Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

Г. В. Воскресенская

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ η–ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Ввведение

Изучение связей между представлениями конечных групп и модулярными формами является актуальным и интересным направлением исследований. В настоящей статье рассматривается проблема нахождения таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, принадлежат специальному классу модулярных форм, которые называются мультипликативными η-произведениями. Это открытая проблема: все такие группы до сих пор не найдены. Ранее автором были изучены некоторые типы групп с такими свойствами: абелевы, метациклические, группы нечетных порядков и некоторые другие типы.

В этой статье полностью разобран случай простых групп. Для каждой группы описаны все возможные варианты соответствия.

2. Соответствие с помощью фрейм-форм

В современных математических исследованиях существует несколько различных способов сопоставлять элементам конечных групп модулярные формы. Здесь мы опишем принцип, который называется соответствием с помощью фрейм-формы (Frame-shape correspondence).

Первые современные исследования этого соответствия проводил в пятидесятые годы Морис Ньюман, затем активный интерес проявился в исследованиях Джеффри Мейсона и его учеников [11–15].

Суть его в следующем.

Для построения соответствия между элементами конечных групп

Ключевые слова: представления групп, простые группы, η-функция Дедекинда.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00151a.

и модулярными формами мы используем эта-функцию Дедекинда, которая определяется формулой:

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i z},$$

z принадлежит верхней комплексной полуплоскости.

Пусть Φ – такое линейное представление G в пространстве V, $24|\dim V$, что для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^{s} (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \ a_j, \ t_j \in \mathbf{N}, \ 24|\sum_{j=1}^{s} a_j t_j.$$

Тогда каждому элементу g можно сопоставить функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой из пространства $S_k(N, \chi)$, где $k = \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{s} t_j$, минимальный уровень N определяется из условия $24| \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{N t_j}{a_j}$, характер χ – характер Дирихле по модулю N

$$\chi(d) = \left(\frac{\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}}{d} \right).$$

Если d – четно, то $\chi(d)$ определяется как $\chi(d+N) = \chi(d)$, $(d, N) = 1$ [16]. Символ $\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}$ называется фрейм-формой (Frame-shape).

Такое соответствие можно рассмотреть для любой группы. Например, можно подобрать представление в виде суммы регулярного и нескольких тривиальных.

Возникает интересная задача нахождения в рассматриваемой ситуации для данной группы минимального l, такого, что $\dim V = 24l$. Так для группы Z_{31} минимальное $l = 2$.

3. Мультипликативные η-произведения

Естественно рассмотреть вопрос о том, какую роль в таком соответствии играют q-ряды с мультипликативными коэффициентами. Оказывается, что множество таких рядов обладает определенной замкнутостью относительно группы (предложение 1). Такие ряды могут возникать только из представлений размерности 24, так как первый коэффициент должен быть равен 1. Список этих эта-произведений известен. Он состоит из 28 параболических форм целого веса и двух параболических форм полуцелого веса. Эти функции были открыты в 1985 году американскими учеными Дж. Мак-Кеем, Д. Даммитом и Н. Кисилевски. Они называются *мультипликативными η-произведениями* [8]. Очень интересно получить различные описания этого класса форм. Эта-произведения из этого класса появляются в математических работах в различных контекстах.

В частности, в статье [17] мы доказали теорему 1 о том, что мультипликативные η-произведения целого веса определяются условиями на дивизор.

Теорема 1. *Существует в точности* 28 *функций, определенных следующими условиями:*

1) *они являются параболическими формами целого веса с характерами некоторого уровня;*

2) *все их нули сосредоточены в параболических вершинах, и порядок каждого нуля равен* 1.

Эти 28 функций и есть мультипликативные η-произведения целого веса.

Далее в таблице явно выпишем все мультипликативные η-произведения, 28 функций целого и 2 функции полуцелого веса.

4. $M\eta P$-группы

В следующем предложении приводится свойство, позволяющее определить группы некоторого нового специального типа. Подгруппы такого типа содержатся в любой группе.

Предложение 1. *Если g – такой элемент в группе G, что функция $\eta_g(z)$, ассоциированная с g с помощью некоторого представления, является мультипликативным η-произведением, то функция $\eta_h(z)$, $h = g^k$, также является мультипликативным η-произведением.*

Таблица 1

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^3(8z)$	$\frac{3}{2}$	4	$\left(\frac{-4}{d}\right)$
$\eta(24z)$	$\frac{1}{2}$	576	$\left(\frac{12}{d}\right)$

Доказательство. Это утверждение доказывается непосредственно. При этом мы получаем информацию для циклических групп, которой удобно пользоваться, поэтому мы приведем полученную таблицу.

Таблица 2

Группа	Модулярные формы
Z_{24}	$\eta(24z), \eta^2(12z), \eta^3(8z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{23}	$\eta(23z)\eta(z), \eta^{24}(z)$
Z_{22}	$\eta(22z)\eta(2z), \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{21}	$\eta(21z)\eta(3z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(3z), \eta^{24}(z)$
Z_{20}	$\eta(20z)\eta(4z), \eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{18}	$\eta(18z)\eta(6z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{16}	$\eta(16z)\eta(8z), \eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{15}	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z),\ \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z)$
Z_{14}	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z),\ \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{12}	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),$ $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{12}	$\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{11}	$\eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{24}(z)$
Z_{10}	$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_9	$\eta(18z)\eta(6z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^3(8z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_7	$\eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_5	$\eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_3	$\eta^8(3z), \eta^{24}(z)$
Z_3	$\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z)$
Z_2	$\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_2	$\eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$

Этот факт приводит к рассмотрению интересной открытой проблемы – **проблемы нахождения всех таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами группы с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными η-произведениями.**

Соответствие между элементами группы и модулярными формами здесь понимается так, как описано в пункте 2.

Будем называть такие группы $M\eta P$-группами.

Очевидно, что подгруппа $M\eta P$-группы сама является $M\eta P$-группой.

Ранее автором были найдены абелевы, метациклические $M\eta P$-группы, $M\eta P$-подгруппы в $SL(5,C)$, $M\eta P$-группы нечетного порядка и некоторые другие типы таких групп.

Так как функция $\eta^{24}(z)$ является мультипликативным η-произведением, то $M\eta P$-подгруппы содержатся в любой группе (такая подгруппа может быть тривиальной).

Далее мы будем использовать следующую теорему, доказанную в [9].

Теорема 2. *$M\eta P$-группы нечетного порядка являются подгруппами в одной из следующих групп:*

$$
\begin{aligned}
&G_1 \cong \langle a,b,c : a^3 = b^3 = c^3 = e,\ ab = bac,\ ac = ca,\ bc = cb\rangle,\\
&G_2 \cong \langle a,b : a^{21} = b^3 = e,\ b^{-1}ab = a^4\rangle,\\
&G_3 \cong \langle a,b : a^{23} = b^{11} = e,\ b^{-1}ab = a^{10}\rangle,\\
&G_4 \cong \langle a,b : a^{11} = b^5 = e,\ b^{-1}ab = a^5\rangle,\\
&G_5 \cong Z_9,\\
&G_6 \cong Z_{15}.
\end{aligned}
$$

5. Простые $M\eta P$-группы

5.1. Формулировка теоремы. Здесь мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Конечная простая группа G является $M\eta P$-группой тогда и только тогда, когда G – подгруппа в M_{24}.*

5.2. Доказательство.

5.2.1. Исключение недопустимых групп. Из теоремы 2 нам известны все $M\eta P$-группы нечетных порядков. Поэтому анализируя порядки конечных простых групп по атласу простых групп, мы видим, что кроме групп

$$Z_2,\ Z_3,\ Z_5,\ Z_7,\ Z_{11},\ Z_{23},\ A_5,\ A_6,\ A_7,\ A_8,\ L_2(7),\ L_2(11),$$

$$L_2(23),\ L_3(4),\ M_{11},\ M_{12},\ M_{22},\ M_{23},\ M_{24},\ L_2(8),\ U_3(3),$$

все остальные конечные простые группы не являются $M\eta P$-группами.

Покажем, что группы $L_2(8)$ и $U_3(3)$ не являются допустимыми.

Рассмотрим группу $L_2(8)$.

Выпишем значение характера χ_2.

Таблица 3

	$1A$	$2A$	$3A$	$7A$	$7B$	$7C$	$9A$	$9B$	$9C$
χ_2	7	-1	-2	0	0	0	1	1	1

Мощности классов $|2A| = 63$, $|3A| = 56$, $|7A| = |7B| = |7C| = 72$.

Так как элементы порядка 9 соответствуют форме $\eta^2(9z)\eta^2(3z)$, то элементы порядка 3 соответствуют форме $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, элементы порядка 7 соответствуют форме $\eta^3(7z)\eta^3(z)$.

Пусть T – допустимое представление. Обозначим через $t = \chi_T(g)$, $g \in G$. Это число может равняться 0 или 8.

Вычислим число $m_2 = \langle \chi_T,\, \chi_2 \rangle$. Это число должно быть целым и неотрицательным. Но мы получим:

$$m_2 = -\frac{t}{8} + \frac{1}{3} - 2.$$

Это число при любом t будет дробным и отрицательным. Получили противоречие.

Рассмотрим теперь группу $U_3(3)$.

Выпишем значение характера χ_{14}.

Таблица 4

	$1A$	$2A$	$3A$	$3B$	$4A$	$4B$	$4C$	$6A$	$7A$	$7B$	$8A$	$8B$	$12A$	$12B$
χ_{14}	32	0	-4	-1	0	0	0	0	$-\overline{b_7}$	$-b_7$	0	0	0	0

Мощности классов $|3A| = 56$, $|3B| = 672$, $|7A| = |7B| = 864$.

Элементы порядка 7 соответствуют форме $\eta^3(7z)\eta^3(z)$.

Пусть T – допустимое представление. Обозначим через $t_1 = \chi_T(g)$, $g \in 3A$; $t_2 = \chi_T(g)$, $g \in 3B$. Это число может равняться 0 или 6.

Вычислим число $m_{32} = \langle \chi_T, \chi_{32} \rangle$. Это число должно быть равно нулю. Но мы получим:

$$m_{32} = 5 - \frac{t_1}{27} - \frac{t_2}{9}.$$

Это число при любых t_1 и t_2 не равняется нулю. Получили противоречие.

Далее будет показано, что все остальные группы из нашего списка являются $M\eta P$-группами. Все они являются подгруппами в группе Матье M_{24}.

Мы будем называть также такие группы допустимыми, а представления, с помощью которых всем элементам группы соответствуют мультипликативные η-произведения, допустимыми представлениями.

В таблицах характеров мы используем также сокращения:

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, y_n = \zeta_n + \zeta_n^{-1} = 2\ \cos\frac{2\pi}{n},\ y_n^{*k} = \zeta_n^k + \zeta_n^{-k} = 2\ \cos\frac{2k\pi}{n},$$

$$n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}, \quad b_n = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \zeta_n^{j^2}$$

для нечетных n,

$$b_n^* = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{n}) = -1 - b_n, n \equiv 1 \pmod 4.$$

Для каждой группы мы опишем все возможные соответствия между элементами группы и мультипликативными η-произведениями.

Единице группы всегда соответствует $\eta^{24}(z)$. Мы это больше не будем указывать.

Для циклических групп вопрос уже изучен.

Таблица 5

	$1A$	$2A$	$3A$	$5A$	$5B$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$-b_5$	$-b_5^*$
χ_3	3	-1	0	$-b_5^*$	$-b_5$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

5.2.2. Группа A_5.

Существуют четыре допустимые представления. Далее укажем эти представления и в каждом случае соответствия между элементами групп и модулярными формами.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= 4T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3 \oplus 2T_4,\\
\Phi_2 &= 4T_1 \oplus 4T_5,\\
\Phi_3 &= 6T_1 \oplus 2T_4 \oplus 2T_5,\\
\Phi_4 &= 2T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3 \oplus 2T_5.
\end{aligned}$$

Таблица 6

Φ	$2A$	$3A$	$5A$
Φ_1	$\eta^{12}(2z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
Φ_2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	$\eta^8(3z)$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
Φ_3	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
Φ_4	$\eta^{12}(2z)$	$\eta^8(3z)$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$

5.2.3. Группа A_6. Выпишем таблицу неприводимых характеров (см. табл. 7).

Здесь существуют только два допустимых представления:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= 5T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_6 \quad \text{и}\\
\Phi_2 &= 4T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3.
\end{aligned}$$

В первом случае элементы элементы порядка 4 соответствуют форме $\eta^4(4z)\eta^2(4z)\eta^4(z)$, а во втором – $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$.

Остальные неединичные элементы ассоциируются с формами $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ в соответствии со своими порядками.

Таблица 7

	$1A$	$2A$	$3A$	$3B$	$4A$	$5A$	$5B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5	1	2	-1	-1	0	0
χ_3	5	1	-1	2	-1	0	0
χ_4	8	0	-1	-1	0	$-b_5$	$-b_5^*$
χ_5	8	0	-1	-1	0	$-b_5^*$	$-b_5$
χ_6	9	1	0	0	1	-1	-1
χ_7	10	-2	1	1	0	0	0

5.2.4. Группа A_7. Порядок этой группы равен 2520.

Выпишем таблицу характеров неприводимых представлений размерностей, не превосходящих 24.

Таблица 8

	$1A$	$2A$	$3A$	$3B$	$4A$	$5A$	$6A$	$7A$	$7B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	6	2	3	0	0	1	-1	-1	-1
χ_3	10	-2	1	1	0	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_4	10	-2	1	1	0	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_5	14	2	2	-1	0	-1	2	0	0
χ_6	14	2	-1	2	0	-1	-1	0	0
χ_7	15	-1	3	0	-1	0	-1	1	1
χ_8	21	1	-3	0	-1	1	1	0	0

Здесь реализуется единственное допустимое представление: $4T_1 \oplus T_2 \oplus T_6$.

Неединичные элементы ассоциируются с формами

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(7z)\eta^3(z),$$
$$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),$$
$$\eta^4(5z)\eta^4(z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z)$$

в соответствии со своими порядками.

Таблица 9

	$1A$	$2A$	$2B$	$3A$	$3B$	$4A$	$4B$	$5A$	$6A$	$6B$	$7A$	$7B$	$15A$	$15B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	3	4	1	-1	1	2	0	-1	0	0	-1	-1
χ_3	14	6	2	-1	2	2	0	-1	-1	0	0	0	-1	-1
χ_4	20	4	4	5	-1	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0
χ_5	21	-3	1	6	0	1	-1	1	-2	0	0	0	1	1
χ_6	21	-3	1	-3	0	1	-1	1	1	0	0	0	b_{15}	$\overline{b_{15}}$
χ_7	21	-3	1	-3	0	1	-1	1	1	0	0	0	$\overline{b_{15}}$	b_{15}

5.2.5. Группа A_8. Порядок этой группы равен 20160.

Выпишем таблицу характеров неприводимых представлений размерностей, не превосходящих 24 (см. табл. 9).

Здесь реализуется единственное допустимое представление: $3T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$.

Неединичные элементы ассоциируются с формами

$$\eta^3(7z)\eta^3(z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),$$
$$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),\ \eta^4(5z)\eta^4(z),$$
$$\eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z)$$

в соответствии со своими порядками.

5.2.6. Группа $L_2(7)$. Эта группа изоморфна группе $L_3(2)$.

Мы найдем все допустимые представления. Оказывается, что их три.

Приведем таблицу неприводимых характеров.

Таблица 10

	$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$7A$	$7B$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_3	3	-1	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	0	0
χ_6	8	0	-1	0	1	1

Пусть T – искомое представление.

Элементы из классов $7A$, $7B$ всегда должны соответствовать параболической форме $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, то есть $\chi_T(g) = 3$, $g \in 7A, 7B$. Вариант соответствия для элементов четвертого порядка однозначно определяет вариант для элементов второго порядка. Следовательно, различные ситуации определяются элементами третьего и четвертого порядков. Элементы из класса $4A$ могут соответствовать одной из форм $\eta^6(4z)$, $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, элементы из класса $3A$ – одной из форм $\eta^8(3z)$, $\eta^6(3z)\eta^6(z)$.

Следует рассмотреть 6 вариантов. Вычисляем скалярные произведения $\langle\chi_T, \chi_j\rangle$, $j = 1, \dots, 6$. Обозначим значения характера искомого представления T на элементах из разных классов следующим образом:

$$t_1 = \chi_T(g),\ g \in 2A;\ t_2 = \chi_T(g),\ g \in 3A;\ t_3 = \chi_T(g),\ g \in 4A.$$

Эти числа должны быть неотрицательными целыми числами, их сумма равна 24. Мы используем данные о мощности классов сопряженных элементов:

$$|2A| = 21,\ |3A| = 56,\ |4A| = 42,\ |7A| = |7B| = 24.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
m_1 &= 1 + \frac{t_1}{8} + \frac{t_2}{3} + \frac{t_3}{4};\\
m_2 &= m_3 = \frac{-t_1}{8} + \frac{t_3}{4};\\
m_4 &= \frac{t_1}{4};\\
m_5 &= 1 - \frac{t_1}{8} + \frac{t_2}{3} - \frac{t_3}{4};\\
m_6 &= 2 - \frac{t_2}{3}.
\end{aligned}$$

Проведя вычисления, получим три допустимых представления. В оставшихся трех случаях встречаются отрицательные m_j.

Ниже мы выпишем допустимые представления и соответствия между элементами группы и параболическими формами (см. табл. 11).

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= 3T_1 \oplus 3T_5,\\
\Phi_2 &= T_1 \oplus T_5 \oplus 2T_6,\\
\Phi_3 &= 5T_1 \oplus 2T_4 \oplus T_5.
\end{aligned}$$

Таблица 11

Φ	$2A$	$3A$	$4A$	$7A$
Φ_1	$\eta^{12}(2z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^6(4z)$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$
Φ_2	$\eta^{12}(2z)$	$\eta^8(3z)$	$\eta^6(4z)$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$
Φ_3	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$

Таблица 12

	$1A$	$2A$	$3A$	$5A$	$5B$	$6A$	$11A$	$11B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5	1	-1	0	0	1	b_{11}	$\overline{b_{11}}$
χ_3	5	1	-1	0	0	1	$\overline{b_{11}}$	b_{11}
χ_4	10	-2	1	0	0	1	-1	-1
χ_5	10	2	1	0	0	-1	-1	-1
χ_6	11	-1	-1	1	1	-1	0	0
χ_7	12	0	0	b_5	b_5^*	0	1	1
χ_8	12	0	0	b_5^*	b_5	0	1	1

5.2.7. Группа $L_2(11)$. Приведем таблицу неприводимых характеров (см. табл. 12).

В допустимом представлении элементы шестого порядка соответствуют одной из форм $\eta^4(6z)$, $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$, $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$.

Реализуются только две первые возможности. Выпишем допустимые представления и соответствия между элементами групп и модулярными формами.

$$\Phi_1 = 2T_1 \oplus 2T_6,$$
$$\Phi_2 = 4T_1 \oplus 2T_5.$$

5.2.8. Группа $L_2(23)$. Мы не будем здесь приводить полностью таблицу неприводимых характеров. Ее можно найти в атласе [9].

Все элементы порядка 23 должны соответствовать форме $\eta(23z)\eta(z)$, элементы порядка 11 – форме $\eta^2(11z)\eta^2(z)$.

Этому условию удовлетворяют представления $2T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$, $T_1 \oplus T_9$, $2T_1 \oplus T_j$, $j = 4, \dots, 8$.

Так как значения искомого характера на элементах порядка 6 могут равняться 0 или 2, на элементах порядка 12 – только 0, то подходящим является только представление $T_1 \oplus T_9$.

Таблица 13

класс	модулярная форма	
$2A$	$\eta^{12}(2z)$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$3A$	$\eta^8(3z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$6A$	$\eta^4(6z)$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$5A,\ 5B$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$11A,\ 11B$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$

Оно действительно допустимое.

Неединичные элементы ассоциируются с формами

$$\eta(23z)\eta(z),\ \eta^2(12z),\ \eta^2(11z)\eta^2(z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z)$$

в соответствии со своими порядками.

5.2.9. Группа $L_3(4)$**.** Порядок этой группы равен 20160.

У этой группы только два представления, размерности которых меньше 24.

Приведем их характеры.

Таблица 14

	$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$4B$	$4C$	$5A$	$5B$	$7A$	$7B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	20	4	2	0	0	0	0	0	-1	-1

Допустимое представление – это $4T_1 \oplus T_2$.

Соответствие между элементами и модулярными формами запишем в следующую таблицу.

Таблица 15

класс	модулярная форма
$2A$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$3A$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$4A$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
$5A,\ 5B$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$7A,\ 7B$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$

5.2.10. Группа M_{11}. Существуют два представления, сопоставляющие элементам группы мультипликативные η-произведения. Порядок группы равен 7920.

Выпишем таблицу характеров:

Таблица 16

	$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$	$8A$	$8B$	$11A$	$11B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	10	2	1	2	0	-1	0	0	-1	-1
χ_3	10	-2	1	0	0	1	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$	-1	-1
χ_4	10	-2	1	0	0	1	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$	-1	-1
χ_5	11	3	2	-1	1	0	-1	-1	0	0
χ_6	16	0	-2	0	1	0	0	0	b_{11}	$\overline{b_{11}}$
χ_7	16	0	-2	0	1	0	0	0	$\overline{b_{11}}$	b_{11}
χ_8	44	4	-1	0	-1	1	0	0	0	0
χ_9	45	-3	0	1	0	0	-1	-1	1	1
χ_{10}	55	-1	1	-1	0	-1	1	1	0	0

Выпишем мощности классов сопряженных элементов:

$$|2A| = 165,\ |3A| = 440,\ |4A| = 990,\ |5A| = 1584,$$
$$|6A| = 1320,\ |8A| = |8B| = 990,\ |11A| = |11B| = 720.$$

Элементы порядка 5 соответствуют всегда $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, элементы порядка 11 соответствуют всегда $\eta^2(11z)\eta^2(z)$, элементы порядка 6 могут соответствовать в принципе одной из следующей форм

$$\eta^4(6z),\quad \eta^3(6z)\eta^3(2z),\quad \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z).$$

Вычислим число $m_{44} = \langle \chi_T, \chi_{44} \rangle$.

Это число должно равняться нулю, так как $\dim T = 24$, его значение не зависит от значений характеров на элементах 4, 8 и 11 порядков.

Вычисления показывают, что $m_{44} = 0$ только в случае, когда элементы порядка 6 соответствуют форме

$$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z).$$

Элементы порядка 2 в этом случае соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Значит, элементы восьмого порядка соответствуют одной из форм

$$\eta^2(8z)\eta^2(4z), \quad \eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z).$$

Оба варианта реализуются.

Соответствие между элементами и формами определится однозначно. Запишем их в таблицы.

$$\Phi_1 = 2T_1 \oplus 2T_5.$$

Таблица 17

класс	модулярная форма
$2A$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$3A$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$4A$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$5A$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$6A$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$8A, 8B$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$
$11A, 11B$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$

$$\Phi_2 = 3T_1 \oplus T_2 \oplus T_5.$$

Таблица 18

класс	модулярная форма
$2A$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$3A$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$4A$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$5A$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$6A$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$8A, 8B$	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$
$11A, 11B$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$

Заметим, что второе представление является ограничением допустимого представления группы M_{24}, а первое – нет.

5.2.11. Группа M_{12}. Порядок группы равен 95040.

Выпишем фрагмент таблицы характеров, содержащий все неприводимые характеры представлений размерностей, не превосходящих 24.

Таблица 19

	$1A$	$2A$	$2B$	$3A$	$3B$	$4A$	$4B$	$5A$	$6A$	$6B$	$8A$	$8B$	$10A$	$11A$	$11B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	11	-1	3	2	-1	-1	3	1	-1	0	-1	1	-1	0	0
χ_3	11	-1	3	2	-1	3	-1	1	-1	0	1	-1	-1	0	0
χ_4	16	4	0	-2	1	0	0	1	1	0	0	0	-1	b_{11}	$\overline{b_{11}}$
χ_5	16	4	0	-2	1	0	0	1	1	0	0	0	-1	$\overline{b_{11}}$	b_{11}

Так как элементы порядка 11 соответствуют $\eta^2(11z)\eta^2(z)$, а значение $\chi_T(g)$ может равняться 0 или 2 для элементов восьмого порядка, получаем единственный возможный вариант – представление $2T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$.

Запишем в таблицу соответствие между элементами группы и модулярными формами.

Таблица 20

класс	модулярная форма
$2A$	$\eta^{12}(2z)$
$2B$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$3A$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$3B$	$\eta^8(3z)$
$4A, 4B$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
$5A$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$6A$	$\eta^4(6z)$
$6B$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$8A, 8B$	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$
$10A, 10B$	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$
$11A, 11B$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$

5.2.12. Группа M_{22}. Порядок группы равен 443520.

У этой группы существуют только два неприводимых представления, порядки которых не превосходят 24. Выпишем их характеры.

Таблица 21

	$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$4B$	$5A$	$6A$	$7A$	$7B$	$8A$	$11A$	$11B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	21	5	3	1	1	1	-1	0	0	-1	-1	-1

Представление $3T_1 \oplus T_2$ является единственным допустимым.

Запишем в таблицу соответствие между элементами группы и модулярными формами.

Таблица 22

класс	модулярная форма
$2A$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$3A$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$4A, 4B$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
$5A$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$6A$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$7A, 7B$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$
$8A, 8B$	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$
$11A, 11B$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$

5.2.13. Группа M_{23}. Порядок группы равен 10200960.

У этой группы существуют только два неприводимых представления, порядки которых не превосходят 24. Выпишем их характеры (см. табл. 23 и 24).

Таблица 23

	$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$	$7A$	$7B$	$8A$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	22	6	4	2	2	0	1	1	0

Таблица 24

	$11A$	$11B$	$14A$	$14B$	$15A$	$15B$	$23A$	$23B$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Представление $2T_1 \oplus T_2$ является единственным допустимым.

Запишем в таблицу соответствие между элементами группы и модулярными формами.

Таблица 25

класс	модулярная форма
$2A$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$3A$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$4A$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
$5A$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$6A$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$7A, 7B$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$
$8A, 8B$	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$
$11A, 11B$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$
$14A, 14B$	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$
$15A, 15B$	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$
$23A, 23B$	$\eta(23z)\eta(z)$

5.2.14. Группа M_{24}**.** Порядок группы равен $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$.

У этой группы существую только два неприводимых представления, порядки которых не превосходят 24. Выпишем их характеры (см. табл. 26 и 27).

Таблица 26

	$1A$	$2A$	$2B$	$3A$	$3B$	$4A$	$4B$	$4C$	$5A$	$6A$	$6B$	$7A$	$8A$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	23	7	-1	5	-1	-1	3	-1	3	1	-1	2	1

Таблица 27

	$10A$	$11A$	$12A$	$12B$	$14A$	$15A$	$21A$	$23A$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	-1	1	-1	-1	0	0	-1	0

Представление $T_1 \oplus T_2$ является единственным допустимым.

Запишем в таблицу соответствие между элементами группы и модулярными формами.

Таблица 28

класс	модулярная форма
$2A$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$2B$	$\eta^{12}(2z)$
$3A$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$3B$	$\eta^8(3z)$
$4A$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$4B$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
$4C$	$\eta^6(4z)$
$5A$	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$6A$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$6B$	$\eta^4(6z)$
$7A$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$
$8A$	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$
$10A$	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$
$11A$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$
$12A$	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
$12B$	$\eta^2(12z)$
$14A$	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$
$15A$	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$
$21A$	$\eta(21z)\eta(3z)$
$23A$	$\eta(23z)\eta(z)$

Мы рассмотрели все случаи, доказательство теоремы 3 завершено.

Литература

1. В. А. Белоногов, *Представления и характеры в теории конечных групп.* УрО АН СССР, Свердловск (1990).
2. Г. В. Воскресенская, *Метациклические группы и модулярные формы.* — Матем. заметки **67**, No. 2 (2000), 163–173.
3. Г. В. Воскресенская, *Мультипликативные произведения эта-функций Дедекинда и представления групп.* — Матем. заметки **73**, No. 4 (2003), 482–495.
4. Г. В. Воскресенская, *О проблеме классификации конечных групп, ассоциированных с мультипликативными эта-произведениями.* — Фунд. и приклад. математика **10**, No. 4 (2004), 43–64.
5. Д. Горенстейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* Мир, М. (1985).
6. Г. С. М. Коксетер, У. О. Дж. М. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп.* Наука, М. (1980).
7. Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* Наука, М. (1969).
8. D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay, *Multiplicative products of η-functions.* — Contemp. Math. **45** (1985), 89–98.
9. J. Conway et al., *Atlas of simple groups.* C.U.P. (1985).
10. M. Koike, *On McKay's conjecture.* — Nagoya Math. J. **95** (1984), 85–89.
11. G. Mason, *Frame shapes and rational characters of finite groups.* — J. Algebra **89** (1984), 236–246.
12. G. Mason, *M_{24} and certain automorphic forms.* — Contemp. Math. **45** (1985), 223–244.
13. G. Mason, *Finite groups and Hecke operators.* — Math. Ann. **283** (1989), 381–409.
14. M. Newman, *Construction and application of a certain class of modular forms.* — Proc. L.M.S. **7** (1956), 334–350.
15. M. Newman, *Construction and application of a certain class of modular forms*, II. — Proc. L.M.S. **9** (1959), 373–387.
16. K. Ono, *The web of modularity: Arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series.* — A. M. S., Providence (2004), 228 pp.
17. G. V. Voskresenskaya, *One special class of modular forms and group representations.* — Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **11** (1999), 247–262.
18. G. V. Voskresenskaya, *Multiplicative Dedekind η-functions and representations of finite groups.* — Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **17** (2005), 359–380.

Voskresenskaya G. V. Finite simple groups and multiplicative η-products.

In this article the author finds all such simple groups that the cusp forms associated with all elements of these groups by a faithful representation are η-products with multiplicative Fourier coefficients.

Самарский
государственный университет,
ул. ак. Павлова, д. 1, 443011 Самара, Россия
E-mail: galvosk@mail.ru

Поступило 1 октября 2009 г.