Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. II. ЛОКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Введение

Настоящая работа является продолжением серии статей, в которых вычисляются когомологии Хохшильда для алгебр, имеющих небольшую когомологическую сложность (см. [1–11]). Общим для этих работ является то, что для тех или иных семейств алгебр строится бимодульная резольвента – решение этой задачи само по себе представляет большой интерес, – а затем с помощью подходящей техники, разработанной автором ранее для целей вычисления алгебры Йонеды (см., например, [12, 13]), когомологическая информация "считывается" с построенных резольвент. Несмотря на некоторую "множественность" уже имеющихся примеров построения бимодульных резольвент, отыскание очередной новой резольвенты остаётся своеобразным искусством, поскольку включает в себя элемент угадывания, хотя и основывается на некоторых эмпирических вычислениях.

Здесь мы с помощью подобных приёмов строим бимодульную резольвенту для одной из серий локальных алгебр диэдрального типа (из классификации К. Эрдман [14]). Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [14]). Затем эта резольвента используется для вычисления алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для рассматриваемых локальных алгебр в случае, когда основное алгебраически замкнутое поле K имеет характеристику, отличную от 2. В случае $\operatorname{char} K = 2$ алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана в [15] с использованием этой же бимодульной рельвенты, построенной в настоящей работе.

Ключевые слова: когомологии Хохшильда, алгебры диэдрального типа, локальные алгебры.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 10-01-00635.

1. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). *Алгебра когомологий Хохшильда* – это линейное пространство

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R),$$

снабжённое $\smile$-произведением [16, §5], 17, [Гл. XI], [18]. Алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ является градуированно коммутативной [18]; кроме того, $\smile$-произведение на $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с произведением Йонеды на Ext-алгебре $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ Λ-модуля R [19, стр. 120].

Для $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, определим K-алгебру $R_k = K\langle X, Y\rangle / I$, где I – идеал свободной алгебры $K\langle X, Y\rangle$, порождённый элементами

$$X^2,\ Y^2,\ (XY)^k - (YX)^k. \tag{1.1}$$

Образы элементов X, Y относительно канонического гомоморфизма из $K\langle X, Y\rangle$ в R_k обозначаем через x и y соответственно. Алгебра R_k – симметрическая локальная алгебра, имеющая ручной тип представления [14, III.1]; кроме того, в терминах [14, Глава VI] алгебра R_k – это алгебра диэдрального типа.

Далее до конца этого раздела мы предполагаем, что $\mathrm{char}\, K \neq 2$ (напомним, что в случае $\mathrm{char}\, K = 2$ алгебра $\mathrm{HH}^*(R_k)$ описана в [15]).

Для описания алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R_k)$ мы построим вспомогательные градуированные K-алгебры. Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \{p_1, p_2, p_2', u_1, u_1', v_1, v_2, v_2', v_3, w_1, w_2, w_2', t\}. \tag{1.2}$$

На алгебре $K\langle \mathcal{X}_1\rangle$ введём градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_2' = 0, \quad \deg u_1 = \deg u_1' = 1, \tag{1.3}$$

$$\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_2' = \deg v_3 = 2, \tag{1.4}$$

$$\deg w_1 = \deg w_2 = \deg w_2' = 3, \quad \deg t = 4. \tag{1.5}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1 = K\langle \mathcal{X}_1\rangle / I_1$, где идеал I_1 порождён следующими элементами:

– степени 0:

$$p_1^{k+1},\ p_2^2,\ (p_2')^2,\ p_1p_2,\ p_1p_2',\ p_2p_2'; \tag{1.6}$$

– степени 1:

$$p_1^k u_1,\ p_2u_1,\ p_2'u_1',\ p_1u_1 - p_1u_1'; \tag{1.7}$$

– степени 2:

$$p_1^{k-1}v_1,\ p_2v_1,\ p_2'v_1,\ p_1v_2,\ p_2v_2,\ p_1v_2',\ p_2'v_2', \tag{1.8}$$

$$p_1v_3, p_2v_3, p_2'v_3, \tag{1.9}$$

$$u_1u_1'; \tag{1.10}$$

– степени 3:

$$\left.\begin{array}{l} p_1^k w_1,\ p_2w_1,\ p_2'w_1, \\ p_1w_2,\ p_2w_2,\ p_2'w_2, \\ p_1w_2',\ p_2w_2',\ p_2'w_2', \end{array}\right\} \tag{1.11}$$

$$u_1'v_1 - u_1v_1, \tag{1.12}$$

$$u_1v_1 + p_1w_1,\ u_1v_2',\ u_1'v_2,\ u_1v_3,\ u_1'v_3; \tag{1.13}$$

– степени 4:

$$v_1^2 + p_1^2t,\ p_2t,\ p_2't, \tag{1.14}$$

$$v_2v_3 - u_1w_2,\ v_2'v_3 - u_1'w_2', \tag{1.15}$$

$$v_1v_2,\ v_1v_2',\ v_2v_2', \tag{1.16}$$

$$v_1v_3,\ v_3^2\ u_1w_1,\ u_1'w_1,\ u_1w_2',\ u_1'w_2; \tag{1.17}$$

– степени 5:

$$v_1w_1 - p_1u_1t,\ v_1w_2,\ v_1w_2', \tag{1.18}$$

$$v_2w_1,\ v_2'w_1,\ v_2w_2',\ v_2'w_2, \tag{1.19}$$

$$v_3w_1,\ v_3w_2,\ v_3w_2'; \tag{1.20}$$

– степени 6:

$$w_1w_2,\ w_1w_2',\ w_2w_2', \tag{1.21}$$

а также элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b}ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_1. \tag{1.22}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K\langle\mathcal{X}_1\rangle$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \setminus \{v_3, w_1, w_2, w_2'\},$$

где $\mathcal{X}_1$ из (1.2). На алгебре $K\langle\mathcal{X}_2\rangle$ вводится градуировка, полученная ограничением градуировки на $K\langle\mathcal{X}_1\rangle$ (см. соотношения (1.3)–(1.5)). Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2 = K\langle\mathcal{X}_2\rangle/I_2$, где идеал I_2 порождён образующими идеала I_1 из (1.6), (1.7), (1.8), (1.12), (1.14), (1.16), а также элементом

$$p_1^k t \tag{1.23}$$

и элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_2. \tag{1.24}$$

Теорема 1.1. *Пусть $p = \operatorname{char} K \neq 2$, и пусть $R = R_k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

(1) *Если p делит k, то алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}_1$.*

(2) *Если p не делит k, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ как градуированные K-алгебры.*

В процессе доказательства теоремы 1.1 мы вычисляем также размерности групп $\mathrm{HH}^n(R_k)$. Соответствующие результаты представляют самостоятельный интерес, и мы их объединим в следующем утверждении.

Предложение 1.2. *Пусть $p \neq 2$, и пусть $R = R_k$. Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} k+3, & \text{если } n = 0, \\ k+3+4\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ и } p \mid k, \\ k+2+4\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4),\ n > 0 \text{ и } p \nmid k, \\ k+3+4\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4), \\ k+4+4\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4), \\ k+6+4\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ и } p \mid k, \\ k+5+4\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ и } p \nmid k. \end{cases}$$

2. Резольвента

Пусть $R = R_k$ – K-алгебра, определенная в разделе 1, где K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики. Алгебра R допускает в качестве K-базиса множество

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_R = \{(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{(yx)^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}\\ \cup \{x(yx)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{y(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\end{aligned}$$

состоящее из всех ненулевых путей колчана алгебры R (он состоит из одной вершины и двух петель x и y). Назовём $\mathcal{B}_R$ *стандартным* базисом алгебры R. В свою очередь обёртывающая алгебра Λ алгебры R допускает K-базис, состоящий из элементов вида

$$u \otimes v, \quad \text{где} \quad u, v \in \mathcal{B}_R. \tag{2.1}$$

Введём на Λ следующую градуировку: для элемента вида (2.1) его *степень* – это сумма длин путей u и v, и тогда $\Lambda = \sum_{n \geqslant 0} \Lambda_n$, где Λ_n – K-подпространство, порождённое элементами вида (2.1) степени n.

Умножение справа на элемент $\lambda \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм λ^* левого Λ-модуля Λ; ради простоты мы будем часто этот эндоморфизм обозначать также через λ.

Рассмотрим следующие элементы алгебры $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$:

$$X^- = x \otimes 1 - 1 \otimes x, \quad X^+ = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \tag{2.2}$$

$$Y^- = y \otimes 1 - 1 \otimes y, \quad Y^+ = y \otimes 1 + 1 \otimes y, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\zeta^- &= \sum_{i=0}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},\\
\zeta^+ &= \sum_{i=0}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},\\
\eta^- &= \sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i},\\
\eta^+ &= \sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^- &= y(xy)^{k-1} \otimes 1 - 1 \otimes y(xy)^{k-1},\\
\rho^+ &= y(xy)^{k-1} \otimes 1 + 1 \otimes y(xy)^{k-1},\\
\omega^- &= x(yx)^{k-1} \otimes 1 - 1 \otimes x(yx)^{k-1},\\
\omega^+ &= x(yx)^{k-1} \otimes 1 + 1 \otimes x(yx)^{k-1}.
\end{aligned}$$

В категории (левых) Λ-модулей построим следующий бикомплекс $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (ненулевые строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$):

$$\mathcal{B}_{\bullet\bullet}:\quad
\begin{tikzcd}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\Lambda^2 \arrow[u, "D^-"] & \Lambda^2 \arrow[l, "\sigma^-"'] \arrow[u, "D^-"] & \Lambda^2 \arrow[l, "\sigma^+"'] \arrow[u, "D^-"] & \Lambda^2 \arrow[l, "\sigma^-"'] \arrow[u, "D^-"] & \cdots \arrow[l, "\tau^+"'] \\
\Lambda^2 \arrow[u, "D^+"] & \Lambda^2 \arrow[l, "-\sigma^-"'] \arrow[u, "D^+"] & \Lambda^2 \arrow[l, "-\sigma^+"'] \arrow[u, "D^+"] & \Lambda \arrow[l, "-\tau^-"'] \arrow[u, "(X^+\ Y^+)"] & \\
\Lambda^2 \arrow[u, "D^-"] & \Lambda^2 \arrow[l, "\sigma^-"'] \arrow[u, "D^-"] & \Lambda \arrow[l, "\tau^+"'] \arrow[u, "(X^-\ Y^-)"] & & \\
\Lambda^2 \arrow[u, "D^+"] & \Lambda \arrow[l, "-\tau^-"'] \arrow[u, "(X^+\ Y^+)"] & & & \\
\Lambda \arrow[u, "(X^-\ Y^-)"] & & & &
\end{tikzcd}
\tag{2.4}$$

где

$$D^- = \begin{pmatrix} X^- & 0 \\ 0 & Y^- \end{pmatrix}, \quad D^+ = \begin{pmatrix} X^+ & 0 \\ 0 & Y^+ \end{pmatrix}, \quad \tau^- = \begin{pmatrix} \zeta^- \\ -\eta^- \end{pmatrix},$$
$$\tau^+ = \begin{pmatrix} \zeta^+ \\ -\eta^+ \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} \rho^- & 0 \\ 0 & -\omega^- \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} \rho^+ & 0 \\ 0 & -\omega^+ \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1. *Тотализация $Q_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ бикомплекса (2.4) представляет собой минимальную проективную резольвенту Λ-модуля R.*

Замечание 2.2. Непосредственная проверка показывает, что диаграмма (2.4) действительно представляет собой бикомплекс, т.е. её

строки и столбцы являются дифференциальными последовательностями, а все квадраты антикоммутативны.

Замечание 2.3. В качестве пополняющего отображения $\mu\colon Q_0 = \Lambda \to R$, мы берём каноническое отображение, индуцированное умножением в R: $\mu(r \otimes s) = rs$. Точность соответствующей последовательности в члене Q_0, т.е. то, что $\operatorname{Im} d_0^Q = \operatorname{Ker} \mu$, – это хорошо известный факт.

Из-за сходства определяющих соотношений алгебр R_k (см. (1.1)) с определяющими соотношениями локальных алгебр полудиэдрального типа, исследованных в [10] (соотношение $x^2 = 0$ заменяется на соотношение $x^2 = y(xy)^{k-1}$), значительная часть вычислений, приведённых в доказательстве теоремы 2.1 из [10], переносится с небольшими изменениями на случай алгебр R_k. Поэтому мы здесь приведём краткую схему доказательства теоремы 2.1, подробнее останавливаясь лишь на более заметных отличиях.

Мы будем использовать несколько вспомогательных утверждений.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2.4 из [10].

Лемма 2.4. *Пусть $X^{\pm}\colon \Lambda \to \Lambda$ и $Y^{\pm}\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизмы умножения (справа) на соответствующие элементы (см. (2.2), (2.3)). Тогда*

$$\operatorname{Ker} Y^- = \operatorname{Im} Y^+, \quad \operatorname{Ker} Y^+ = \operatorname{Im} Y^-,$$
$$\operatorname{Ker} Y^- = \operatorname{Im} Y^+, \quad \operatorname{Ker} Y^+ = \operatorname{Im} Y^-.$$

Лемма 2.5. $\operatorname{Ker} d_0^Q \subset \operatorname{Im} d_1^Q$.

Доказательство. Пусть $s = (q, \widetilde{q}) \in \operatorname{Ker} d_0 \subset Q_1 = \Lambda^2$, т.е.

$$q \cdot (x \otimes 1 - 1 \otimes x) + \widetilde{q} \cdot (y \otimes 1 - 1 \otimes y) = 0.$$

Пусть $q^{(t)}$ и $\widetilde{q}^{(t)}$ – однородные компоненты степени t ($0 \leqslant t \leqslant 4k$) в q и $\widetilde{q}$ соответственно. Ясно, что $q^{(0)} = 0 = \widetilde{q}^{(0)}$. Далее фиксируем t такое, что однородные компоненты в q и $\widetilde{q}$ степени i равны нулю для всех $i < t$. Доказательство леммы разбивается аналогично [4, лемма 2.4] на несколько шагов в зависимости от значения t. Через h_i, $i = 1, 2, 3$, обозначим столбцы матрицы дифференциала d_1:

$$d_1 = \begin{pmatrix} -\zeta^- & X^+ & 0 \\ \eta^- & 0 & Y^+ \end{pmatrix}.$$

Как и в [4], мы будем последовательно изменять s, прибавляя к нему элементы из $\operatorname{Im} d_1 = {}_\Lambda\langle h_1, h_2, h_3\rangle$ так, чтобы получить элемент, у которого все однородные компоненты степеней $i \leqslant t$ были равны нулю. После конечного числа шагов мы придем к нулевому элементу, что и завершит доказательство включения $\operatorname{Ker} d_0 \subset \operatorname{Im} d_1$.

Шаг 1. Если $t \leqslant 2k-2$, то соответствующие рассуждения из [4, лемма 2.4] (см. Шаги 1 и 2) переносятся в нашу ситуацию без изменений.

Шаг 2. Если $t = 2k-1$, то аналогично Шагу 3 доказательства в [4, лемма 2.4] проводится редукция к элементу, для которого

$$u := \begin{pmatrix} q^{(t)} \\ \widetilde{q}^{(t)} \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} -\zeta^- \\ \eta^- \end{pmatrix},$$

где $\beta \in K$. Таким образом, переходя от s к $s-u$, можем считать, что уже в s имеем $q^{(t)} = 0 = \widetilde{q}^{(t)}$.

Шаг 3. Рассмотрим теперь случай, когда $t = 2\ell$ для $k \leqslant \ell \leqslant 2k-1$. Положим $\overline{\ell} := \ell - k$. Если $\overline{\ell} > 0$, то аналогично Шагу 4 доказательства в [4, лемма 2.4] исходный элемент редуцируется в элемент s, для которого

$$\begin{aligned} u &:= \begin{pmatrix} q^{(t)} \\ \widetilde{q}^{(t)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}}^{k} (xy)^i \otimes (yx)^{\ell-i} + \widetilde{\beta} \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}}^{k-1} y(xy)^i \otimes y(xy)^{\ell-1-i} \\ \widetilde{\beta} \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}}^{k} (yx)^i \otimes (xy)^{\ell-i} + \beta \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}}^{k-1} x(yx)^i \otimes x(yx)^{\ell-1-i} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\beta, \widetilde{\beta} \in K$. Непосредственно проверяется, что

$$u = (\beta(xy)^{\overline{\ell}} \otimes x - \widetilde{\beta}(yx)^{\overline{\ell}} \otimes y) \cdot h_1 \in \operatorname{Im} d_1.$$

Для $\overline{\ell} = k$ аналогичная редукция приводит к элементу, для которого u из (2.5) имеет несколько иной вид, но и в этом случае

$$u = (-\beta x \otimes 1 + \widetilde{\beta} y \otimes 1) \cdot h_1 \in \operatorname{Im} d_1.$$

Вновь переходя от s к $s-u$, можем считать, что уже в s имеем $q^{(t)} = 0 = \widetilde{q}^{(t)}$.

Шаг 4. Пусть $t = 2\ell + 1$, где $k \leqslant \ell \leqslant 4k - 2$, и пусть $\overline{\ell} := \ell - k$. Аналогично Шагу 5 доказательства леммы 2.4 в [5] проводим редукцию к такому элементу $s \in \operatorname{Ker} d_0$, для которого

$$u := \begin{pmatrix} q^{(t)} \\ \widetilde{q}^{(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}+1}^{k} (xy)^i \otimes y(xy)^{\ell-i} + \widetilde{\beta} \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{\ell-i} \\ \widetilde{\beta} \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}+1}^{k} (yx)^i \otimes x(yx)^{\ell-i} + \beta \cdot \sum\limits_{i=\overline{\ell}}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{\ell-i} \end{pmatrix}.$$

Остаётся заметить, что

$$u = (\widetilde{\beta}(yx)^{\overline{\ell}} y \otimes x - \beta(xy)^{\overline{\ell}} x \otimes y) \cdot h_1 \in \operatorname{Im} d_1.$$

Шаг 5. Наконец, для $t \in \{4k-1, 4k\}$ рассуждения, подобные предыдущим, лишь значительно упрощаются (ср. Шаги 6 и 7 в [4, лемма 2.4]) из-за малого числа слагаемых в $q^{(t)}$ и $\widetilde{q}^{(t)}$, а соответствующие редукции вновь приводят к требуемому утверждению.

Лемма 2.6. (a) $\operatorname{Ker}\,(\zeta^+ X^+)^* \subset \operatorname{Im}\,(X^-)^* + \operatorname{Im}\,(Y^-)^*$.

(b) $\operatorname{Ker}\,(\zeta^- X^-)^* \subset \operatorname{Im}\,(X^+)^* + \operatorname{Im}\,(Y^+)^*$.

Доказательство. Доказательство части (a) этой леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 2.7 в [10]; отметим лишь, что при этом надо сделать переобозначения $x := y, y := x$. Часть (b) следует из части (a), если использовать автоморфизм алгебры Λ такой, что

$$x \otimes 1 \mapsto x \otimes 1, \quad y \otimes 1 \mapsto y \otimes 1, \quad 1 \otimes x \mapsto -1 \otimes x, \quad 1 \otimes y \mapsto -1 \otimes y.$$

Окончание доказательства теоремы 2.1. Мы рассмотрим спектральную последовательность бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ из (2.4)

$$\mathrm{H}_p^h \mathrm{H}_q^v(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_{p+q}(\operatorname{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}))$$

и докажем, что её второй лист вырождается.

Ввиду леммы 2.4 на первом листе этой спектральной последовательности каждая строка с номером $i > 0$ содержит два ненулевых члена, а именно,

$$\operatorname{Coker}\,(X^+, Y^+) \xrightarrow{\overline{-\tau^-}} \operatorname{Ker}\,(X^-, Y^-)/\operatorname{Im} D^+$$

для нечётного i и

$$\mathrm{Coker}\,(X^-, Y^-) \xrightarrow{\overline{\tau^+}} \mathrm{Ker}\,(X^+, Y^+)/\mathrm{Im}\,D^-$$

для i чётного; здесь $-\overline{\tau^-}$ и $\overline{\tau^+}$ обозначают гомоморфизмы, индуцированные соответственно гомоморфизмами $-\tau^-$ и τ^+. Докажем, что эти индуцированные гомоморфизмы являются изоморфизмами.

(a) $-\overline{\tau^-}$ – мономорфизм. Действительно, пусть $q \mod \mathrm{Im}\,(X^+, Y^+) \in \mathrm{Ker}\,(-\overline{\tau^-})$, т.е. $-q\zeta^- = q_1 X^+$ и $q\eta^- = q_2 Y^+$ для некоторых $q_1, q_2 \in \Lambda$. Тогда $q\zeta^- X^- = 0$, а из леммы 2.6 следует, что $q \in \mathrm{Im}\,(X^+, Y^+)$.

(b) $-\overline{\tau^-}$ – эпиморфизм. Пусть $(q_1, q_2) \in \mathrm{Ker}\,(X^-, Y^-)$. По лемме 2.5 существуют $q', q'', q''' \in \Lambda$ такие, что

$$\begin{cases} q_1 = -q'\zeta^- + q''X^+, \\ q_2 = q'\eta^- + q'''Y^+. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$(-\overline{\tau^-})\left(q' \mod \mathrm{Im}\,(X^+, Y^+)\right) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mod \mathrm{Im}\,D^+.$$

Аналогично доказывается, что $\overline{\tau^+}$ – изоморфизм.

Наконец, в строке с номером ноль на первом листе рассматриваемой спектральной последовательности имеем единственный ненулевой член $\mathrm{Coker}\,(X^-, Y^-) \simeq R$. Таким образом, доказано, что $\mu\colon Q_\bullet \longrightarrow R$ – Λ-проективная резольвента, а её минимальность следует непосредственно из её строения. □

Замечание 2.7. Пусть $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} R$ – минимальная Λ-проективная резольвента алгебры R, построенная в теореме 2.1. В дальнейшем мы всегда будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении m-го члена этой резольвенты $Q_m = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$ по возрастанию второго индекса j. Соответствующее разложение модуля Q_m будем называть стандартным.

Рассмотрим бикомплекс $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых столбцов в бикомплексе $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ с номерами 0 и 1 (а остальные столбцы в $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$.

Предложение 2.8. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0,$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Пусть $i_n\colon X_n \to Q_n$ – вложение в качестве прямого слагаемого, а $\pi_n\colon Q_n \to Q_{n-4}$ – проекция на соответствующее прямое слагаемое ($n \geqslant 4$) . Тогда утверждение предложения вытекает непосредственно из строения бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$. □

3. Аддитивная структура алгебры когомологий

Пусть $R = R_k$ ($k \geqslant 2$). В случае, когда $p := \operatorname{char} K = 2$, алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана в [15]. Поэтому, если не оговорено иное, мы в дальнейшем предполагаем, что $p \neq 2$.

Пусть $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} R$ – минимальная Λ-проективная резольвента алгебры R из раздела 2. Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ мы используем комплекс

$$\Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n, R)\Big)_{n\geqslant 0}.$$

Так как для любого $n \geqslant 0$ модуль Q_n – свободный Λ-модуль ранга $n+1$, то любой элемент из $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ отождествляется с набором его значений $f(e^{(i)}) \in R$ на элементах канонического базиса модуля Q_n (т.е. i-я координата в $e^{(i)}$ равна $1 \otimes 1$, а остальные равны нулю). В дальнейшем, когда в таком наборе значений f встречается подпоследовательность, состоящая из нулей, скажем, из r штук, то мы такую подпоследовательность обозначаем через O_r. Аналогично нулевую $r \times s$-матрицу обозначаем через $\mathrm{O}_{r,s}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с этим отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)\colon \mathrm{Hom}(\Lambda, R) \simeq R \to \mathrm{Hom}(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

Тогда дифференциал $\delta^0\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R)$ описывается так: для $r \in R$

$$\delta^0(r) = (Y^- * r, X^- * r) = (yr - ry, xr - rx).$$

Следующее утверждение получено в [15] (для поля K произвольной характеристики) (ср. также [III. 14]).

Предложение 3.1. (a) *Пространство* $\mathrm{HH}^0(R)$ *допускает в качестве* K*-базиса следующее множество*

$$\{(xy)^i + (yx)^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{1,\ x(yx)^{k-1},\ y(xy)^{k-1},\ (xy)^k\}. \quad (3.3)$$

В частности, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + 3$.

(b) *Пространство* $\mathrm{Im}\,\delta^0$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*

$$((xy)^i + (yx)^i, 0), \quad (0, (xy)^i + (yx)^i), \quad (y(xy)^i, x(yx)^i), \qquad (3.4)$$

где $1 \leqslant i \leqslant k-1$. *В частности,* $\dim_K \mathrm{Im}\,\delta^0 = 3k - 3$.

Замечание 3.2. Для некоторых элементов из (3.3) будем использовать следующие сокращённые обозначения:

$$p_1 := xy + yx, \quad p_2 := x(yx)^{k-1}, \quad p_2' := y(xy)^{k-1}. \qquad (3.5)$$

Отметим, что $(xy)^i + (yx)^i = p_1^i$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, $(xy)^k = (1/2)p_1^k$.

Прежде чем продолжить вычисление групп когомологий, отметим следующие два предложения.

Предложение 3.3. *Для элемента* $\psi \in \Lambda$ *рассмотрим отображение*

$$\widetilde{\psi}\colon R \to R, \quad \widetilde{\psi}(r) = \psi * r.$$

Если $\psi \in \{\zeta^-, \eta^-, \rho^-, \omega^-\}$, *то* $\widetilde{\psi}$ *– нулевое отображение.*

Доказательство проводится аналогично [15, предложение 2.7].

Следующее утверждение также доказывается аналогично [15, предложение 2.8].

Предложение 3.4. (a) *Для отображения* $\widetilde{X^-}\colon R \to R$, $r \mapsto X^- * r$, *пространство* $\operatorname{Ker}\widetilde{X^-}$ *допускает в качестве* K*-базиса множество:*

$$(xy)^i + (yx)^i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.6}$$

$$x(yx)^i \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.7}$$

$$1, \quad y(xy)^{k-1}, \quad (xy)^k, \tag{3.8}$$

а пространство $\operatorname{Im}\widetilde{X^-}$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов*

$$(xy)^i - (yx)^i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.9}$$

$$x(yx)^i \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{3.10}$$

(b) *Для отображения* $\widetilde{X^+}\colon R \to R$, $r \mapsto X^+ * r$, *пространство* $\operatorname{Ker}\widetilde{X^+}$ *допускает в качестве* K*-базиса множество:*

$$(xy)^i - (yx)^i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.11}$$

$$x(yx)^i \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1; \quad (xy)^k; \tag{3.12}$$

пространство $\operatorname{Im}\widetilde{X^+}$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов*

$$(xy)^i + (yx)^i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.13}$$

$$x(yx)^i \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1; \quad (xy)^k. \tag{3.14}$$

Замечание 3.5. В последующем мы будем использовать также аналог предложения 3.4 для отображений $\widetilde{Y^\pm}\colon R \to R$, $r \mapsto Y^\pm * r$.

Дифференциал

$$\delta^1\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

может быть описан (с использованием предложения 3.3) так: для r_1, $r_2 \in R$ имеем

$$\delta^1(r_1, r_2) = (-\zeta^- * r_1 + \eta^- * r_2, X^+ * r_1, Y^+ * r_2) = (0, X^+ * r_1, Y^+ * r_2).$$

Предположим, что $(r_1, r_2) \in \operatorname{Ker}\delta^1$, т.е.

$$X^+ * r_1 = xr_1 + r_1x = 0 \quad \text{и} \quad Y^+ * r_2 = yr_2 + r_2y = 0.$$

Теперь используя предложения 3.4 и 3.1, легко получаем следующее утверждение.

Предложение 3.6. (a) *Пространство* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$\Big((xy)^i - (yx)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.15}$$

$$\Big(0, (xy)^i - (yx)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.16}$$

$$\Big(x(yx)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.17}$$

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.18}$$

$$\Big((xy)^k, 0\Big), \quad \Big(0, (xy)^k\Big). \tag{3.19}$$

(b) *Пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.17), (3.19), *а также элемента* $(0,\ y)$.

(c) *Пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$\Big(0, (xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.20}$$

$$\Big(0, x(yx)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.21}$$

$$\Big(0, 0, (xy)^i + (yx)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.22}$$

$$\Big(0, 0, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.23}$$

$$\Big(0, (xy)^k, 0\Big), \ \Big(0, 0, (xy)^k\Big). \tag{3.24}$$

Следствие 3.7. $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = k+3$.

Замечание 3.8. В дальнейшем для n-коцикла $f \in \operatorname{Ker}\delta^n$ его когомологический класс $\operatorname{cl} f \in \mathrm{HH}^n(R)$ часто обозначаем также через f.

Ввиду сделанных выше соглашений (и учитывая предложение 3.3) мы видим, что дифференциал δ^2 описывается формулой: для r_1, r_2, $r_3 \in R$

$$\delta^2(r_1, r_2, r_3) = (X^+ * r_1, Y^+ * r_1, X^- * r_2, Y^- * r_3).$$

Теперь используя предложение 3.4, а также предложение 3.6(c), получаем следующее утверждение.

Предложение 3.9. (a) *Пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$\Big((xy)^i-(yx)^i,0,0\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.25}$$

$$\Big(0,(xy)^i+(yx)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.26}$$

$$\Big(0,x(yx)^i,0\Big) \quad \text{для} \quad 0\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.27}$$

$$\Big(0,0,(xy)^i+(yx)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.28}$$

$$\Big(0,0,y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.29}$$

$$\Big((xy)^k,0,0\Big),\ \Big(0,1,0\Big),\ \Big(0,y(xy)^{k-1},0\Big), \tag{3.30}$$

$$\Big(0,0,1\Big),\ \Big(0,0,x(yx)^{k-1}\Big), \tag{3.31}$$

$$\Big(0,(xy)^k,0\Big),\ \Big(0,(xy)^k\Big). \tag{3.32}$$

(b) *Пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.25), (3.30), (3.31).

(c) *Пространство* $\operatorname{Im}\delta^2$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$\Big(x(yx)^i,y(xy)^i,\mathrm{O}_2\Big) \quad \text{для} \quad 0\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.33}$$

$$\Big((xy)^i+(yx)^i,\mathrm{O}_3\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.34}$$

$$\Big(0,(xy)^i+(yx)^i,\mathrm{O}_2\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.35}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2,x(yx)^i,0\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.36}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2,(xy)^i-(yx)^i,0\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.37}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3,(xy)^i-(yx)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.38}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3,y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.39}$$

$$\Big((xy)^k,\mathrm{O}_3\Big),\ \Big(0,(xy)^k,\mathrm{O}_2\Big). \tag{3.40}$$

Следствие 3.10. $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = k + 4$.

Дифференциал

$$\delta^3 \colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_4, R)$$

может быть описан следующим образом: для $r_1, r_2, r_3, r_4 \in R$

$$\delta^3(r_1, r_2, r_3, r_4) = (\zeta^+ * r_1 - \eta^+ * r_2, X^- * r_1, Y^- * r_2, X^+ * r_3, Y^+ * r_4).$$

Если $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathrm{Ker}\,\delta^3$, то, в частности,

$$\zeta^+ * r_1 - \eta^+ * r_2 = 0. \tag{3.41}$$

Представим компоненты r_1, r_2 этого 3-коцикла в виде

$$r_1 = \sum_{w \in \mathcal{B}} \lambda_w w, \quad r_2 = \sum_{w \in \mathcal{B}} \mu_w w; \tag{3.42}$$

здесь $\mathcal{B} := \mathcal{B}_R$, $\lambda_w, \mu_w \in K$. Подставляя разложения (3.42) в (3.41), получаем соотношение

$$2\lambda_1 y(xy)^{k-1} + 2k\lambda_x (xy)^k - 2\mu_1 x(yx)^{k-1} - 2\mu_y (xy)^k = 0,$$

и следовательно,

$$\lambda_1 = 0 = \mu_1, \quad k(\lambda_x - \mu_y) = 0.$$

Теперь используя также предложения 3.4 и 3.6, п. (c), легко доказываем следующее утверждение.

Предложение 3.11. (a) *Если p делит k, то пространство* $\mathrm{Ker}\,\delta^3$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих эле-*

ментов:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_3\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.43}$$

$$\Big(x(yx)^i, \mathrm{O}_3\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.44}$$

$$\Big(0, (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.45}$$

$$\Big(0, y(xy)^i, \mathrm{O}_2\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.46}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, (xy)^i - (yx)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.47}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, x(yx)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.48}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, (xy)^i - (yx)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.49}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.50}$$

$$\Big(y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big), \quad \Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big), \tag{3.51}$$

$$\Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\Big), \quad \Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Big), \tag{3.52}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, (xy)^k, 0\Big), \quad \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k, 0\Big). \tag{3.53}$$

(b) *Если p не делит k, то для получения базиса* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *в указанном выше множестве надо элементы* $\Big(x, \mathrm{O}_3\Big)$ *и* $\Big(0, y, \mathrm{O}_2\Big)$ *заменить на элемент* $\Big(x, y, \mathrm{O}_2\Big)$.

(c) *Если p делит k, то пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов из* (3.44), (3.51), (3.53), *а также элементов* $\Big(\mathrm{O}_2, x, 0\Big)$, $\Big(\mathrm{O}_3, y\Big)$.

(d) *Если p не делит k, то для получения базиса* $\mathrm{HH}^3(R)$ *в множестве, указанном в пункте* (c), *надо опустить элемент* $\Big(x, \mathrm{O}_3\Big)$.

Следствие 3.12. $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+6, & \text{если } p \text{ делит } k, \\ k+5, & \text{если } p \text{ не делит } k. \end{cases}$

Предложение 3.13. *Для $n \geqslant 5$ имеем:*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) + 4. \tag{3.54}$$

Доказательство. Из предложения 2.8 следует, что имеется следующая точная последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

где $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$. Эта последовательность, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots .$$

Сейчас мы вычислим когомологии вспомогательного комплекса $\mathcal{X}^\bullet$.

Лемма 3.14. (a) *Для чётного $n \geqslant 4$ пространство $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов*

$$\Big(x, \mathrm{O}_3\Big), \quad \Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\Big), \quad \Big(0, y, \mathrm{O}_2\Big), \quad \Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Big),$$
$$\Big(\mathrm{O}_2, 1, 0\Big), \quad \Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}, 0\Big), \quad \Big(\mathrm{O}_3, 1\Big), \quad \Big(\mathrm{O}_3, x(yx)^{k-1}\Big).$$

(b) *Для нечётного $n \geqslant 5$ $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов*

$$\Big(1, \mathrm{O}_3\Big), \quad \Big(y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big), \quad \Big(0, 1, \mathrm{O}_2\Big), \quad \Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big),$$
$$\Big(\mathrm{O}_2, x, 0\Big), \quad \Big(\mathrm{O}_2, (xy)^k, 0\Big), \quad \Big(\mathrm{O}_3, y\Big), \quad \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big).$$

В частности, для $n \geqslant 4$ имеем $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 8$.

Доказательство. Ввиду предложения 3.3 при $\ell \geqslant 2$ имеем:

$$\delta_{\mathcal{X}}^{2\ell}(r_1, r_2, r_3, r_4) = (X^+ * r_1, Y^+ * r_2, X^- * r_3, Y^- * r_4),$$
$$\delta_{\mathcal{X}}^{2\ell-1}(r_1, r_2, r_3, r_4) = (X^- * r_1, Y^- * r_2, X^+ * r_3, Y^+ * r_4),$$

и потому требуемое утверждение следует из предложения 3.4 (см. также замечание 3.5). □

Продолжим доказательство предложения 3.13. Отметим, что для связывающих гомоморфизмов Δ^n $(n \geqslant 4)$ из (3.55)

$$\dim_K \mathrm{Ker}\, \Delta^n = 6, \quad \dim_K \mathrm{Im}\, \Delta^n = 2.$$

Действительно, прямые вычисления (ср. доказательство предложения 3.16 в [10]) показывают, что для $\ell \geqslant 2$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{2\ell}\Big(\operatorname{cl}\Big(x, \mathrm{O}_3\Big)\Big) &= \operatorname{cl}\Big(\mathrm{O}_{2\ell-4}, (xy)^k, 0\Big), \\ \Delta^{2\ell}\Big(\operatorname{cl}\Big(0, y, \mathrm{O}_2\Big)\Big) &= \operatorname{cl}\Big(\mathrm{O}_{2\ell-3}, (xy)^k\Big), \end{aligned}\right\} \tag{3.56}$$

а остальные базисные элементы пространства $\mathrm{H}^{2\ell}(\mathcal{X}^\bullet)$, указанные в лемме 3.14, лежат в $\operatorname{Ker}\Delta^{2\ell}$. Остаётся заметить, что (ввиду предложения 3.4) элементы из (3.56) отличны от нуля, так как две последние компоненты в $\delta^{2\ell-2}(r_1, \ldots, r_{2\ell-1})$ равны $X^- * r_{2\ell-2}$ и $Y^- * r_{2\ell-1}$. Аналогично рассматриваются Δ^n для нечётного n.

Из точности последовательности (3.55) следует, что при $n \geqslant 4$

$$\dim \operatorname{Im}\Delta^{n-1} - \dim \mathrm{HH}^{n-4}(R) + \dim \mathrm{HH}^n(R) - \dim \operatorname{Ker}\Delta^n = 0, \tag{3.57}$$

откуда следует равенство (3.54). □

Замечание 3.15. Вычисления, аналогичные приведённым выше, показывают, что

$$\dim_K \operatorname{Im}\Delta^3 = \begin{cases} 2, & \text{если } p \text{ делит } k, \\ 3, & \text{если } p \text{ не делит } k, \end{cases}$$

и следовательно, из равенства (3.57) для $n = 4$ (с учётом предложения 3.1,(a)) получаем

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+7, & \text{если } p \text{ делит } k, \\ k+6, & \text{если } p \text{ не делит } k. \end{cases}$$

Следствие 3.16. *Пусть $R = R_k$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} k+3, & \textit{если } n = 0, \\ k+3+4\left[\frac{n}{4}\right], & \textit{если } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4) \textit{ и } p \mid k, \\ k+2+4\left[\frac{n}{4}\right], & \textit{если } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4) \textit{ и } p \nmid k, \\ k+3+4\left[\frac{n}{4}\right], & \textit{если } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4), \\ k+4+4\left[\frac{n}{4}\right], & \textit{если } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4), \\ k+6+4\left[\frac{n}{4}\right], & \textit{если } n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \textit{ и } p \mid k, \\ k+5+4\left[\frac{n}{4}\right], & \textit{если } n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \textit{ и } p \nmid k. \end{cases}$$

4. Образующие и соотношения

В этом разделе по-прежнему предполагается, что $p := \operatorname{char} K \neq 2$. Мы используем следующую интерпретацию произведения Йонеды в алгебре $\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \operatorname{Ext}^m_\Lambda(R,R)$ (см., например, [1]). Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента, описанная в разделе 2. Пусть

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \Big(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\Big)$$

– комплекс из (3.1). Тогда для коциклов $f \in \operatorname{Ker}\delta^n$ и $g \in \operatorname{Ker}\delta^t$ имеем $\operatorname{cl} g \cdot \operatorname{cl} f = \operatorname{cl}(\mu \mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f))$, где $\mathrm{T}^i(h)$ обозначает i-ю трансляцию коцикла h. В дальнейшем мы будем описывать трансляции $\mathrm{T}^i(h)$ ($i \geqslant 0$) с помощью матриц, соответствующих стандартным разложениям модулей Q_i (см. замечание 2.7).

Случай 1. Предположим сначала, что p делит k. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $p_1,\ p_2,\ p_2'$ из (3.5);

— степени 1 : $u_1 := (x,0), \quad u_1' := (0,y);$ (4.1)

— степени 2 : $v_1 := (xy - yx, 0, 0), \quad v_2 := (0,1,0),$

$v_2' := (0,0,1), \quad v_3 := ((xy)^k, 0, 0);$ (4.2)

— степени 3 : $w_1 := (x,0,0,0), \quad w_2 := (y(xy)^{k-1}, 0, 0, 0),$

$w_2' := (0, x(yx)^{k-1}, 0, 0);$ (4.3)

— степени 4 : $t := (1,0,0,0,0).$ (4.4)

Предложение 4.1. *Предположим, что p делит k. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_1, p_2, p_2', u_1, u_1', v_1, v_2, v_2', v_3, w_1, w_2, w_2', t\} \tag{4.5}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения:*

$$p_1^{k+1} = p_2^2 = (p_2')^2 = p_1p_2 = p_1p_2' = p_2p_2' = 0; \tag{4.6}$$

$$p_1^k u_1 = p_2u_1 = p_2'u_1' = 0, \quad p_1u_1 = p_1u_1'; \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &p_1^{k-1}v_1 = p_2v_1 = p_2'v_1 = 0,\\ &p_1v_2 = p_2v_2 = p_1v_2' = p_2'v_2' = 0,\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

$$p_1v_3 = p_2v_3 = p_2'v_3 = 0, \tag{4.9}$$

$$u_1u_1' = 0; \tag{4.10}$$

$$\left.\begin{aligned} &p_1^k w_1 = p_2w_1 = p_2'w_1 = 0,\\ &p_1w_2 = p_2w_2 = p_2'w_2 = 0,\\ &p_1w_2' = p_2w_2' = p_2'w_2' = 0,\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

$$u_1'v_1 = u_1v_1, \tag{4.12}$$

$$u_1v_1 + p_1w_1 = u_1v_2' = u_1'v_2 = u_1v_3 = u_1'v_3 = 0; \tag{4.13}$$

$$p_2t = p_2't = 0, \tag{4.14}$$

$$v_1^2 + p_1^2t = 0, \tag{4.15}$$

$$v_2v_3 = u_1w_2, \quad v_2'v_3 = u_1'w_2', \tag{4.16}$$

$$v_1v_2 = v_1v_2' = v_2v_2' = 0, \tag{4.17}$$

$$v_1v_3 = v_3^2 = u_1w_1 = u_1'w_1 = u_1w_2' = u_1'w_2 = 0; \tag{4.18}$$

$$v_1w_1 = p_1u_1t, \quad v_1w_2 = v_1w_2' = 0, \tag{4.19}$$

$$v_2w_1 = v_2'w_1 = v_2w_2' = v_2'w_2 = 0, \tag{4.20}$$

$$v_3w_1 = v_3w_2 = v_3w_2' = 0; \tag{4.21}$$

$$w_1w_2 = w_1w_2' = w_2w_2' = 0. \tag{4.22}$$

Доказательство. Соотношения (4.6)–(4.9), (4.11), (4.14) проверяются непосредственно. Для доказательства остальных соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень.

Из предложения 2.8 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для любого* $i \geqslant 0$ *проекция на прямое слагаемое* $\pi_{i+4}\colon Q_{i+4} = Q_i \oplus X_{i+4} \to Q_i$ *является* i*-ой трансляцией* $\mathrm{T}^i(t)$ *коцикла* t.

Необходимые трансляции остальных элементов из $\mathcal{Y}_1$ представлены в следующей лемме.

Лемма 4.3. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$, имеющих положительную степень, можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \Big(x \otimes 1, 0\Big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_1) = \begin{pmatrix} \star & -x \otimes 1 & 0 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{11} = \sum_{i=1}^{k-1} iy(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} - \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{21} = \sum_{i=1}^{k-1} i(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(u_1') = \Big(0, y \otimes 1\Big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_1') = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & -y \otimes 1 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{11} = \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)y(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} - \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{21} = \sum_{i=1}^{k-1} i(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} - \sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} \ ;$$

$$\mathrm{T}^0(v_1) = \Big(x \otimes y - y \otimes x, 0, 0\Big), \quad \mathrm{T}^1(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & y \otimes y & 0 & 0 \\ -x \otimes x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^2(v_1) = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $(\mathrm{T}^2(v_1))_{11} = x \otimes y - y \otimes x$;

$$\mathrm{T}^0(v_2) = \Big(0, \mathrm{id}\,, 0\Big), \quad \mathrm{T}^1(v_2) = \begin{pmatrix} \star & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(v_2))_{11} = \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(v_2))_{21} = \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^2(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

где $(\mathrm{T}^2(v_2))_{31} = (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}$;

$$\mathrm{T}^0(v_2') = \Big(0, 0, \mathrm{id}\Big), \quad \mathrm{T}^1(v_2') = \begin{pmatrix} 0 & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(v_2'))_{11} = -\sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(v_2'))_{21} = -\sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i}\ ;$$

$$\mathrm{T}^2(v_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

где $(\mathrm{T}^2(v_2'))_{21} = (xy)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1}$;

$$\mathrm{T}^0(v_3) = \Big((xy)^k \otimes 1, 0, 0\Big),$$

$$\mathrm{T}^1(v_3) = \begin{pmatrix} -(xy)^k \otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(xy)^k \otimes 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_3) = \begin{pmatrix} -(xy)^k \otimes 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (xy)^k \otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (xy)^k \otimes 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(w_1) = \Big(x \otimes 1, \mathrm{O}_3\Big), \quad \mathrm{T}^1(w_1) = \begin{pmatrix} \star & x\otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{11} = -\,Y^+ \cdot \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{11} = -\,Y^+ \cdot \sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^{i-1} \otimes x(yx)^{k-1-i}\ ;$$

$$\mathrm{T}^2(w_1) = \begin{pmatrix} -x\otimes 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y(xy)^{k-1}\otimes 1 & 0 & x\otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(w_1) = \begin{pmatrix} \star & -x\otimes 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y(xy)^{k-1} & 0 & x\otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{11} = -Y^- \cdot \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{21} = Y^- \cdot \sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^{i-1} \otimes x(yx)^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(w_2) = \Big(y(xy)^{k-1}\otimes 1, \mathrm{O}_3\Big),$$

$$\mathrm{T}^1(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & y(xy)^{k-1}\otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $(\mathrm{T}^1(w_2))_{21} = (yx)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-1}$;

$$\mathrm{T}^2(w_2) = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{11} = -y(xy)^{k-1}\otimes 1,$$
$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{23} = y(xy)^{k-1}\otimes 1,$$
$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{31} = X^- \cdot (yx)^{k-1}\otimes (xy)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^3(w_2))_{12} &= -y(xy)^{k-1} \otimes 1, \\ (\mathrm{T}^3(w_2))_{21} &= -y(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}, \\ (\mathrm{T}^3(w_2))_{34} &= y(xy)^{k-1} \otimes 1; \end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^0(w_2') = \Big(0, x(yx)^{k-1} \otimes 1, \mathrm{O}_2\Big),$$

$$\mathrm{T}^1(w_2') = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x(yx)^{k-1} \otimes 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $(\mathrm{T}^1(w_2'))_{11} = -(xy)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1}$;

$$\mathrm{T}^2(w_2') = \begin{pmatrix} 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^2(w_2'))_{12} &= -x(yx)^{k-1} \otimes 1, \\ (\mathrm{T}^2(w_2'))_{22} &= -Y^- \cdot (xy)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1}, \\ (\mathrm{T}^2(w_2'))_{34} &= x(yx)^{k-1} \otimes 1; \end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^3(w_2') = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^3(w_2'))_{11} &= x(yx)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1}, \\ (\mathrm{T}^3(w_2'))_{23} &= -x(yx)^{k-1} \otimes 1, \\ (\mathrm{T}^3(w_2'))_{45} &= x(yx)^{k-1} \otimes 1. \end{aligned}$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке соотношений $\mu\mathrm{T}^0(b) = b$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(b) = \mathrm{T}^{i-1}(b)d_{i+\deg b}$ $(i > 0)$ для $b \in \mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$ с $\deg b > 0$. $\square$

Замечание 4.4. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций элементов $u_1, u_1', v_1, v_2, v_2', t$ остаются справедливыми и в случае, когда p не делит k.

Теперь доказательство предложения 4.1 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в лемме 4.3, и это предоставляется проделать читателю. □

Предложение 4.5. *Предположим, что p делит k. Множество $\mathcal{Y}_1$, указанное в* (4.5), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Из замечания 3.2 следует, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Далее, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^1(R)$, указанных в предложении 3.6, выполняются соотношения

$$\Big(x(yx)^i, 0\Big) = p_1^i u_1 \ \ (0 \leqslant i \leqslant k-1),$$
$$\Big((xy)^k, 0\Big) = p_2' u_1, \quad \Big(0, (xy)^k\Big) = p_2 u_1',$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^2(R)$, указанных в предложении 3.9, выполняются соотношения

$$\Big((xy)^i - (yx)^i, \mathrm{O}_2\Big) = p_1^{i-1} v_1 \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1),$$
$$\Big(0, y(xy)^{k-1}, 0\Big) = p_2' v_2, \quad \Big(\mathrm{O}_2, x(yx)^{k-1}\Big) = p_2 v_2'.$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Включение $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$ вытекает из следующих соотношений для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$ (см. предложение 3.11):

$$\Big(x(yx)^i, \mathrm{O}_3\Big) = p_1^i w_1 \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1), \tag{4.24}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, x, 0\Big) = u_1 v_2 + w_2, \quad \Big(\mathrm{O}_3, y\Big) = u_1' v_2' - w_2', \tag{4.25}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, (xy)^k, 0\Big) = p_2' u_1 v_2, \quad \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big) p_2 u_1' v_2'. \tag{4.26}$$

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.6. *Положим*

$$t_1 := (v_2 + v_2')^2 = \Big(\mathrm{O}_3, 1, 1\Big) \in \mathrm{HH}^4(R). \tag{4.27}$$

Трансляции $\mathrm{T}^i(t_1)$, $i \leqslant 3$, *могут быть представлены отображениями*

$$\mathrm{T}^1(t_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & \star & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star & 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(t_1))_{13} &= \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i}, \\
(\mathrm{T}^1(t_1))_{14} &= -\sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i}, \\
(\mathrm{T}^1(t_1))_{23} &= \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}, \\
(\mathrm{T}^1(t_1))_{24} &= -\sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i}, \\
\mathrm{T}^2(t_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$(\mathrm{T}^2(t_1))_{23} = (xy)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1}, \quad (\mathrm{T}^2(t_1))_{32} = (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1},$$

$$\mathrm{T}^3(t_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & \star & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(t_1))_{13} = \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(t_1))_{14} = \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(t_1))_{23} = -\sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(t_1))_{24} = -\sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i}.$$

Кроме того, для $i \geqslant 4$

$$\mathrm{T}^i(t_1) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{T}^{i-4}(t_1) & \mathrm{O} \\ \hline \star & \mathrm{id}_{\Lambda^4} \end{array}\right). \tag{4.28}$$

Доказательство. Формулы для $\mathrm{T}^i(t_1)$, где $i \leqslant 3$, проверяются непосредственно, а затем формула (4.28) устанавливается с помощью индукции. □

Замечание 4.7. Отметим, что формулы для трансляций элемента t_1, представленнные в лемме 4.6, остаются справедливыми и в случае, когда p не делит k.

Замечание 4.8. Так как $t_1 = v_2^2 + (v_2')^2$ (см. (4.27), а также (4.17)), то на самом деле мы сначала находили трансляции элементов v_2^2 и $(v_2')^2$. При этом нам ниже понадобится одна из этих трансляций, а именно:

$$\mathrm{T}^2(v_2^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

где $(\mathrm{T}^2(t_1))_{32} = (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}$.

Продолжим доказательство предложения 4.5. Представим $f \in \operatorname{Ker}\delta^n \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$, $n \geqslant 4$, в виде $f = (f', f'')$, где $f' = \Big(s_1, \ldots, s_{n-3}\Big) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R)$, $f'' = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathcal{X}^n$ (мы используем отождествление $\mathcal{X}^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, R)$ с R^4); ясно, что f'' – n-коцикл в комплексе $\mathcal{X}^\bullet$. Индукцией по n докажем, что $\operatorname{cl} f \in \mathcal{H}$.

(a) Предположим, что $f'' = 0$. Из строения бикомплекса (2.4) мы усматриваем, что матрица дифференциала в комплексе $Q_\bullet$ имеет вид

$$d_n^Q = \left(\begin{array}{c|c} d_{n-4}^Q & \mathrm{O} \\ \hline \star & d_n^X \end{array}\right).$$

Поэтому f' лежит в $\operatorname{Ker}\delta^{n-4}$, а ввиду леммы 4.2 получаем, что

$$f' \cdot t = (f', \mathrm{O}_4) = f.$$

По индуктивному предположению $f' \in \mathcal{H}$, и следовательно, $f \in \mathcal{H}$.

(b) Рассмотрим теперь случай, когда n чётно: $n = 2\ell$. Предположим дополнительно, что $n \geqslant 8$. Так как

$$d_{2\ell}^Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{3}{c|}{d_{2\ell-4}^Q} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & -\sigma^+ & D^+ & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} & \sigma^- & D^- \end{array}\right),$$

то $X^- * s_{2\ell-4} - \rho^+ * r_1 = 0$, $Y^- * s_{2\ell-3} + \omega^+ * r_2 = 0$. Легко видеть, что $\operatorname{Im}\widetilde{X}^- \cap \operatorname{Im}\widetilde{\rho}^+ = 0$, и потому $\rho^+ * r_1 = 0$. Аналогично получаем, что $\omega^+ * r_2 = 0$. Тогда $(2\ell-4)$-коцепь $g := \Big(\mathrm{O}_{2\ell-7}, f''\Big) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell-4}, R)$ является коциклом. Из леммы 4.6 следует, что $g \cdot t_1 = (\star\ , f'')$. Используя часть (a) доказательства, получаем, что $f - g \cdot t_1 \in \mathcal{H}$. По индуктивному предположению $g \in \mathcal{H}$, и следовательно, $f \in \mathcal{H}$.

(c) В случае $n \in \{4, 6\}$ надо рассуждать несколько иначе. Заметим, что ввиду предложения 3.14 мы можем считать, что разложение элемента r_1 по стандартному базису $\mathcal{B}_R$ имеет вид $r_1 = \lambda' \cdot x + \lambda'' \cdot (xy)^k$ $(\lambda', \lambda'' \in R)$, при этом из того, что $\rho^+ * r_1 = 0$, следует, что $\lambda' = 0$. Если $n = 4$, то используя вид матрицы $\mathrm{T}^2(v_2)$ из (4.23), получаем, что $v_3 \cdot v_2 = \Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_3\Big)$. Переходя от f к $f - \lambda'' v_3 v_2$, можем считать, что уже в f $r_1 = 0$. Аналогично сводим ситуацию к случаю, когда и $r_2 = 0$. Тогда $g := (0, r_3, r_4) \in \operatorname{Ker}\delta^2$ и $f - g \cdot (v_2 + v_2') = (\star\ , \mathrm{O}_4)$, и далее индукционный переход завершается, как и в случае (b).

Если $n = 6$, то используя $\mathrm{T}^2(v_2^2)$ (см. (4.29)), получаем, что $v_3 \cdot v_2^2 = \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k, \mathrm{O}_3\Big)$. Переходя от f к $f - \lambda'' v_3 v_2^2$, считаем, что уже в f $r_1 = 0$, и аналогично считаем $r_2 = 0$. Тогда $g := (\mathrm{O}_3, r_3, r_4) \in \operatorname{Ker}\delta^4$ и

$f - g \cdot t_1 = (\star, \mathrm{O}_4)$, и вновь индукционный переход завершается, как и в случае (b).

(d) Предположим теперь, что n нечётно: $n = 2\ell + 1$, $\ell \geqslant 2$. В этом случае

$$d^Q_{2\ell+1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} d^Q_{2\ell-3} & \multicolumn{3}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \sigma^+ & D^- & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} & -\sigma^- & D^+ \end{array}\right),$$

Тогда, в частности,

$$X^+ * s_{2\ell-3} + \rho^+ * r_1 = 0, \tag{4.30}$$

$$Y^+ * s_{2\ell-2} - \omega^+ * r_2 = 0. \tag{4.31}$$

Ввиду предложения 3.14 мы можем считать, что разложение элемента r_1 по стандартному базису $\mathcal{B}_R$ имеет вид $r_1 = \lambda' \cdot 1 + \lambda'' \cdot y(xy)^{k-1}$; при этом из соотношения (4.30) следует, что $\lambda' = 0$. Тогда получаем $\rho^+ * r_1 = 0$, и по симметрии $\omega^+ * r_2 = 0$. Если $n \geqslant 7$, то $g := \Big(\mathrm{O}_{2\ell-6}, f''\Big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell-3}, R)$ – $(2\ell-3)$-коцикл, а с помощью леммы 4.6 получаем, что $g \cdot t_1 = (\star, f'')$. Используя часть (a) доказательства, получаем, что $f - g \cdot t_1 \in \mathcal{H}$, а тогда и $f \in \mathcal{H}$. Для $n = 5$ мы заметим, что

$$\Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big) = v_2 w_2, \quad \Big(\mathrm{O}_3, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big) = v_2' w_2',$$

Тогда переходя от f к $f - \lambda'' v_2 w_2$, можем считать, что $r_1 = 0$ и – по симметрии – что $r_2 = 0$. Далее рассуждение завершаем аналогично случаю (c). □

Пусть $\mathcal{A}_1 = K\langle \mathcal{X}_1 \rangle / I_1$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_1$ из (1.2), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. (1.6)–(1.24)). (Ненулевые) образы мономов из $K\langle \mathcal{X}_1 \rangle$ относительно канонического эпиморфизма $K\langle \mathcal{X}_1 \rangle \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ записывается в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Из предложений 4.1 и 4.5 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (4.5)); заметим, что, не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 1) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.9. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w_1 > w_2' > w_2 > v_1 > v_2' > v_2 > v_3 > u_1' > u_1 > t > p_1 > p_2' > p_2.$$

По построению $\mathcal{A}_1$ – градуированно-коммутативная алгебра. Поэтому в соответствии с таким порядком любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_1$ с точностью до знака представи́м в виде

$$f = w_1^{\alpha_1}(w_2')^{\alpha_2'} w_2^{\alpha_2} v_1^{\beta_1}(v_2')^{i'} v_2^i v_3^{\beta_3}(u_1')^{\gamma'} u_1^{\gamma} t^n p_1^j (p_2')^{\varepsilon'} p_2^{\varepsilon}; \tag{4.32}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$

$$\alpha_1,\, \alpha_2',\, \alpha_2,\, \beta_3,\, \gamma',\, \gamma,\, \varepsilon',\quad \varepsilon \in \{0,1\},\quad \beta_1,\, i',\, i,\, j,\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\quad j \leqslant k.$$

Такие представления для мономов из $\mathcal{A}_1$ мы отождествляем с соответствующими мономами из $K[\mathcal{X}_1]$.

Назовём *редукцией* монома f из $\mathcal{A}_1$ процесс замены некоторых подмономов в f на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($a \mapsto b$ означает замену каждого вхождения монома a на элемент b):

$$\begin{aligned}
&u_1'p_1 \mapsto u_1p_1, && w_1p_1 \mapsto v_1u_1,\\
&v_1u_1' \mapsto v_1u_1, && v_1^2 \mapsto tp_1^2,\\
&w_2u_1 \mapsto v_2v_3, && w_2'u_1' \mapsto v_2'v_3,\\
&w_1v_1 \mapsto u_1tp_1.
\end{aligned}$$

Любую замену из приведенного выше списка назовём *элементарным шагом редукции.* Так как после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в строго меньший относительно лексикографического порядка, то за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $a \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет *нормальную форму*, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Поскольку эти

элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1$, то любой элемент $a \in \mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.33}$$

Докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $4n$:

$$\left\{(v_2')^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{(v_2')^{2(n-i)-1}v_3t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{v_2^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)-1}v_3t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{t^np_1^j\right\}_{j=1}^{k}, \quad (v_2')^{2n}p_2, \quad v_2^{2n}p_2';$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{w_2'(v_2')^{2(n-i)-1}t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{w_2v_2^{2(n-i)-1}t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{(v_2')^{2(n-i)}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{u_1t^np_1^j\right\}_{j=1}^{k-1}, \quad (v_2')^{2n}u_1'p_2, \quad v_2^{2n}u_1p_2';$$

мономы степени $4n+2$:

$$\left\{(v_2')^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{(v_2')^{2(n-i)}v_3t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{v_2^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)}v_3t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{v_1t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \quad (v_2')^{2n+1}p_2, v_2^{2n+1}p_2';$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{w_2'(v_2')^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{w_2v_2^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{(v_2')^{2(n-i)+1}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)+1}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{v_1u_1t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \quad w_1t^n, \quad (v_2')^{2n+1}u_1'p_2, \quad v_2^{2n+1}u_1p_2'$$

(здесь $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму.

Пусть $f \in \mathcal{A}_1$ – некоторый ненулевой моном вида (4.32), имеющий нормальную форму. Отметим, что дополнительно в (4.32) имеем $\beta_1 \leqslant 1$ (так как есть редукция $v_1^2 \mapsto tp_1^2$). Сейчас мы проанализируем последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_1. Тогда ввиду некоторых шагов редукции, а также некоторых мономиальных соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathcal{A}_1$, следует, что в f не входят w_2', w_2, v_2', v_2, v_3, u_1', u_1, p_2', p_2. Кроме того, в f не может входить v_1, так как имеется редукция $w_1v_1 \mapsto u_1tp_1$, а также p_1, – имеется редукция $w_1p_1 \mapsto v_1u_1$. Тогда $f = w_1t^n$.

2) Предположим, что w_1 не входит в f, но входит w_2'. Тогда аналогично предыдущему заключаем, что в f не входят w_2, v_1, v_2, v_3, u_1', u_1, p_1, p_2', p_2; кроме того, не входит u_1' (так как $w_2'u_1' \mapsto v_2'v_3$). Таким образом, $f = w_2'(v_2')^{i'}t^n$.

3) Пусть в f не входят w_1, w_2', и предположим, что w_2 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в f не могут входить также $v_1, v_2', v_3, u_1', p_1, p_2', p_2$. Кроме того, в f не входит u_1 (так как $w_2u_1 \mapsto v_2v_3$). Следовательно, $f = w_2v_2^it^n$.

4) Пусть w_1, w_2', w_2 не входят, а v_1 входит в f. Тогда в f не входят также $v_2, v_2', v_3, p_2', p_2$. Не входит также u_1' (так как $v_1u_1' \mapsto v_1u_1$). Кроме того, в (4.32) имеем $j \leqslant k-2$, так как $p_1^{k-1}v_1 = 0$. Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_1u_1t^np_1^j, \quad v_1t^np_1^j \quad (0 \leqslant j \leqslant k-2).$$

5) Пусть w_1, w_2', w_2, v_1 не входят, а v_2' входит в f. Тогда в f не входят также v_2, u_1, p_1, p_2'. Кроме того, если в (4.32) $\beta_3 = 1$, то в f не входят u_1', p_2 (так как $v_3u_1' = 0 = v_3p_2$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$(v_2')^{i'}v_3t^n, \quad (v_2')^{i'}u_1't^np_2, \quad (v_2')^{i'}u_1't^n, \quad (v_2')^{i'}t^np_2.$$

6) Пусть $w_1, w_2', w_2, v_1, v_2'$ не входят, а v_2 входит в f. Тогда в f не входят также u_1', p_1, p_2. Кроме того, если в (4.32) $\beta_3 = 1$, то в f не входят u_1, p_2' (так как $v_3u_1 = 0 = v_3p_2'$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_2^iv_3t^n, \quad v_2^iu_1't^np_2', \quad v_2^iu_1t^n, \quad v_2^it^np_2'.$$

7) Пусть $w_1, w_2', w_2, v_1, v_2', v_2$ не входят, а v_3 входит в f. Тогда в f не входят также $u_1', u_1, p_1, p_2', p_2$. Следовательно, $f = v_3 t^n$.

8) Пусть $w_1, w_2', w_2, v_1, v_2', v_2, v_3$ не входят, а u_1' входит в f. Тогда в f не входят u_1, p_2', а также p_1 (так как $u_1' p_1 \mapsto u_1 p_1$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$u_1' t^n; \quad u_1' p_2 \quad (\text{ при } \ n = 0).$$

9) Пусть $w_1, w_2', w_2, v_1, v_2', v_2, v_3, u_1'$ не входят, а u_1 входит в f. Тогда в f не входит p_2. Кроме того, если $n > 0$, то в f не входит p_2' (поскольку $tp_2' = 0$), а также $j \leqslant k-1$ (так как $u_1 t p_1^k = w_1 v_1 p_1^{k-1} = 0$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$u_1 t^n p_1^j \quad (n > 0, 0 \leqslant j \leqslant k-1); \quad u_1 p_1^j \quad (0 \leqslant j \leqslant k),$$
$$u_1 p_2' \quad (\text{ при } \ n = 0).$$

10) Наконец, если в f не входят $w_1, w_2', w_2, v_1, v_2', v_2, v_3, u_1', u_1$, то ясно, что f совпадает с одним из мономов: $t^n p_1^j$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$; p_2', p_2 (при $n = 0$).

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведённом выше списке. С учётом следствия 3.16 отсюда вытекает равенство (4.33). □

Случай 2. Теперь предположим, что p не делит k. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $p_1,\ p_2,\ p_2'$, из (3.5);
— степени 1 : u_1, u_1' из (4.1);
— степени 2 : $v_1,\ v_2,\ v_2'$ из (4.2);
— степени 4 : t из (4.4).

Предложение 4.10. *Предположим, что p не делит k. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2 = \{p_1, p_2, p_2', u_1, u_1', v_1, v_2, v_2', t\} \tag{4.34}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (4.6), (4.7), (4.8), (4.12), (4.14), (4.17) *а также соотношение:*

$$p_1^k t = 0. \tag{4.35}$$

Доказательство. Соотношение (4.35) следует из того, что (в обозначениях из (3.1))

$$\Big((xy)^k, \mathrm{O}_4\Big) = (2k)^{-1}\delta^3(x, \mathrm{O}_3) \in \operatorname{Im}\delta^3.$$

Остальные соотношения получаются так же, как и в доказательстве предложения 4.1, поскольку необходимые трансляции были вычислены в лемме 4.3 (см. замечание 4.4). □

Предложение 4.11. *Предположим, что p не делит k. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в* (4.34), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_2 \cup \{1\}$. Включение $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \in \{0,1\}$ получено в процессе доказательства предложения 4.5. Для обоснования включения $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$ также надо следовать доказательству предложения 4.5 и дополнительно заметить, что $\Big((xy)^k, \mathrm{O}_2\Big) = k^{-1}u_1u_1'$.

Наконец, включение $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$ вытекает из следующих соотношений для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$ (см. предложение 3.11, (d)):

$$\Big(x(yx)^i, \mathrm{O}_3\Big) = -p_1^{i-1}u_1'v_1 \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1),$$
$$\Big(y(xy)^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big) = k^{-1}u_1'v_2, \quad \Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big) = k^{-1}u_1v_2',$$
$$\Big(\mathrm{O}_2, x, 0\Big) = u_1v_2 - (k-1)k^{-1}u_1'v_2, \quad \Big(\mathrm{O}_3, y\Big) = u_1'v_2' - (k-1)k^{-1}u_1v_2',$$

а также соотношений (4.26).

Далее индукционный переход осуществляется аналогично доказательству предложения 4.5. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K\langle\mathcal{X}_2\rangle/I_2$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где I_2 — соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.10 и 4.11 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$. Пусть $\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{m\geqslant 0}\mathcal{A}_2^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 2) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.12. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{4.36}$$

Доказательство. Доказательство равенства (4.36) проводится аналогично доказательству предложения 4.9. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$ мы вводим лексикографический порядок такой, что

$$v_1 > v_2' > v_2 > u_1' > u_1 > t > p_1 > p_2' > p_2.$$

Рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции:

$$u_1' p_1 \mapsto u_1 p_1, \quad v_1 u_1' \mapsto v_1 u_1, \quad v_1^2 \mapsto t p_1^2. \tag{4.37}$$

Аналогично доказательству предложения 4.9 определяется нормальная форма элемента $f \in \mathcal{A}_2$ (относительно шагов редукции (4.37) и устанавливается, что любой элемент $f \in \mathcal{A}_2$ допускает хотя бы одну нормальную форму. Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\left\{p_1^j\right\}_{j=0}^{k}, \quad p_2', \quad p_2;$$

мономы степени $4n$, $n > 0$:

$$\left\{(v_2')^{2(n-i)} t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{(v_2')^{2(n-i)-1} u_1' u_1 t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{v_2^{2(n-i)} t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)-1} u_1' u_1 t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{t^n p_1^j\right\}_{j=1}^{k-1}, \quad (v_2')^{2n} p_2, \quad v_2^{2n} p_2';$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{(v_2')^{2(n-i)} u_1' t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{(v_2')^{2(n-i)} u_1 t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{v_2^{2(n-i)} u_1' t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)} u_1 t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{u_1 t^n p_1^j\right\}_{j=1}^{k-1}, \quad (v_2')^{2n} u_1' p_2, \quad v_2^{2n} u_1 p_2';$$

мономы степени $4n+2$:

$$\left\{(v_2')^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{(v_2')^{2(n-i)}u_1'u_1t^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{v_2^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)}u_1'u_1t^i\right\}_{i=0}^{n-1},\quad \left\{v_1t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2},\quad (v_2')^{2n+1}p_2, v_2^{2n+1}p_2';$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{(v_2')^{2(n-i)+1}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{(v_2')^{2(n-i)+1}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{v_2^{2(n-i)+1}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_2^{2(n-i)+1}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{v_1u_1t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2},\quad (v_2')^{2n+1}u_1'p_2,\quad v_2^{2n+1}u_1p_2'$$

(где $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$). Отсюда, как и в доказательстве предложения 4.9, вытекает равенство (4.36). Детали соответствующих рассуждений оставляются читателю. □

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–122.
2. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
3. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 1, 55–107.
5. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 4, 39–82.
6. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* I. — Зап. науч. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 5, 70–123.
8. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III.*Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 2, 1–51.

11. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
12. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
13. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа*. I. — Алгебра и анализ **13** (2001), вып. 4, 54–85.
14. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math. **1428**, Berlin, Heidelberg (1990).
15. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа*. III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та (2010) (в печати).
16. S. Eilenberg, S. MacLane, *Cohomology theory in abstract groups*, I. — Ann. Math. **48** (1947), 51–78.
17. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, М., 1960.
18. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*. — Ann. Math. **78** (1963), 267–288.
19. M. Gerstenhaber, S. D. Schack, *Algebraic cohomology and deformation theory*. — In: Deformation theory of algebras and structures and applications, eds. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber, Kluwer Acad. Publ., NATO ASI Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci. **247** (1988), pp. 11–264.

Generalov A. I. Hochschild cohomology of algebras of dihedral type. II. Local algebras.

For local algebras which constitute a family of algebras of dihedral type, we calculate the Hochschild cohomology in the case where the base algebraically closed field has a characteristic different from 2. Furthermore, we give a description of the Hochschild cohomology algebra (in terms of generators and relations) for the local algebras under consideration. We use in the corresponding calculation a beforehand constructed bimodule resolution for these algebras.

С.-Петербургский
государственный университет,
Старый Петергоф, Университетский пр. 28
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 13 января 2010 г.