. Пусть $v \in M^\tau \setminus \{0\}$. Очевидно, что $\mathcal{X}_\beta$ и $\mathcal{X}_j$ фиксируют v при $j = 1, 2$ или $i + 2 \leq j \leq n$. Заметим, что

$$\tau + \alpha_3 \sim \omega - 2\alpha_i - \alpha_{i+1} \sim \omega - \alpha_{i+1} \notin \Lambda(M)$$

и

$$\tau + \alpha_5 \sim \omega - \alpha_3 - \alpha_5 - 2\alpha_6 - \cdots - 2\alpha_i - \alpha_{i+1} \notin \Lambda(M).$$

Аналогично при $5 < j < i + 1$ вес

$$\tau + \alpha_j \sim \omega - \alpha_3 - \alpha_5 - \cdots - \alpha_j - 2\alpha_{j+1} - \cdots - 2\alpha_i - \alpha_{i+1}$$

или

$$\tau + \alpha_j \sim \omega - \alpha_3 - \alpha_5 - \cdots - \alpha_i$$

и, следовательно, не принадлежит $\Lambda(M)$. Вес

$$\tau + \alpha_{i+1} \sim \omega - \alpha_3 - 2\alpha_4 - \alpha_5 - \cdots \alpha_i \sim \omega - \alpha_3 - \alpha_5 - \cdots \alpha_i \notin \Lambda(M).$$

Значит, $\mathcal{X}_j$ фиксирует v при $j = 3$ и $5 \leq j \leq n$. Поэтому вектор v примитивен относительно H. Вес $\tau|H$ неспециален, поскольку $b_2(\tau) = b_{i+2}(\tau) = 1$.

Теперь пусть $p > 3$. Если $i < n$, положим $m = v(4, i, 1)$. Вес μ неспециален, поскольку $\mu_1 = \omega_3$ и $\mu_2 = \omega_{i-3}$. При $i = n$ сам вес $\omega|H$ неспециален, так как $\omega|H_1 = \omega_4$ и $\omega|H_2 = \omega_{n-4}$.

b) Пусть $\omega \neq \omega_i$. Тогда $\sum\limits_{i=5}^{n} a_i \geq 2$.

(i) Предположим, что $\sum\limits_{i=5}^{n-2} a_i \geq 2$. Выберем минимальный индекс i, для которого $a_i \neq 0$. Если $a_i > 1$, положим $m = v(4, i, 2)$. В противном случае выберем минимальный индекс $j > i$, для которого $a_j \neq 0$, и положим $m = v(4, j, 1)$. Имеем $b_3(\mu) = 2$. Поскольку $b_{i+1}(\mu) \neq 0$, вес μ неспециален при $i < n-2$. Если $i = n-2$, то согласно нашим предположениям, $a_i > 1$. Тогда при $a_{n-1} < p-2$ вес μ неспециален, поскольку $1 < b_{n-1}(\mu) < p$.

Теперь пусть $i = n-2$ и $a_{n-1} = p-2$ или $p-1$. Положим $t = X_{-(n-1)}m$ при $a_{n-1} = p-2$ и $t = X_{-(n-1),2}m$ при $a_{n-1} = p-1$. Тогда вес δ неспециален, так как $b_3(\delta) = 2$ и $b_{n-2}(\delta) \neq 0$.

(ii) Предположим, что $\omega = \omega_i + a_{n-1}\omega_{n-1} + a_n\omega_n$, где $i < n-1$ и $a_{n-1} \neq 0$. Пусть $m = v(4, n-1, 1)$. Тогда $b_3(\mu) = 2$. Если $i < n-2$, то вес μ неспециален, ибо $b_{i+1}(\mu) \neq 0$. Пусть $i = n-2$. Тогда $\mu_2 = a_{n-1}\omega_{n-5} + (a_n+1)\omega_{n-4}$. Поэтому μ специален только в следующих двух случаях:

(A) $p > 3$, $a_{n-1} = 1$, $a_n = \frac{p-5}{2}$;

(B) $p = 3$, $a_{n-1} = 1$, $a_n = 2$.

(A) Пусть $p > 3$, $a_{n-1} = 1$ и $a_n = \frac{p-5}{2}$. Положим $t_1 = X_{-n}X_{-(n-1)}m$ и $t_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}m$. Покажем, что векторы t_1 и t_2 линейно независимы. При $i = 1, 2$ положим $l_i = X_{n-2,2} \dots X_{4,2}t_i$. Так как элементы $X_{n-2,2}, \dots, X_{4,2}$ перестановочны с $X_{-(n-1)}$ и X_{-n}, из леммы 3(i) следует, что $l_1 = X_{-n}X^2_{-(n-1)}v^+ = 0$ и $l_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}v^+$. Еще раз применяя эту лемму, получаем, что $X_nX_{n-1}l_2 = (p-4)X_{-(n-1)}v^+ \neq 0$. Значит, $l_2 \neq 0$ и поэтому $t_2 \neq 0$. Теперь, чтобы доказать, что t_1 и t_2 линейно независимы, достаточно показать, что $t_1 \neq 0$. Используя лемму 3(i), получаем

$$\begin{aligned} X_{n-3,2} \dots X_{4,2}t_1 &= X_{-n}X_{-(n-1)}X_{-(n-2),2}X_{-(n-1)}v^+ \\ &= X_{-n}X_{-(n-1)}v(n-2, n-1, 1). \end{aligned}$$

Положим $v = v(n-2, n-1, 1)$. В силу леммы 4 вектор v примитивен относительно $G(n-1, n)$. Он порождает неразложимый $G(n-1, n)$-модуль N со старшим весом $\omega_1 + \frac{p-3}{2}\omega_2$. Следовательно, ввиду леммы 3(ii), $X_{-(n-1)}v \neq 0$ и $t_1 \neq 0$. Таким образом, t_1 и t_2 линейно независимы.

Теперь из леммы 13 следует, что существует вектор $s = at_1 + bt_2$ $(a, b \in K)$, примитивный относительно H. Положим $\gamma = \omega_H(s)$. Вес γ неспециален, так как $b_3(\gamma) = 2$ и $b_{n-2}(\gamma) \neq 0$.

(B) Предположим, что $p = 3$ и $\omega = \omega_{n-2} + \omega_{n-1} + 2\omega_n$. Пусть

$w = X_{-(n-1)}X_{-n}m$ и $\xi = \omega_H(w)$. Из леммы 3 вытекает, что

$$X_nX_{n-1}X_{n-2,2}\dots X_{4,2}w = X_nX_{n-1}X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}v^+ \\ = X_nX_{-(n-1)}X_{-n}v^+ = 2X_{-(n-1)}v^+ \neq 0$$

(здесь необходимо учесть, что $X_nX_{-n}X_{-(n-1)}v^+ = 0$). Следовательно, $w \neq 0$. Группы $\mathcal{X}_\beta$ и $\mathcal{X}_i$ при $1 \leq i \leq n-2$, $i \neq 4$, фиксируют w, так как они фиксируют m и перестановочны с $X_{-(n-1)}$ и X_{-n}. Рассматривая w как элемент неразложимого H_2-модуля, порожденного m, заключаем, что

$$X_{n-1}w = 3X_{-n}m = 0, \quad X_nw = 3X_{-(n-1)}m = 0.$$

Следовательно, $\mathcal{X}_{n-1}$ и $\mathcal{X}_n$ также фиксируют вектор w, и он примитивен относительно H. Вес ξ неспециален, поскольку $b_2(\xi) = 2$ и $b_{n-2}(\xi) \neq 0$.

(iii) Пусть $\omega = \omega_i + a_n\omega_n$ с $4 < i < n-1$ и $a_n \neq 0$. Вес $\omega|H$ специален тогда и только тогда, когда $a_n = \frac{p-3}{2}$ и $p > 3$. В этом случае положим $w = X_{-(n-1)}X_{-n}v^+$. Тогда $w \neq 0$ в силу леммы 3(ii) и вектор w примитивен относительно группы $S = G(1,\dots,n-2)$. Применим лемму 4 к неразложимому S-модулю, порожденному вектором w. Пусть $v = v(4, n-2, 1)$ при $i < n-2$ и $v = v(4, n-2, 2)$ в противном случае – вектор из этого модуля. Ввиду леммы 4, группы $\mathcal{X}_i$ фиксируют v при $1 \leq i \leq n-2$, $i \neq 4$. Очевидно, что $\mathcal{X}_\beta$ фиксирует v. Заметим, что $\omega(v) + \alpha_{n-1} \sim \omega - \alpha_{n-2} - \alpha_n$ при $i < n-2$ и $\sim \omega - 2\alpha_{n-2} - \alpha_n$ при $i = n-2$, $\omega(v) + \alpha_n \sim \omega - \alpha_{n-1}$. Поэтому $\omega(v) + \alpha_k \notin \Lambda(M)$ при $k = n-1$ или n. Значит, $\mathcal{X}_k$ фиксирует v. Следовательно, v примитивен относительно H. Положим $\xi = \omega_H(v)$. Коэффициент $b_3(\xi) = 2$. Имеем $b_{i+1}(\xi) \neq 0$ и $b_{n-1}(\xi) = 2$, если $i = n-2$. Следовательно, вес ξ неспециален.

(iv) Предположим, что $\omega = a_{n-1}\omega_{n-1} + a_n\omega_n$ и $a_{n-1} \neq 0$. Тогда вес $\omega|H$ неспециален, за исключением следующих случаев:

(A) $a_{n-1} + a_n = \frac{p-1}{2}$;

(B) $p = 3$ и $a_{n-1} + a_n = 3$ или 4.

(A) Пусть $a_{n-1} + a_n = \frac{p-1}{2}$. Тогда $a_{n-1} > 1$, так как $\omega \notin \Omega_p$. Положим $m = v(4, n-1, 2)$. Тогда $b_3(\mu) = 2$.

Сначала предположим, что $a_{n-1} \geq 4$. В этом случае $1 < b_{n-1}(\mu) < p$. Поэтому вес μ неспециален.

Пусть $a_{n-1} = 3$. Тогда $a_n = \frac{p-7}{2}$, следовательно, $p \geq 7$. Вес $\mu_2 = \omega_{n-5} + \frac{p-3}{2}\omega_{n-4}$. Рассуждаем, как в пункте (ii)(A). Положим $t_1 = X_{-n}X_{-(n-1)}m$ и $t_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}m$ и покажем, что t_1 и t_2 линейно независимы. При $i = 1, 2$ введем $l_i = X_{n-2,2} \dots X_{4,2}t_i$. Поскольку $X_{n-2,2}$, $\dots$, $X_{4,2}$ перестановочны с $X_{-(n-1)}$ и X_{-n}, используя лемму 3, получаем $l_1 = \frac{1}{2}X_{-n}X^3_{-(n-1)}v^+$ и $l_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1),2}v^+$. Предположим, что $l = xl_l + yl_2 = 0$ $(x, y \in K)$. Поскольку $X_n l = X_n X_{n-1} l = 0$, применяя лемму 3, получаем следующую систему

$$\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 9x + 23y = 0. \end{cases}$$

Ее определитель равен -4. Поэтому система имеет только нулевое решение. Следовательно, l_1 и l_2 линейно независимы, и t_1 и t_2 также линейно независимы. Теперь из леммы 13 вытекает, что существует вектор $s = at_1 + bt_2$ $(a, b \in K)$, примитивный относительно H $(t_1, t_2 \in K)$. Положим $\sigma = \omega_H(s)$. Вес σ неспециален, поскольку $b_3(\sigma) = 2$ и $b_{n-2}(\sigma) \neq 0$.

Теперь пусть $a_{n-1} = 2$. Тогда $a_n = \frac{p-5}{2}$, а значит, $p \geq 5$.

Сначала предположим, что $p = 5$. Пусть

$$t_1 = X_{-n}X_{-(n-1),2}X_{-n}m, \quad t_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}X_{-n}m.$$

Докажем, что t_1 и t_2 линейно независимы. Определим l_i, $i = 1, 2$, как при $a_{n-1} = 3$. Рассуждая, как в этом случае, получим

$$\begin{aligned} l_1 &= X_{-n}X_{-(n-1),2}X_{-n}X_{-(n-1),2}v^+, \\ l_2 &= X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1),2}v^+. \end{aligned}$$

Положим $l = X_{-(n-1),2}X_{-n}X_{-(n-1),2}v^+$. Мы утверждаем, что $l = 0$. В самом деле, $\langle \omega(l), \alpha_{n-1} \rangle = -4$. Поэтому $\omega(l) \sim \omega - \alpha_n \notin \Lambda(M)$. Отсюда следует, что $l = l_1 = 0$. Докажем, что $l_2 \neq 0$. Используя лемму 3, получаем

$$X_{n-1}X_nX_{n-1}l_2 = cX_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}v^+,$$

где $c \in K^*$. Легко проверить, что $X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}v^+ \neq 0$. Поэтому $l_2 \neq 0$ и $t_2 \neq 0$. Теперь, чтобы доказать, что t_1 и t_2 линейно независимы, достаточно показать, что $t_1 \neq 0$. Напомним, что $t_1 = X_{-n}X_{-(n-1),2}X_{-n}m$, вектор m примитивен относительно $P = G(n-1,n)$ и $\mu|P = 2\omega_2$. Следовательно,

$$X_{n-1}^2 t_1 = c' X_{-n}^2 m \neq 0,$$

где $c' \in K^*$, и поэтому $t_1 \neq 0$. Значит, t_1 и t_2 линейно независимы. В силу леммы 13 существует вектор $s \in M^{\mu-2\alpha_{n-1}-2\alpha_n}$, примитивный относительно H. Положим $\sigma = \omega_H(s)$. Тогда σ неспециален, так как $b_3(\sigma) = 2$ и $b_{n-2}(\sigma) \neq 0$.

Теперь пусть $p > 5$. Положим $\xi = \omega - \beta$. Покажем, что $\operatorname{mult}\xi = 3$. Заметим, что $\xi \sim \tau = \omega - 2\alpha_{n-1} - \alpha_n$. Следовательно, $\operatorname{mult}\xi = \operatorname{mult}\tau$. Пусть $t_1 = X_{-n}X_{-(n-1)}^2 v^+$, $t_2 = X_{-(n-1)}X_{-n}X_{-(n-1)}v^+$ и $t_3 = X_{-(n-1)}^2 X_{-n}v^+$ (заметим, что условие $p > 5$ существенно, поскольку $t_3 = 0$ при $p = 5$). Очевидно, что подпространство M^τ порождается векторами t_1, t_2 и t_3. Предположим, что $s = xt_1 + yt_2 + zt_3 = 0$, где x, y, $z \in K$. Так как $X_n s = X_{n-1}^2 s = X_n X_{n-1} s = 0$, используя лемму 3, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 0, \\ x + 3y + 6z = 0, \\ 3x + 8y + 15z = 0 \end{cases}$$

(здесь существенно, что $p > 2$). Ее определитель равен 1, следовательно, t_1, t_2 и t_3 линейно независимы и $\operatorname{mult}\xi = 3$. Элементы X_β и X_n задают линейные отображения $f_\beta : M^\xi \to M^\omega$ и $f_n : M^\xi \to M^{\xi+\alpha_n}$. Заметим, что $\xi + \alpha_n \sim \omega$. Поэтому

$$\operatorname{mult}(\xi + \alpha_n) = \operatorname{mult}\omega = 1$$

и $\dim\ker f_\beta$ и $\dim\ker f_n \geq 2$. Так как $\dim M^\xi = 3$, пересечение $\ker f_\beta \cap \ker f_n \neq 0$. Выберем ненулевой вектор $l \in \ker f_\beta \cap \ker f_n$. Тогда по определению $X_\beta l = X_n l = 0$ и, следовательно, подгруппы $\mathcal{X}_\beta$ и $\mathcal{X}_n$ фиксируют l. Подгруппы $\mathcal{X}_i$ при $i = 1, 2, 3$ фиксируют l, поскольку $\xi + k\alpha_i \notin \Lambda(M)$ при $k > 0$. При $5 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \xi + \alpha_i &\sim \omega - 2\alpha_4 - \alpha_5 - \cdots - \alpha_i - 2\alpha_{i+1} \cdots - 2\alpha_{n-1} - \alpha_n \\ &\sim \omega + \alpha_4 - \alpha_5 - \cdots - \alpha_i - 2\alpha_{i+1} \cdots - 2\alpha_{n-1} - \alpha_n \notin \Lambda(M). \end{aligned}$$

Поэтому при $5 \leq i \leq n-1$ группы $\mathcal{X}_i$ также фиксируют вектор l и он примитивен относительно H. Вес $\xi|H$ неспециален, поскольку $b_3(\xi) = 2$ и $b_{n-1}(\xi) = 2$.

(B) Предположим, что $p = 3$ и $a_{n-1} + a_n = 3$ или 4.

Сначала пусть $\omega = \omega_{n-1} + 2\omega_n$. Положим $m = v(4, n-1, 1)$ и $t = X_{-n}m$. Тогда вес δ неспециален, потому что $\delta = (\omega_3 + 2\omega_4, 2\omega_{n-5} + \omega_{n-4})$.

Пусть $\omega = 2\omega_{n-1} + \omega_n$. Возьмем $m = v(4, n-1, 2)$ и $t = X_{-n}m$. Вес δ неспециален, так как $b_3(\delta) = 2$ и $b_{n-1}(\delta) = 2$.

Пусть $\omega = 2\omega_{n-1} + 2\omega_n$. Положим $m = v(4, n-1, 2)$, $w = X_{-(n-1),2}X_{-n,2}m$ и $\xi = \omega(w)$. Вектор $w \neq 0$. В самом деле, из леммы 3 вытекает, что

$$
\begin{aligned}
&(X_n X_{n-1})^2 (X_{n-2,2} \dots X_{4,2} w) \\
&\qquad = (X_n X_{n-1})^2 (X_{-(n-1),2} X_{-n,2} X_{-(n-1),2} v^+) \\
&\qquad = c(X_n X_{n-1})(X_{-(n-1),2} X_{-n} X_{-(n-1)} v^+) = c' X_{-(n-1),2} v^+ \neq 0,
\end{aligned}
$$

где c и $c' \in K^*$. Группы $\mathcal{X}_\beta$ и $\mathcal{X}_i$ при $5 \le i \le n-2$ или $i = 3$ перестановочны с $X_{-(n-1)}$ и X_{-n} и, следовательно, фиксируют w, поскольку они фиксируют m. Ввиду леммы 3(i), $X_{n-1}w = X_n w = 0$. Легко видеть, что $\omega(w) + k\alpha_{n-1} \notin \Lambda(M)$ при $k \ge 3$. Поэтому группы $\mathcal{X}_{n-1}$ и $\mathcal{X}_n$ также фиксируют w. Следовательно, w примитивен относительно H. Вес ξ неспециален, ибо $b_3(\xi) = 2$ и $b_{n-2}(\xi) \neq 0$.

(v) Наконец, пусть $\omega = a_n\omega_n$. Тогда $\omega|H$ неспециален, поскольку $a_n \neq \frac{p-1}{2}$.

Напомним, что случай $\omega = a_i\omega_i$ с $i \le 4$ уже был рассмотрен, поэтому мы его можем исключить.

2. Предположим, что $\lambda = \omega_1$. Выберем минимальный индекс $i > 4$, для которого $a_i \neq 0$. Если $i < n-2$, положим $m = v(4, i, 1)$. Тогда μ неспециален, так как $b_1(\mu) = b_3(\mu) = 1$ и $b_{i+1}(\mu) \neq 0$.

Пусть $i = n-2$ или $n-1$. Тогда $\omega|\Gamma = \omega_1 + \dots + a_{n-2}\omega_{n-2} + a_{n-1}\omega_{n-1}$, где $a_{n-2} \neq 0$ или $a_{n-1} \neq 0$. Применяя лемму 6, получаем, что $\operatorname{wdeg} L(\omega|\Gamma) \ge n-3$.

Теперь пусть $i = n$. Положим $u = X_{-n}v^+$. Тогда $\nu = \omega_1 + \dots + 2\omega_{n-1}$. Ввиду леммы 6, $\operatorname{wdeg} L(\nu) \ge n-2$.

3. Предположим, что $\lambda = \omega_3$. Как в предыдущем пункте, выберем минимальный индекс $i > 4$, для которого $a_i \neq 0$. Если $i < n-2$, то рассуждаем, как выше (здесь $b_3(\mu) = 2$).

Пусть $i \ge n-2$. Положим $m = v(4, 3, 1)$. Вес μ неспециален, поскольку $b_2(\mu) = b_5(\mu) = 1$ и $0 < b_i(\mu) = a_i < p$.

Теперь можно считать, что $\lambda \notin \{0, \omega_1, \omega_3\}$.

4. Предположим, что $\lambda' = 0$.

a) Пусть $\omega = a_1\omega_1 + \omega_2$, где $a_1 \neq 0$.

Если $a_1 > 1$, положим $m = v(4,1,1)$. Тогда $b_1(\mu) = a_1$ и $b_5(\mu) = 2$. Поэтому μ неспециален.

Если $\omega = \omega_1 + \omega_2$, положим $u = v(n,2,1)$. В силу леммы 6, $\operatorname{wdeg} L(\nu) \geq n-2$, так как $b_1(\nu) = 2$ и $b_{n-1}(\nu) = 1$.

b) Предположим, что $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$, где $a_1 > 0$ и $a_2 > 1$. Пусть $m = v(4,2,2)$. При $a_1 < p-2$ вес μ неспециален, поскольку $1 < b_1(\mu) < p$ и $b_5(\mu) = 2$. Положим $t = X_{-1}m$ при $a_1 = p-2$ и $t = X_{-1,2}m$ при $a_1 = p-1$. Тогда δ неспециален, ибо $b_2(\delta) \neq 0$ и $b_5(\delta) = 2$.

c) Пусть $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$ и $a_3 \neq 0$. Если $a_3 \geq 2$, положим $m = v(4,3,2)$. Вес μ неспециален, так как $b_2(\mu) \neq 0$ и $b_5(\mu) = 2$.

Предположим, что $a_3 = 1$. Тогда $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$. Пусть $m = v(4,2,1)$, если $a_2 \neq 0$, и $m = v(4,1,1)$ при $a_2 = 0$. Имеем $b_2(\mu) \neq 0$ и $b_5(\mu) = 2$. Поэтому μ неспециален.

5. Предположим, что $\lambda' = \omega_5$. Пусть $m = v(4,5,1)$. Если $a_3 < p-1$, то μ неспециален, поскольку вес μ_1 p-ограничен, $b_1(\mu)+b_2(\mu)+b_3(\mu) > 1$ и $b_6(\mu) = 1$. При $a_3 = p-1$ положим $t = X_{-3}m$. Тогда $b_2(\delta) \neq 0$ и $b_6(\delta) = 1$. Следовательно, δ неспециален.

6. Пусть $\lambda' = \omega_{n-1} + \frac{p-3}{2}\omega_n$ или $\frac{p-1}{2}\omega_n$. Положим $u = v^+$ в первом случае и $u = X_{-n}v^+$ во втором. Ввиду леммы 6, $\operatorname{wdeg} L(\nu) \geq n-4$, так как $b_i(\nu) \neq 0$ при $i = 1$, 2 или 3, $b_{n-1}(\nu) = 1$ или 2.

Предложение доказано. □

Это завершает доказательство теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2

В этом параграфе $p = 2$. Как и выше, мы предполагаем, что M – простой G-модуль и $\omega = \omega(M)$. Для веса $\lambda = c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n \in \Lambda(G)$ положим $c_i(\lambda) = c_i$.

Предложение 4. *Пусть $n \geq 8$, вес ω 2-ограничен и $\omega \notin \Omega_2$. Тогда* $\operatorname{wdeg} M = 2$, *если $\omega = \omega_1 + \omega_n$. В противном случае* $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4 - [n]_4$, *где $[n]_4$ – вычет числа n по модулю 4; в частности,* $\operatorname{wdeg} M \geq n-7$.

Доказательство. Сначала предположим, что $a_n = 0$. Пусть P – подгруппа группы G, порожденная всеми короткими корневыми подгруппами. Тогда $P \cong D_n(K)$. Ввиду [12, табл. 1], $M|P \cong L(\lambda)$, где

$$\lambda = a_1\omega_1 + \cdots + a_{n-2}\omega_{n-2} + a_{n-1}\omega_{n-1} + a_{n-1}\omega_n.$$

Теперь утверждение предложения следует из аналогичных оценок для представлений группы $D_n(K)$ в характеристике 2, полученных в [6, теорема 1].

Пусть $a_n \neq 0$. Положим $\mu = a_1\omega_1 + \cdots + a_{n-1}\omega_{n-1}$. Тогда $\mu \neq 0$, поскольку $\omega \notin \Omega_2$. В силу следствия теоремы 41 из [7] $M \cong L(\mu) \otimes L(\omega_n)$. Если $\mu \neq \omega_1$, то ввиду леммы 2, $\operatorname{wdeg} M \geq \operatorname{wdeg} L(\mu) \geq n - 4 - [n]_4$.

Предположим, что $\omega = \omega_1 + \omega_n$. Пусть $N_1 = L(\omega_1)$ и $N_2 = L(\omega_n)$. Известно, что

$$\Lambda(N_1) = \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \quad \Lambda(N_2) = \{\pm\varepsilon_1 \pm \ldots \pm \varepsilon_n\}$$

и $\operatorname{wdeg} N_j = 1$ при $j = 1, 2$. Обозначим символами Λ_1 и Λ_2 множества всех весов вида $\sum\limits_{j\neq i} \pm\varepsilon_j$ и $\pm 2\varepsilon_i + \sum\limits_{j\neq i} \pm\varepsilon_j$ соответственно (здесь $1 \leq i, j \leq n$). Легко заметить, что $\Lambda(M) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Кроме того, для веса $\mu \in \Lambda_1$ с $c_i(\mu) = 0$ есть ровно два разложения вида $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где $\mu_j \in \Lambda(N_j)$, здесь $\mu_1 = \varepsilon_i$ или $-\varepsilon_i$; вес $\nu \in \Lambda_2$, для которого $c_i(\nu) = \pm 2$, однозначно представляется в виде $\nu_1 + \nu_2$, где $\nu_j \in \Lambda(N_j)$, здесь $\nu_1 = \frac{c_i(\nu)}{2}\varepsilon_i$. Отсюда следует, что $\operatorname{mult}\mu = 2$ и $\operatorname{mult}\nu = 1$. В частности, $\operatorname{wdeg} M = 2$. $\square$

Это завершает анализ 2-ограниченных модулей. Теперь предположим, что вес ω не 2-ограничен. Запишем $\omega = \lambda_0 + 2\lambda_1 + \cdots + 2^k\lambda_k$, где веса λ_j 2-ограничены для $0 \leq j \leq k$ и $\lambda_k \neq 0$. Напомним, что символом $S(\omega)$ мы обозначаем упорядоченную последовательность $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Фиксируем обозначения k и λ_j. Согласно [5, предложение 2], $\omega \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\lambda_i \in \Omega_2$ и для всех $i < k$ пара $(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \neq (\omega_n, \omega_1)$.

Следствие 1. *Пусть $n \geq 8$ и для некоторого i вес $\lambda_i \notin \Omega_2'$. Тогда $\operatorname{wdeg} M \geq n - 4 - [n]_4$, где $[n]_4$ – вычет n по модулю 4.*

Доказательство. Это следует непосредственно из теоремы Стейнберга о тензорном произведении и леммы 2. $\square$

Всюду далее предполагаем, что все $\lambda_i \in \Omega_2'$.

Лемма 14. *Пусть $\omega = \omega_n + 2\omega_1$. Тогда $\operatorname{wdeg} M \geq n$.*

Доказательство. Положим $N_1 = L(\omega_n)$ и $N_2 = L(2\omega_1)$. По формуле (3) $M \cong N_1 \otimes N_2$. Для любого i, $1 \leq i \leq n$, положим $\mu_{i,1} = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{i-1} - (\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \cdots + \varepsilon_n)$ и $\mu_{i,2} = 2\varepsilon_i$. Тогда $\mu_{i,j} \in \Lambda(N_j)$

при $j = 1$, 2 и $\mu_{i,1} + \mu_{i,2} = \omega_n$. Следовательно, $\operatorname{mult}\omega_n \geq n$ для веса $\omega_n \in \Lambda(M)$, а значит, $\operatorname{wdeg} M \geq n$. $\square$

Следствие 2. *Пусть для некоторого $i < k$ пара*

$$(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \in \{(\omega_n, \omega_1), (\omega_1 + \omega_n, \omega_1), (\omega_n, \omega_1 + \omega_n), (\omega_1 + \omega_n, \omega_1 + \omega_n)\}.$$

Тогда $\operatorname{wdeg} M \geq n$.

Доказательство. Положим $N = L(\omega_n + 2\omega_1)$. Из теоремы Стейнберга о тензорном произведении и следствия теоремы 41 в [7] вытекает, что $M \cong V \otimes N^{[s]}$, где $V \in \mathrm{Irr}$ и $0 \leq s < k$. Теперь наше утверждение следует из лемм 2 и 14. $\square$

Нам понадобится следующее очевидное утверждение.

Лемма 15. *Каждое нечетное целое число a, такое что $|a| < 2^{t+1}$, однозначно представляется в виде*

$$a = a_0 + 2a_1 + \cdots + 2^t a_t, \tag{5}$$

где $a_i = \pm 1$ при $0 \leq i \leq t$.

Лемма 16. *Пусть $\omega = \omega_1 + \omega_n + (\sum_{t=1}^{k} 2^t)\omega_n$, где $t \geq 1$. Тогда* $\operatorname{wdeg} M = 2$.

Доказательство. Положим $N_1 = L(\omega_1 + \omega_n)$ и $N_2 = L(\omega_n)^{[1]} \otimes \ldots \otimes L(\omega_n)^{[k]}$. Тогда по формуле (3) $M \cong N_1 \otimes N_2$.

Пусть Λ_1 и $\Lambda_2 \subset \Lambda(G)$ – множества весов, определенные в доказательстве предложения 4. В ходе этого доказательства было установлено, что $\Lambda(N_1) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\operatorname{mult}\gamma = 2$, если $\gamma \in \Lambda_1$, и $\operatorname{mult}\gamma = 1$ при $\gamma \in \Lambda_2$.

Поскольку

$$\Lambda(L(\omega_n)) = \{\pm\varepsilon_1 \pm \ldots \pm \varepsilon_n\},$$

используя лемму 15, легко видеть, что $\Lambda(N_2)$ состоит из всех весов

$$\delta = 2(c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n),$$

где c_j нечетны и $|c_j| < 2^k$, $1 \leq j \leq n$. Согласно [5, предложение 2], $\operatorname{mult}\delta = 1$.

Каждый вес $\mu \in \Lambda(M)$ равен $\gamma + \delta$, где $\gamma \in \Lambda_1$ или Λ_2 и $\delta \in \Lambda(N_2)$. Если $\gamma \in \Lambda_1$, то $c_i(\gamma) = 0$ для единственного индекса i и $c_j(\gamma) = \pm 1$

при $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$. Следовательно, $c_i(\mu) \equiv 2 (\operatorname{mod} 4)$ и при $j \neq i$ коэффициент $c_j(\mu)$ нечетен и $|c_j(\mu)| < 2^{k+1}$. Если $\gamma \in \Lambda_2$, то $c_i(\gamma) = \pm 2$ для единственного индекса i и $c_j(\gamma) = \pm 1$ при $j \neq i$. Поэтому $c_i(\mu) \equiv 0 (\operatorname{mod} 4)$ и при $j \neq i$ коэффициенты $c_j(\mu)$ такие же, как и в предыдущем случае. Значит, у каждого веса $\mu \in \Lambda(M)$ имеется единственный четный коэффициент $c_i(\mu)$.

Из леммы 15 следует, что во всех ситуациях $c_j(\mu)$ полностью определяет $c_j(\gamma)$ и $c_j(\delta)$ при $j \neq i$. Приведенные выше рассуждения показывают, что $c_i(\mu)$ также определяет $c_i(\gamma)$ и $c_i(\delta)$, если $c_i(\mu) \equiv 2 (\operatorname{mod} 4)$. Поэтому в этом случае вес μ однозначно представляется в виде $\gamma + \delta$, где $\gamma \in \Lambda(N_1)$ и $\delta \in \Lambda(N_2)$, здесь $\gamma \in \Lambda_1$. Следовательно, $\operatorname{mult} \mu = 2$, поскольку $\operatorname{mult} \gamma = 2$ и $\operatorname{mult} \delta = 1$.

Теперь пусть $c_i(\mu) \equiv 0 (\operatorname{mod} 4)$. Тогда $\gamma \in \Lambda_2$ и $|c_i(\mu)| \leq 2^{k+1}$. Из структуры множеств Λ_2 и $\Lambda(N_2)$ и рассуждений, приведенных выше, следует, что если $|c_i(\mu)| < 2^{k+1}$, то существуют только две пары (γ_1, δ_1) и (γ_2, δ_2), для которых $\gamma_s \in \Lambda_2$, $\delta_s \in \Lambda(N_2)$ при $s = 1, 2$ и $\gamma_1 + \delta_1 = \gamma_2 + \delta_2 = \mu$; при этом $c_i(\gamma_1) = 2$ и $c_i(\gamma_2) = -2$. Если $c_i(\mu) = \pm 2^{k+1}$, то разложение $\mu = \gamma + \delta$, где $\gamma \in \Lambda_2$ и $\delta \in \Lambda(N_2)$, однозначно определено и $c_i(\gamma) = \pm 2$ с тем же знаком $+$ или $-$, что и $c_i(\mu)$. Поскольку $\operatorname{mult} \gamma = 1$ при $\gamma \in \Lambda_2$, заключаем, что $\operatorname{mult} \mu = 1$, если $c_i(\mu) = \pm 2^{k+1}$, и $\operatorname{mult} \mu = 2$ в противном случае. Значит, $\operatorname{wdeg} M = 2$. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы 2, нам понадобятся несколько обозначений и технических лемм. При $\mu \in \Lambda(G)$ положим $c(\mu) = c_1(\mu) + c_2(\mu)$. Далее

$$\Delta(M) = \{\mu_1 - \mu_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in \Lambda(M)\}.$$

Напомним, что вес называется радикальным, если он представляется в виде целочисленной линейной комбинации корней. Очевидно, что $\Delta(M)$ состоит из радикальных весов.

Лемма 17. *Предположим, что либо $\omega \in \Omega$, либо $\lambda_0 = \omega_1 + \omega_n$ и $\lambda_j = \omega_n$ при $j > 1$. Тогда $c(\delta) < 2^{k+3}$ при $\delta \in \Delta(M)$. Если все $\lambda_j = \omega_1$, то $c(\delta) < 2^{k+2}$.*

Доказательство. Вес $\delta = \sum\limits_{j=0}^{k} 2^j \delta_j$, где $\delta_j \in \Delta(L(\lambda_j))$. Очевидно, что $c(\delta) = \sum\limits_{j=0}^{k} 2^j c(\delta_j)$. Легко видеть, что $c(\delta_j) \leq 6$, если $\lambda_j = \omega_1 + \omega_n$,

$c(\delta_j) \leq 4$, если $\lambda_j \in \Omega_2$, и $c(\delta_j) \leq 2$, если $\lambda_j = \omega_1$. Отсюда следует лемма. □

Следствие 3. *Пусть вес ω такой, как в лемме 17, и $\mu \in \Lambda(G)$ – ненулевой доминантный радикальный вес. Тогда $2^{k+2}\mu \notin \Delta(M)$. Если все $\lambda_j = \omega_1$, то вес $2^{k+1}\mu \notin \Delta(M)$.*

Доказательство. Поскольку вес μ доминантный, $c_1(\mu) \geq c_2(\mu) \geq \ldots \geq c_n(\mu) \geq 0$. Известно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i(\mu)$ четна для радикального веса μ. Следовательно, $c(\mu) \geq 2$. Остается применить лемму 17. □

Предложение 5. *Пусть $\omega \in \Omega'$, вес $\omega_1 + \omega_n$ встречается в последовательности $S(\omega)$ ровно l раз и при $0 \leq i < k$*

$$(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \notin \{(\omega_n, \omega_1), (\omega_1 + \omega_n, \omega_1), (\omega_n, \omega_1 + \omega_n), (\omega_1 + \omega_n, \omega_1 + \omega_n)\}.$$

Тогда $\operatorname{wdeg} M = 2^l$.

Доказательство. При $l = 0$ наше утверждение следует из [5, предложение 2]. Пусть $l > 0$. Можно считать, что $\lambda_0 \neq 0$. Используем индукцию по k. При $k = 0$ предложение справедливо ввиду предложения 4. Пусть $k > 0$.

1. Сначала предположим, что $\lambda_0 \neq \omega_1 + \omega_n$. Фиксируем минимальный индекс i, для которого $\lambda_i = \omega_1 + \omega_n$. Из условий предложения следует, что либо $\lambda_s = 0$ для некоторого s, $0 < s < i$, либо $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{i-1} = \omega_1$. Положим $j = s - 1$ в первом случае и $j = i - 1$ во втором (при этом не важно, что в первом случае j, вообще говоря, определяется неоднозначно). Пусть

$$N_1 = L(\lambda_0 + \cdots + 2^j\lambda_j), \quad N_2 = L(2^q\lambda_q + \cdots + 2^k\lambda_k),$$

где $q = j + 2$ в первом случае и $q = j + 1$ во втором.

2. Теперь пусть $\lambda_0 = \omega_1 + \omega_n$. Тогда из условий предложения вытекает, что либо $\lambda_i = \omega_n$ для всех $0 < i \leq k$, либо некоторый вес $\lambda_i = 0$. В первом случае предложение справедливо согласно лемме 16. Во втором фиксируем минимальный индекс i, для которого $\lambda_i = 0$, и положим $j = i - 1$. Определим N_1 и N_2, как выше, полагая $q = j + 2$. Напомним, что $i < k$ по определению последовательности $S(\omega)$.

Из формулы (3) вытекает, что $M \cong N_1 \otimes N_2$ во всех ситуациях, когда определены модули N_1 и N_2. Мы утверждаем, что каждый вес

$\mu \in \Lambda(M)$ однозначно представляется в виде $\mu = \gamma + \delta$, где $\gamma \in \Lambda(N_1)$ и $\delta \in \Lambda(N_2)$. Предположим противное. Тогда $\gamma_1 + \delta_1 = \gamma_2 + \delta_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda(N_1)$ и $\delta_1, \delta_2 \in \Lambda(N_2)$ с $\delta_1 \neq \delta_2$. Положим $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ и $\delta = \delta_2 - \delta_1$. Тогда $\gamma = \delta$, $\gamma \in \Delta(N_1)$ и $\delta \in \Delta(N_2)$. Действуя группой $W(G)$, можно считать, что веса γ и δ доминантны. Из выбора модулей N_1 и N_2 вытекает, что $\delta = 2^{j+2}\delta'$ или $\lambda_0 = \ldots = \lambda_j = \omega_1$ и $\delta = 2^{j+1}\delta'$, где δ' – ненулевой доминантный радикальный вес. Приходим к противоречию ввиду следствия 3. Однозначность установлена. Поэтому $\operatorname{wdeg} M = \operatorname{wdeg} N_1 \operatorname{wdeg} N_2$ в силу леммы 2. Ввиду [5, предложение 2] и леммы 16, $\operatorname{wdeg} N_1 = 1$, если $\lambda_0 \neq \omega_1 + \omega_n$, и $\operatorname{wdeg} N_1 = 2$ в противном случае. Из предположения индукции вытекает, что $\operatorname{wdeg} N_2$ равно 2^l в первом случае и 2^{l-1} во втором. Предложение доказано. □

Заметим, что следствие 2 и предложение 5 справедливы для всех $n \geq 2$.

Теорема 2 вытекает из предложений 4 и 5 и следствий 1 и 2.

Литература

1. А. А. Баранов, А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко, *Модулярные представления классических групп с малыми кратностями весов.* — Современная математика и ее приложения (алгебра), Ин-т Кибернетики АН Грузии, Тбилиси **60** (2008), 163–175.
2. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — В кн. Семинар по алгебраическим группам, Мир, М. (1973), 9–59.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI, Мир, М. (1972).
4. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. VII–VIII , Мир, М. (1978).
5. А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко, *Представления размерности* $(p^n \pm 1)$ *симплектической группы степени* $2n$ *над конечным полем.* — Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, No. 6 (1987), 9–15.
6. А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко, *Представления алгебраических групп типа* D_n *в характеристике 2 с малыми кратностями весов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 182–195.
7. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1975).
8. A. A. Baranov, I. D. Suprunenko, *Branching rules for modular fundamental representations of symplectic groups.* — Bull. London Math. Soc. **32** (2000), 409–420.
9. G. Hogeweij, *Almost-classical Lie algebras. I.* — Proc. Kon. Nederl. Acad. Wetensch. A **85** (1982), 441–452.
10. J. C. Jantzen, *Darstellungen halbeinfacher algebraicher Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen.* — Bonner math. Schr. **67** (1973).
11. J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, 2nd ed. Providence, AMS, 2003.
12. G. M. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups.* — Memoirs of the Amer. Math. Soc. **67**, No. 365 (1987).

13. S. Smith, *Irreducible modules and parabolic subgroups.* — J. Algebra **75** (1982), 286–289.
14. R. Steinberg, *Representations of algebraic groups.* – Nagoya Math. J. **22** (1963), 33–56.
15. I. D. Suprunenko, *The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic.* — Memoirs of the Amer. Math. Soc. **200**, No. 939 (2009).

Osinovskaya A. A., Suprunenko I. D. Representations of algebraic groups of type C_n with small weight multiplicities.

We find lower estimates for the maximal weight multiplicities in irreducible representations of algebraic groups of type C_n in characteristic $p \leq 7$. If $n \geq 8$ and $p \neq 2$, then for an irreducible representation such multiplicity is either at least $n - 4 - [n]_4$, where $[n]_4$ is the residue of n modulo 4, or all weight multiplicities are equal to 1. For $p = 2$ the situation is more complicated and for every n and l there exists a class of representations with the maximal weight multiplicity equal to 2^l. For symplectic groups in characteristic $p > 7$ and spinor groups similar results were obtained earlier.

Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова 11,
220072 Минск, Беларусь

E-mail: anna@im.bas-net.by,
suprunenko@im.bas-net.by

Поступило 8 апреля 2010 г.