Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

**В. А. Койбаев, А. В. Шилов**

# О ПОДГРУППАХ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИХ НЕРАСЩЕПИМЫЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР

## §1. Введение

Настоящая статья продолжает работы З. И. Боревича и первого автора и посвящена исследованию структуры подгрупп полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,k)$ степени $n$ над полем $k$, содержащих нерасщепимый максимальный тор, связанный с радикальным расширением степени $n$ основного поля $k$.

К настоящему времени полное описание надгрупп нерасщепимого тора получено лишь для конечных или локальных полей. Для конечных полей это работы У. Кантора, Г. Зейтца и Р. Дая [10, 12, 13, 7–9], в которых получены окончательные результаты для полей (характеристики, не равной 2 и 3), содержащих не менее 13 элементов. Отметим, что в работах Г. Зейтца получено описание подгрупп конечных групп Шевалле, содержащих произвольный максимальный тор. Важные результаты о надгруппах нерасщепимого тора для локальных и глобальных полей получены В. П. Платоновым [11]. В случае поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ надгруппы максимального тора замкнуты в вещественной топологии и, в частности, имеется только конечное число промежуточных подгрупп [6, 11].

В отличие от конечных полей, в случае бесконечных полей структура надгрупп нерасщепимого тора значительно сложнее и исследована подробно лишь для полной линейной группы $\mathrm{GL}(2,k)$ ([2, 3, 5]).

В виду сложности решения задачи описания подгрупп указанного класса, естественным первым шагом было бы рассмотрение надгрупп нерасщепимого тора, содержащих одномерное преобразование. С другой стороны, в работе [4] показано, что для радикального расширения поля $k$ всякая такая подгруппа в полной линейной группе содержит элементарные трансвекции во всех позициях.

---

*Ключевые слова*: надгруппы, промежуточные подгруппы, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция.

Настоящая статья посвящена исследованию структуры подгрупп полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n,k)$, содержащих нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, соответствующий радикальному расширению $K = k(\sqrt[n]{d})$ степени $n$ поля $k$ нечетной характеристики, содержащих трансвекцию.

Сформулируем основной результат работы. Элементы матриц тора $T = T(d)$ порождают некоторое подкольцо $R(d)$ поля $k$. Пусть $R$ – промежуточное подкольцо, $R(d) \subseteq R \subseteq k$, $d \in R$. Через $\sigma_R$ обозначим сеть, у которой на главной диагонали и выше стоит идеал $dR$, а ниже диагонали – $R$, а через $\sigma^R$ – сеть, у которой на главной диагонали и ниже стоит $R$, а выше – $dR$. Пусть, далее, $E(\sigma_R)$ – подгруппа, порожденная всеми трансвекциями из сетевой группы $G(\sigma_R)$.

**Теорема 1.** *Пусть $H$ – подгруппа полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n,k)$, содержащая нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$. Предположим, что сеть $\sigma$, ассоциированная с подгруппой $H$, совпадает с сетью $\sigma_R$. Тогда $TE(\sigma_R)$ – группа и справедливы включения*

$$TE(\sigma_R) \leq (H) \leq N(\sigma_R),$$

*где $N(\sigma_R) = N_G(E(\sigma_R))$ – нормализатор элементарной подгруппы $E(\sigma_R)$ в группе $G = \mathrm{GL}(n,k)$. Для нормализатора $N(\sigma_R)$ справедливо равенство*

$$N(\sigma_R) = TG(\sigma^R).$$

В работе приняты следующие обозначения:

$e$ – единичная матрица порядка $n$;

$e_{ij}$ – матрица, у которой на позиции $(i,j)$ стоит $1 \in k$, а на остальных местах нули;

$t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ – элементарная трансвекция $\xi \in k^*$, $i \neq j$;

трансвекция – это матрица вида $(\delta_{ij} + \alpha_i\beta_j)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = 0$ ($\delta_{ij}$ – символ Кронекера);

$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ – коммутатор элементов $x, y$ (соответственно, $[X,Y]$ – коммутант);

через $(S)_{ij}$ обозначается элемент $s_{ij}$ матрицы $S = (s_{ij})$, в позиции $(i,j)$; $s'_{ij}$ – элементы обратной матрицы $S^{-1} = (s'_{ij})$;

с каждым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ связана невырожденная матрица $C(x)$, элементы которой вычисляются по формулам

$$(C(x))_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geq i+1. \end{cases}$$

С каждой матрицей $C = C(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица

$$C^{-1} = C(y) = (c'_{ij}), \qquad y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n,$$

где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем $C_{1i}$ – алгебраическое дополнение элемента $c_{1i}$ матрицы $C = C(x)$;

В работе рассматривается унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля $k$, порожденное элементами $x_i y_j, dx_r y_s$

$$R_0 = R(d) = \left\langle x_i y_j, dx_r y_s : i + j \leq n + 1, r + s > n + 1, \quad x \in k^n \setminus \bar{0} \right\rangle.$$

На протяжении всей статьи $R$ – промежуточное подкольцо, $R_0 \subseteq R \subseteq k$ такое, что $d \in R$.

## §2. Сетевая группа, ассоциированная с тором

Пусть $x^n - d$ – неприводимый многочлен степени $n$ над полем $k$, $d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}, 1 \leq i \leq n$, образует базис радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$, $\theta = \sqrt[n]{d}$, поля $K = k(\theta)$ над $k$. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в $G = \mathrm{GL}(n, k)$. В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{C(x) : x \in k^n \setminus \bar{0}\}.$$

Пусть $R$ – унитальное подкольцо поля $k$, содержащее кольцо $R_0 = R(\mu)$, $d \in R$. Пусть, далее, $A_1, \dots, A_n$ – идеалы кольца $R$, причем

$$A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_1.$$

Через $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_n)$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную следующим образом

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geq i + 1. \end{cases}$$

Далее, $G(\sigma)$ – сетевая группа [1]. Подгруппу $E(\sigma)$, порожденную всеми трансвекциями из $G(\sigma)$, мы называем элементарной сетевой подгруппой соответствующей тору $T$.

**Замечание 1.** Под элементарной сетевой подгруппой обычно подразумевают подгруппу, порожденную всеми элементарными трансвекциями из $G(\sigma)$, однако наше определение базируется на (леммах 2, 3 и) предложении 1.

**Лемма 1** ([4], предложение 2). *Справедливы следующие два утверждения:*

*(1) для любых $\alpha, \beta \in k^n \backslash \bar{0}$ найдется $x \in k^n \backslash \bar{0}$ так, что $C(x)\alpha = \beta$;*

*(2) пусть $\alpha \in k^n$ – произвольная строка (столбец), тогда для любого $i, 1 \leq i \leq n$, найдется $x \in k^n$ так, что $i$-я строка (столбец) матрицы $C(x)$ совпадает с $\alpha$.*

**Лемма 2** ([5], теорема 2.7.7). *Тор $T$ нормализует группы $G(\sigma)$ и $E(\sigma)$. Следовательно, $TG(\sigma)$ и $TE(\sigma)$ – промежуточные подгруппы, содержащие тор $T$.*

**Лемма 3.** *Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_i \beta_j)$ – трансвекция из $TG(\sigma)$. Тогда $\alpha_i \beta_j \in \sigma_{ij}$.*

**Доказательство.** Если матрица $b$ имеет вид матрицы $a$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \lambda_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то включение $\lambda_i \in A_i = \sigma_{i1}$ следует из леммы 2.7.6 [5]. Далее, согласно лемме 1, для некоторой матрицы $c \in T$ матрица $c^{-1}bc$ имеет вид (1), а потому $c^{-1}bc \in G(\sigma)$. Из леммы 2 тогда мы имеем включение $b \in G(\sigma)$.

**Предложение 1.** *Группа $TE(\sigma)$ порождается тором $T$ и корневыми подгруппами:*

$$TE(\sigma) = \langle T, t_{i1}(A_i) : 2 \leq i \leq n \rangle.$$

*Более точно, всякая трансвекция из $E(\sigma)$ имеет вид*

$$ct_{21}(\alpha_2)t_{31}(\alpha_3)\dots t_{n1}(\alpha_n)c^{-1}$$

*для некоторых $c \in T, \alpha_i \in A_i$.*

**Доказательство.** Пусть $b = (\delta_{ij} + \alpha_{ij}\beta_{ij})$ – трансвекция из $TE(\sigma)$. Согласно лемме 3 тогда $b \in E(\sigma)$. Далее, согласно лемме 1, для некоторой матрицы $c \in T$ матрица $c^{-1}bc$ имеет вид (1), с другой стороны по лемме 2 имеет $c^{-1}bc \in G(\sigma)$. Следовательно, матрица $c^{-1}bc \in G(\sigma)$ (а потому и матрица $b$) принадлежит правой части доказываемого равенства.

## §3. Сеть, ассоциированная с промежуточной подгруппой

С промежуточной подгруппой $H, T \le H \le G$, содержащей трансвекцию, связаны модули трансвекций ($i \neq j$)

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in k : t_{ij}(\alpha) \in H,\ i \neq j\}$$

и их кольца множителей

$$R_{ij} = R_{ij}(H) = R_{ij}(A_{ij}) = \{\lambda \in k : \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\}.$$

Очевидно, что $A_{ij}$ являются подгруппами аддитивной группы $k^+$ поля $k$ ($R_{ij}$–модули). Положим $A_i = A_{i1}, 2 \le i \le n$. Тогда ([5], лемма 2.7.1) справедлива формула

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \ge i+1. \end{cases}$$

Будем предполагать, далее, что все кольца $R_{ij}$ совпадают между собой и равны кольцу $R$, $A_i$ – целые идеалы кольца $R$, $d \in R, R \supseteq R_0$. Тогда ([5, 2.7.4])

$$A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_2.$$

Положим $A_1 = dA_n$ и рассмотрим сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, которую мы называем сетью, ассоциированной с подгруппой $H$.

Из предложения 1 вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Группа $TE(\sigma)$ содержится в группе $H$.*

**Лемма 4.** *Если матрица $a$ вида (1) содержится в группе $H$, то $\lambda_i A_2 \subseteq A_{i+1}$ для всех $i$, $2 \le i \le n-1$ и $d\lambda_n A_n \subseteq A_{n-1}$.*

**Доказательство.** Рассмотрим $i, 2 \le i \le n-1$. Первое включение следует из формулы

$$[a^{-1}, t_{i+1,i}(\alpha)] = t_{i+1,1}(\alpha\lambda_i),$$

если при этом заметить, что $\sigma_{i+1,i} = A_2, \sigma_{i+1,1} = A_{i+1}$. Для доказательства второго включения достаточно заметить, что $\sigma_{n-1,n} = dA_n, \sigma_{n-1,1} = A_{n-1}$ и воспользоваться формулой

$$[a^{-1}, t_{n-1,n}(\alpha)] = t_{n-1,1}(\alpha\lambda_n).$$

**Лемма 5.** *В условиях леммы* 4, *если* $A_2 = \ldots = A_n = A$, *то* $\lambda_i \in R$ *для всех* $i, 2 \leq i \leq n-1$ *и* $d\lambda_n \in R$. *Далее, если* $A = R$, *то* $\lambda_i \in R$ *для всех* $i, 2 \leq i \leq n$

**Доказательство.** Если $n = 2$, то $\lambda_2 \in A \in R$. Если же $n \geq 3$, то из леммы 4 следует, что $\lambda_i \in R$ для всех $i, 2 \leq i \leq n-1$. Далее, $d\lambda_n A \subseteq A$, откуда $d\lambda_n \in R$. Если при этом $A = R$, то по доказанному $t_{i1}(\lambda_i) \in H$ для $2 \leq i \leq n-1$. Умножая матрицу $a$ на $t_{i1}(-\lambda_i)$, мы получим матрицу $t_{n1}(\lambda_n) \in H$, откуда $\lambda_n \in R$.

## §3. Включение в нормализатор

В этом параграфе для сети $\sigma$, ассоциированной с промежуточной подгруппой $H$, мы предполагаем, что

$$A_2 = \cdots = A_n = A,$$

где $A$ – идеал кольца $R$, $R \supseteq R_0$. Соответствующую сеть мы обозначаем через $\sigma_A$, $\sigma_A = \sigma(A, A, \ldots A)$. Таким образом, у сети $\sigma_A$ на главной диагонали и выше стоит идеал $dA$, а ниже диагонали – идеал $A$

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} dA & dA & \ldots & dA \\ A & dA & \ldots & dA \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A & A & \ldots & dA \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для вычисления нормализатора мы рассматриваем сеть $\sigma^R$, у которой на главной диагонали и ниже стоит кольцо $R$, а выше главной диагонали – $dR$

$$\sigma^R = \begin{pmatrix} R & dR & \ldots & dR \\ R & R & \ldots & dR \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R & R & \ldots & R \end{pmatrix}, \tag{3}$$

**Предложение 3.** *Нормализатор* $N(\sigma_A)$ *подгруппы* $E(\sigma_A)$ *в полной линейной группе* $G = \mathrm{GL}(n, k)$ *содержит группу* $TG(\sigma^R)$:

$$N(\sigma_A) = N_G(E(\sigma_A)) \supseteq TG(\sigma^R).$$

**Доказательство.** В начале доказательства заметим, что по лемме 2 тор $T$ нормализует группу $E(\sigma_A)$, а потому $T \leq N(\sigma_A)$.

Пусть $b$ – произвольная трансвекция из $E(\sigma_A)$, $g = (g_{ij}) \in G(\sigma^R)$, $g^{-1} = (g'_{ij})$. Для доказательства включения $gbg^{-1} \in E(\sigma_A)$ в силу предложения 1 и последнего замечания, достаточно доказать, что $gt_{r1}(\alpha)g^{-1} \in E(\sigma_A)$ для любых $\alpha \in A, 2 \leq r \leq n$. Имеем $(gt_{r1}(\alpha)g^{-1})_{ij} = \delta_{ij} + g_{ir}\alpha g'_{1j}$. Если $i > j$, то $(\sigma_A)_{ij} = A$, а потому $g_{ir}\alpha g'_{1j} \in (\sigma_A)_{ij}$. Пусть $i \leq j$. Заметим, что $r \geq 2$. Если $i = 1$, то $g_{1r} \in dR$, а потому $g_{ir}\alpha g'_{1j} \in dA = (\sigma_A)_{ij}$. Если же $i \geq 2$, то так как $i \leq j$, мы имеем $j \geq 2$, а потому $g'_{ij} \in dR$, откуда снова $g_{ir}\alpha g'_{1j} \in (\sigma_A)_{ij} = dA$. Таким образом, $TG(\sigma^R) \leq N(\sigma_A)$.

Докажем обратное включение. Пусть $g = (g_{ij}) \in N(\sigma_A)$. Так как $T \leq N(\sigma_A)$, то в силу леммы 1 можно считать, что в первом столбце матрицы $g$ на первой позиции стоит 1, а на остальных местах - 0: $g_{i1} = \delta_{i1}, 1 \leq i \leq n$. Ясно тогда, что для матрицы $g^{-1}$ также $g'_{i1} = \delta_{i1}$.

Легко проверяется следующая лемма.

**Лемма 6.** *Пусть $g = (g_{ij}) \in N(\sigma_A)$, Причем $g_{i1} = \delta_{i1}, 1 \leq i \leq n$. Тогда $g_{ij} \in R$ для всех $i, j$, причем $g_{1j} \in dR$ для всех $j$, $2 \leq j \leq n$.*

Для $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ рассмотрим мономиальную матрицу $C_0 = C(e_2)$ из тора $T$, которая используется в следующей лемме.

**Лемма 7.** *Пусть $a = (a_{ij})$ – произвольная квадратная матрица порядка $n$. Пусть, далее, $1 \leq r < s \leq n-1$. Тогда*

$$(C_0^{n-s} a C_0^{s-n}))_{n+r-s,n} = a_{rs}.$$

**Доказательство.** Достаточно проверить, что элементы матрицы $C_0 a C_0^{-1}$ определяются следующим образом

$$(C_0 a C_0^{-1})_{ij} = a_{i-1,j-1}, (C_0 a C_0^{-1})_{11} = a_{nn},$$
$$(C_0 a C_0^{-1})_{1j} = d a_{n,j-1}, (C_0 a C_0^{-1})_{i1} = (1/d) a_{i-1,n}$$

для любых $2 \leq i, j \leq n$.

**Лемма 8.** *Пусть $g = (g_{ij}) \in GL(n, R), g^{-1} = (g'_{ij})$. Если $g \in N(\sigma_A)$, то $g_{in} \in dR$ для всех $i, 1 \leq i \leq n-1$.*

**Доказательство.** Зафиксируем $i, 1 \leq i \leq n-1$ и покажем, что произведение элемента $g_{in}$ на любой элемент последнего столбца матрицы

$g^{-1}$ содержится в идеале $dR$. Пусть $\alpha \in (\sigma_A)_{ni} = A$. Рассмотрим матрицу $g^{-1}t_{ni}(\alpha)g \in E(\sigma_A)$. Тогда для любого $r, 1 \le r \le n$

$$(g^{-1}t_{ni}(\alpha)g)_{rn} = g'_{rn}\alpha g_{in} + \delta_{rn}.$$

Напомним, что по определению $(\sigma_A)_{rn} = dA$. Следовательно, $g'_{rn}$ $g_{in}A \subseteq dA$, откуда $g'_{rn}g_{in} \in dR$ (напомним, что $R$ – кольцо множителей модуля $A$). Таким образом, произведение элемента $g_{in}$ на любой элемент последнего столбца матрицы $g^{-1}$ содержится в идеале $dR$.

Пусть $\Delta = \det(g^{-1}), \Delta \in R^*$. Напомним, что в каждом слагаемом определителя матрицы $g^{-1}$ содержится один из элементов последнего столбца. В силу доказанного тогда $g_{in}\Delta \in dR$, откуда $g_{in} \in dR$.

**Предложение 4.** *Нормализатор $N(\sigma_A)$ подгруппы $E(\sigma_A)$ в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, k)$ совпадает с группой $TG(\sigma^R)$:*

$$N(\sigma_A) = N_G(E(\sigma_A)) = TG(\sigma^R).$$

**Доказательство.** Согласно предложению 3 нужно показать включение $N(\sigma_A) \subseteq TG(\sigma^R)$. Пусть $g = (g_{ij}) \in N(\sigma_A)$. Так как $T \le N(\sigma_A)$, то в силу леммы 1 можно считать, что в первом столбце матрицы $g$ на первой позиции стоит 1, а на остальных местах – 0: $g_{i1} = \delta_{i1}, 1 \le i \le n$. Ясно тогда, что для матрицы $g^{-1}$ также $g'_{i1} = \delta_{i1}$. Применяя лемму 6 к матрицам $g$ и $g^{-1}$, мы получим $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, R)$. Пусть $1 \le r < s \le n$. С помощью леммы 7 элемент $g_{rs}$ "загоняется параллельно главной диагонали" в последний столбец, а тогда по лемме 8 $g_{rs} \in dR$, поэтому $g \in G(\sigma^R)$.

Теперь мы готовы доказать основной результат статьи.

**Доказательство теоремы 1.** По определению сети $\sigma$, ассоциированной с промежуточной подгруппой $H$, имеем $A_2 = \cdots = A_n = R$, $A_1 = dR$, следовательно, сеть $\sigma$ совпадает с сетью $\sigma_R$. Последняя часть теоремы следует из предложения 4. Далее, $TE(\sigma_R)$ – группа (см. лемму 2), включение $TE(\sigma_R) \le H$ вытекает из предложения 2. Докажем включение $H \le N(\sigma_R)$. Пусть $b \in E(\sigma_R)$ – произвольная трансвекция, $g \in H$. Покажем, что $a = gbg^{-1} \in E(\sigma_R)$. Ясно, что $a$ – трансвекция из $H$, следовательно, для некоторой матрицы $c \in T$ матрица $c^{-1}ac$ имеет вид (1), поэтому, согласно лемме 5, $c^{-1}ac \in E(\sigma_R)$. Тор $T$ нормализует группу $E(\sigma_R)$ (лемма 2), а потому $a \in E(\sigma_R)$.

В заключение докажем еще одно утверждение, которое носит структурный характер.

**Теорема 2.** *Пусть $d \in R^*$, $H$ – промежуточная подгруппа. Имеет место формула*

$$[[H, E(\sigma_A)], E(\sigma_A)] \leq E(\sigma_A).$$

**Доказательство.** Пусть $g \in H, \tau, \tau_1 \in E(\sigma_A)$. Покажем, что

$$[[g, \tau], \tau_1] \in E(\sigma_A). \tag{4}$$

Согласно предложению 3 имеем $G(\sigma_R) \subseteq N(\sigma_A)$, следовательно, для доказательства включения (4) достаточно показать, что $[g, \tau] \in G(\sigma_R)$, или

$$g\tau g^{-1} \in G(\sigma_R). \tag{5}$$

Так как группа $E(\sigma_A)$ порождается трансвекциями, то можно считать, что $\tau$ трансвекция. В этом случае (как не раз мы это делали) для некоторого $c \in T$ матрица $a = cg\tau g^{-1}c^{-1}$ имеет вид (1), а потому по лемме 5 (здесь используется условие $d \in R^*$) мы имеем включение $a \in G(\sigma_R)$. Далее, тор $T$ нормализует группу $G(\sigma_R)$ (лемма 2), поэтому $g\tau g^{-1} = c^{-1}ac \in G(\sigma_R)$. Отсюда следует справедливость включения (5).

## Литература


1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **64**, (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, В. А. Койбаев, *О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами, для квадратичных торов.* — Вестник СПбГУ **1**, № 2 (1993), 5–10.
3. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы* GL $(2, \mathbb{Q})$, *содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Докл. АН СССР **312**, № 1 (1990), 36–38.
4. В. А. Койбаев, *Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор.* — Алгебра и анализ **21** № 5, (2009), 70–86.
5. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы* $\mathrm{GL}(2, k)$, *содержащие нерасщепимый тор.* Итоги науки. Сер. матем. монография. Владикавказ. (2009).
6. D. Z. Djokovic, *Subgroups of compact Lie groups containing a maximal torus are closed.* — Proc. Amer. Math. Soc. **83**, № 2 (1981), 431–432.
7. R. H. Dye, *Maximal subgroups of symplectic groups stabilizing spreads.* I, II. — J. Algebra **87**, № 2 (1984), 493–509; J. London. Math. Soc. **40** (1989), №2, 215–226.
8. R. H. Dye, *Maximal subgroups of* $\mathrm{PS}p_{6n}(q)$ *stabilizing spreads of totally isotropic planes*, J. Algebra **99** (1986), 111–129.
9. R.H. Dye, *Spreads and classes of maximal subgroups of* $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{PGL}_n(q)$ *and* $\mathrm{PSL}_n(q)$. — Ann. Math. Pura Appl. **158** (1991), 33–50.

10. W. M. Kantor, *Linear groups containing a Singer cycle.* — J. Algebra, **62** (1980), № 1, 232–234.
11. V. P. Platonov, *Subgroups of algebraic groups over local or a global field containing a maximal torus.* — C.R. Acad. Sci. Paris **318**, № 10 (1994), 899–903.
12. G. M. Seitz, *Subgroups of finite groups of Lie type.* — J. Algebra **61**, № 1 (1979), 16–27.
13. G. M. Seitz, *Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type.* — Pacif. J. Math. **106**, № 1 (1983), 153–244.

Koibaev V. A., Shilov A. V. On subgroups of the general linear group containing a non-split maximal torus.

Let $G = \mathrm{GL}(n, k)$ be the general linear group of degree $n$ over a field $k$ of odd characteristic. We consider subgroups of $G$ containing a non-split maximal torus stemming from a radical extension of degree $n$ of the ground field $k$. We describe the structure of nets of ideals over a ring, related to intermediate subgroups containing a transvection.

Северо-Осетинский государственный
университет им. К.Л.Хетагурова
ул. Ватутина, 46
362025, Владикавказ, Россия

Поступило 17 ноября 2009 г.

Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 27,
362027, Владикавказ, Россия

*E-mail*: koibaev-K1@yandex.ru