Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов

О ПОСТРОЕНИИ БИМОДУЛЬНЫХ РЕЗОЛЬВЕНТ С ПОМОЩЬЮ ЛЕММЫ ХАППЕЛЯ

1. Введение

Пусть R – конечномерная базисная алгебра над алгебраически замкнутым полем. Часто для построения минимальной проективной бимодульной резольвенты такой алгебры используют лемму Хаппеля (см. [1]). Например, в работе [2] с помощью этой леммы вычислена бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса (алгебры одного из классов стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр типа A_n), а в работах [3] и [4] – для двух классов стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр типа D_n. Далее получившаяся резольвента может быть использована для вычисления аддитивной и мультипликативной структуры алгебры когомологий Хохшильда алгебры R.

Лемма Хаппеля позволяет по минимальным проективным резольвентам простых R-модулей получить описание членов минимальной бимодульной проективной резольвенты алгебры, но ничего не говорит о дифференциалах этой резольвенты. После того как эти дифференциалы удаётся построить, доказательство точности полученной последовательности остаётся непростой задачей. В работе [5, предложение 2.1] доказано утверждение, позволяющее упростить доказательство точности резольвенты, полученной с помощью леммы Хаппеля, в случае, когда в разложении членов минимальной проективной бимодульной резольвенты в прямую сумму неразложимых проективных модулей нет двух изоморфных слагаемых. В данной работе доказывается более общий критерий того, что последовательность, члены которой получены с помощью леммы Хаппеля, а дифференциалы в ней определены некоторым образом, точна. Кроме того, что этот критерий позволяет доказать точность резольвенты, он помогает подобрать дифференциалы так, чтобы последовательность превратилась в бимодульную проективную резольвенту.

Ключевые слова: бимодульная резольвента, лемма Хаппеля.
Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 10-01-00635 .

В последнем разделе критерий, полученный в данной работе, применяется для того, чтобы получить минимальные бимодульные резольвенты для одной из серий самоинъективных алгебр древесного типа D_n, описанных в работе [6].

2. Основной результат

Для начала введём некоторые обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей работы.

Пусть k – алгебраически замкнутое поле. Если A – конечномерная k-алгебра, то через $\operatorname{mod} A$ мы будем обозначать категорию конечнопорождённых левых A-модулей. Пусть R – конечномерная базисная k-алгебра, J_R – её радикал Джекобсона. Тогда $R = kQ/I$, где Q – некоторый колчан, а I – допустимый идеал алгебры путей этого колчана kQ (то есть $J^m \subset I \subset J^2$ для некоторого $m \geqslant 2$, где J – идеал kQ, порождённый стрелками Q). Через $\Lambda = R \otimes R^{\mathrm{op}}$ обозначим обёртывающую алгебру алгебры R, а через $J_\Lambda = J_R \otimes R^{\mathrm{op}} + R \otimes J_R^{\mathrm{op}}$ – её радикал Джекобсона. Обозначим через F функтор $- \otimes_R R/J_R : \operatorname{mod} \Lambda \to \operatorname{mod} R$.

Пусть $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ – множество вершин колчана Q, а $e_1, \ldots, e_n$ – примитивные идемпотенты алгебры R, ассоциированные с вершинами колчана Q. Тогда $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2}\}_{i_1, i_2}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов алгебры Λ. Через $P_i = Re_i$ обозначим проективный R-модуль, соответствующий i-ой вершине колчана Q, через S_i – соответствующий ей простой R-модуль. Через $P_{[i_1][i_2]} = \Lambda e_{i_1} \otimes e_{i_2}$ обозначим проективный Λ-модуль, соответствующий идемпотенту $e_{i_1} \otimes e_{i_2}$.

Через $Q_i(S)$ $(i \geqslant 0)$ обозначим i-ый модуль в минимальной проективной резольвенте простого R-модуля S, а через Q_i – i-ый модуль в бимодульной проективной резольвенте Λ-модуля R. Тогда по лемме Хаппеля [1] (см. также [2, стр. 45]), если $Q_t(S_i) = \bigoplus\limits_{k=1}^{l_i} P_{j_{k,i}}$, то

$$Q_t \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{k=1}^{l_i} P_{[j_{k,i}][i]}. \tag{2.1}$$

Пусть теперь для $i \geqslant 0$ задан гомоморфизм $d_i : Q_{i+1} \to Q_i$, а также гомоморфизм $d_{-1} : Q_0 \to R$. Возникает следующий вопрос. Когда последовательность

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{d_{-1}} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \ldots \tag{2.2}$$

является минимальной проективной резольвентой Λ-модуля R?

Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 1. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) *последовательность* (2.2) *является минимальной бимодульной резольвентой* R.
2) $d_{i-1}d_i = 0$ *для* $i \geqslant 0$ *и для любого простого* R*-модуля* S *последовательность*

$$0 \leftarrow R \otimes_R S \overset{d_{-1} \otimes_R \mathrm{id}_S}{\longleftarrow} Q_0 \otimes_R S \overset{d_0 \otimes_R \mathrm{id}_S}{\longleftarrow} Q_1 \otimes_R S \overset{d_1 \otimes_R \mathrm{id}_S}{\longleftarrow} \ldots \quad (2.3)$$

является минимальной проективной резольвентой S.

3) $d_{i-1}d_i = 0$ *для* $i \geqslant 0$ *и последовательность*

$$0 \leftarrow F(R) \overset{F(d_{-1})}{\longleftarrow} F(Q_0) \overset{F(d_0)}{\longleftarrow} F(Q_1) \overset{F(d_1)}{\longleftarrow} \ldots \quad (2.4)$$

является минимальной проективной резольвентой R*-модуля* R/J_R.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть (2.2) является минимальной бимодульной резольвентой R. Так как последовательность (2.2), рассматриваемая как последовательность правых R-модулей, гомотопна нулю (т.е. является “произведением по Йонеде” расщепляющихся коротких точных последовательностей), то из точности (2.2) следует точность (2.3). Наконец, из $d_i(Q_{i+1}) \subset J_\Lambda Q_i$ для $i \geqslant 0$, следует

$$(d_i \otimes_R \mathrm{id}_S)(Q_{i+1} \otimes_R S) \subset J_R(Q_i \otimes_R S) + Q_i \otimes_R (J_R S) = J_R(Q_i \otimes_R S)$$

для любого простого R-модуля S. Следовательно, из минимальности (2.2) следует минимальность (2.3).

2) $\Rightarrow$ 3) Очевидно, так как $R/J_R = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} S_i$.

Далее, отметим следующее вспомогательное утверждение, являющееся прямым следствием леммы Накаямы.

Лемма 1. *Гомоморфизм* $f\colon X \to Y$ *между конечно порождённым правыми* R*-модулями сюръективен тогда и только тогда, когда* $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ *– сюръекция.*

Для доказательства леммы достаточно заметить, что $F(X) \simeq X/XJ_R$.

Продолжим доказательство теоремы. 3) $\Rightarrow$ 1) Так как по предположению $F(d_{-1})$ – эпиморфизм, то по лемме 1 d_{-1} – также эпиморфизм. Предположим, что уже доказана точность последовательности (2.2) в членах Q_j для $j \leqslant i-1$ (считаем $Q_{-1} = R$). Последовательно рассматривая короткие точные последовательности

$$0 \leftarrow \operatorname{Im} d_{j-1} \leftarrow Q_j \xleftarrow{\ker d_{j-1}} \operatorname{Im} d_j \leftarrow 0$$

для $j = 0, 1, \dots, i-1$, получим, что они расщепляются в категории правых R-модулей и, в частности, $\operatorname{Im} d_{i-1}$ – проективный правый R-модуль. Пусть $d_i = \mu d'$, где $\mu := \ker d_{i-1}$; ясно, что μ – расщепляющийся мономорфизм (в категории правых R-модулей). Для доказательства точности (2.2) в члене Q_i достаточно показать, что d' – эпиморфизм. Но из расщепляемости μ следует, что $F(\mu)\colon F(\operatorname{Ker} d_{i-1}) \to F(Q_i)$ является ядром гомоморфизма $F(d_{i-1})$. Так как последовательность (2.4) точна в члене $F(Q_i)$, то $F(d')$ – эпиморфизм, а по лемме 1 эпиморфизмом является и d'.

Осталось доказать, что $d_i(Q_{i+1}) \subset J_\Lambda Q_i$ для всех $i \geqslant 0$. Но из минимальности (2.4) следует, что

$$d_i(F(Q_{i+1})) \subset J_R F(Q_i) = (J_R Q_i + Q_i J_R)/Q_i J_R$$

(здесь мы используем отождествление $F(X) = X/XJ_R$). Таким образом, $d_i(Q_{i+1}) \subset J_R Q_i + Q_i J_R = J_\Lambda Q_i$.

3. Пример применения

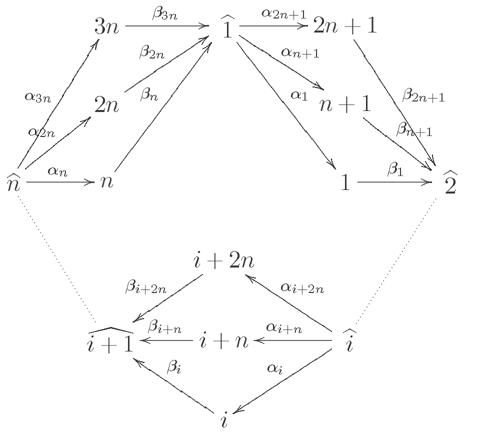
Приведём пример применения теоремы 1. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. В качестве множества вершин колчана $\mathcal{Q}$ возьмём $\mathcal{Q}_0 = \mathbb{Z}_n \sqcup \mathbb{Z}_{3n}$. Далее для числа $i \in \mathbb{Z}$ мы будем обозначать через i соответствующий ему элемент в $\mathbb{Z}_{3n}$, а через $\widehat{i}$ – соответствующий ему элемент в $\mathbb{Z}_n$. Множество стрелок $\mathcal{Q}_1$ колчана $\mathcal{Q}$ состоит из следующих элементов:

$$\alpha_i : \widehat{i} \to i, \ \beta_i : i \to \widehat{i+1},$$

где $i \in \{1, \dots, 3n\}$. Рассмотрим идеал I алгебры путей $k\mathcal{Q}$ колчана $\mathcal{Q}$, порождённый следующими элементами:

$$\begin{array}{lcll} \beta_i\alpha_i - \beta_{i+n}\alpha_{i+n} & \text{и} & \beta_i\alpha_i - \beta_{i+2n}\alpha_{i+2n} & (1 \leqslant i \leqslant n), \\ \alpha_{i+n}\beta_i & \text{и} & \alpha_{i+2n}\beta_i & (1 \leqslant i \leqslant 3n). \end{array}$$

Из [6] следует, что алгебра $R := k\mathcal{Q}/I$ имеет древесный тип D_4.



Аналогично тому, как это сделано в разделе 2, определим Λ, e_x, S_x, P_x, $P_{[x][y]}$, $Q_i(S)$ и Q_i для $x, y \in \mathcal{Q}_0$, $i \geqslant 0$ и простого модуля S. Кроме того, если w – некоторый путь в колчане $\mathcal{Q}$ из вершины x_1 в вершину x_2, то умножение справа на w индуцирует гомоморфизм $w^* : P_{x_2} \to P_{x_1}$, который мы будем обозначать через w. Таким образом, если w_1 – путь из вершины x_1 в вершину x_2, а w_2 – путь из вершины x_3 в вершину x_4, то $w_1 \otimes w_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[x_2][x_3]}, P_{[x_1][x_4]})$.

Построим минимальные проективные резольвенты модулей S_x для $x \in \mathcal{Q}_0$.

Лемма 2. 1) *Пусть $1 \leqslant i \leqslant 3n$. Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля S_i имеет следующий вид:*

$$0 \leftarrow S_i \longleftarrow P_i \xleftarrow{\beta_i} P_{\widehat{i+1}} \xleftarrow{(\alpha_{i+n+1},\, \alpha_{i+2n+1})} P_{i+n+1} \oplus P_{i+2n+1}$$

$$\xleftarrow{(-\beta_{i+n+1},\, \beta_{i+2n+1})^{\mathrm{T}}} P_{\widehat{i+2}} \xleftarrow{\alpha_{i+2}} P_{i+2} \xleftarrow{\alpha_{i+3}\beta_{i+2}} P_{i+3},$$

при этом $\Omega^5(S_i) \cong S_{i+3}$.

2) *Пусть $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля $S_{\widehat{i}}$ имеет следующий вид:*

$$0 \leftarrow S_{\widehat{i}} \longleftarrow P_{\widehat{i}} \xleftarrow{(\alpha_i, \alpha_{i+n}\ \alpha_{i+2n})} P_i \oplus P_{i+n} \oplus P_{i+2n} \xleftarrow{d_1^{(\widehat{i})}} P^2_{\widehat{i+1}}$$

$$\xleftarrow{d_2^{(\widehat{i}\,)}} P_{i+1} \oplus P_{i+n+1} \oplus P_{i+2n+1} \xleftarrow{d_3^{(\widehat{i}\,)}} P_{\widehat{i+2}} \xleftarrow{\beta_{i+2}\alpha_{i+2}} P_{\widehat{i+3}},$$

где

$$d_1^{(\widehat{i}\,)} = \begin{pmatrix} \beta_i & 0 \\ -\beta_{i+n} & \beta_{i+n} \\ 0 & -\beta_{i+2n} \end{pmatrix},\ d_2^{(\widehat{i}\,)} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{i+n+1} & \alpha_{i+2n+1} \\ \alpha_{i+1} & -\alpha_{i+n+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_3^{(\widehat{i}\,)} = (\,\beta_{i+1},\, \beta_{i+n+1},\, \beta_{i+2n+1}\,)^{\mathrm{T}};$$

при этом $\Omega^5(S_{\widehat{i}}) \cong S_{\widehat{i+3}}$.

Доказательство. Проверить оба пункта не представляет труда, и это предоставляется сделать читателю.

Из леммы 2 и леммы Хаппеля вытекает следующее описание членов минимальной проективной резольвенты Λ-модуля R:

$$Q_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} P_{[\widehat{i}\,][\widehat{i}\,]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i][i]}, \tag{3.1}$$

$$Q_1 = \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i][\widehat{i}\,]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[\widehat{i+1}\,][i]}, \tag{3.2}$$

$$Q_2 = \bigoplus_{i=1}^{n} P^2_{[\widehat{i+1}\,][\widehat{i}\,]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+n+1][i]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+2n+1][i]}, \tag{3.3}$$

$$Q_3 = \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+1][\widehat{i}\,]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[\widehat{i+2}\,][i]}, \tag{3.4}$$

$$Q_4 = \bigoplus_{i=1}^{n} P_{[\widehat{i+2}\,][\widehat{i}\,]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+2][i]}. \tag{3.5}$$

При этом члены с номерами, большими чем 4, получаются следующим образом: Q_{5l+t}, где $0 \leqslant t \leqslant 4$, получается из Q_t заменой прямых слагаемых вида $P_{[i][x]}$ и $P_{[\widehat{i}\,][x]}$, где $i \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{Q}_0$ на прямые слагаемые $P_{[i+3][x]}$ и $P_{[\widehat{i+3}\,][x]}$ соответственно.

Введём k-линейное отображение $\sigma : R \to R$, удовлетворяющее условию $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ и такое, что

$$\sigma(e_i) = e_{i+3}, \quad \sigma(e_{\widehat{i}}) = e_{\widehat{i+3}}, \quad \sigma(\alpha_i) = -\alpha_{i+3}, \quad \sigma(\beta_i) = \beta_{i+3}.$$

Ясно, что σ – автоморфизм алгебры R. Этот автоморфизм имеет конечный порядок, который описывается в следующем предложении.

Предложение 1. *Порядок σ равен n, если* char $k=2$ *или* $n \vdots 2$. *В противном случае он равен* $2n$.

Так как $\sigma^s(e_i)=e_{i+3s}$, $\sigma^s(e_{\widehat{i}})=e_{\widehat{i+3s}}$, $\sigma^s(\alpha_i)=(-1)^s\alpha_{i+3s}$, $\sigma^s(\beta_i)=\beta_{i+3s}$, то порядок σ – это наименьшее натуральное s, удовлетворяющее условиям:

1. $s \vdots n$,
2. $(-1)^s=1$.

Из условия 1 получаем, что порядок σ равен an для некоторого натурального a. Если char $k=2$ или $n \vdots 2$, то n очевидно удовлетворяет условию 2, то есть мы можем взять $a=1$. Если же char $k \neq 2$ или $n \not\vdots 2$, то ясно, что $a \vdots 2$. Также ясно, что $2n$ удовлетворяет условию 2, то есть надо взять $a=2$, и доказательство предложения завершено.

Будем обозначать через $\rho\Lambda$ категорию конечно порожденных проективных (левых) Λ-модулей. Введём следующий K-линейный функтор $\sigma:\rho\Lambda\to\rho\Lambda$. Пусть $V=\bigoplus\limits_{l\in L}P_{[x_{2,l}][x_{1,l}]}$. Тогда

$$\sigma(V)=\bigoplus_{l\in L}P_{[\sigma(x_{2,l})][x_{1,l}]}$$

(здесь $\sigma(x)=y \Leftrightarrow \sigma(e_x)=e_y$). Пусть V_1, V_2 – модули из $\rho\Lambda$, $V_1=\bigoplus\limits_{l\in L}P_{[x_{2,l}][x_{1,l}]}$, $d:V_1\to V_2$ – гомоморфизм Λ-модулей, такой, что $d|_{P_{[x_{2,l}][x_{1,l}]}}=\sum\limits_{t\in T}u_{l,t}w_{l,t,1}\otimes w_{l,t,2}$, где $u_{l,t}\in K$, $w_{l,t,1},w_{l,t,2}\in R$. Тогда $\sigma(d)|_{P_{[\sigma(x_{2,l})][x_{1,l}]}}=\sum\limits_{t\in T}u_{l,t}\sigma(w_{l,t,1})\otimes w_{l,t,2}$.

Пусть $\mu:Q_0\to R$ – гомоморфизм, определённый на $w_1\otimes w_2\in P_{[x][x]}$ по формуле $\mu(w_1\otimes w_2)=w_1w_2$. Определим гомоморфизмы $d_m: Q_{m+1}\to Q_m$ для $0\leqslant m\leqslant 4$.

Замечание 1 Далее для неразложимого проективного Λ-модуля P мы будем записывать элементы P^2 в виде столбцов $\binom{x_1}{x_2}$, где x_1, $x_2\in P^2$. Соответственно, если T и T' – Λ-модули, w_1, $w_2\in \mathrm{Hom}(T,P)$, w_1', $w_2'\in\mathrm{Hom}(P,T')$, то $\binom{w_1}{w_2}\in\mathrm{Hom}(T,P^2)$, а $(w_1',w_2')\in\mathrm{Hom}(P^2,T')$.

Определим d_0 на прямых слагаемых Q_1 следующим образом:

$$d_0|_{P_{[i][\widehat{i}\,]}}=\alpha_i\otimes e_{\widehat{i}}-e_i\otimes\alpha_i \qquad (1\leqslant i\leqslant 3n),$$
$$d_0|_{P_{[\widehat{i+1}\,][i]}}=\beta_i\otimes e_i-e_{\widehat{i+1}}\otimes\beta_i \qquad (1\leqslant i\leqslant 3n).$$

Определим d_1 на прямых слагаемых Q_2 следующим образом:

$$
\begin{aligned}
d_1|_{P^2_{[\widehat{i+1}\,][\widehat{i}\,]}} &= \big((\beta_i - \beta_{i+n}) \otimes e_{\widehat{i}} \,+ e_{\widehat{i+1}} \otimes (\alpha_i - \alpha_{i+n}),\\
&\quad (\beta_{i+n} - \beta_{i+2n}) \otimes e_{\widehat{i}} \,+ e_{\widehat{i+1}} \otimes (\alpha_{i+n} - \alpha_{i+2n})\big) \quad (1 \leqslant i \leqslant n),\\
d_1|_{P_{[i+qn+1][i]}} &= \alpha_{i+qn+1} \otimes e_i - e_{i+qn+1} \otimes \beta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant 3n, q \in \{1,2\}).
\end{aligned}
$$

Определим d_2 на прямых слагаемых Q_3 следующим образом:

$$
\begin{aligned}
d_2|_{P_{[i+1][\widehat{i}\,]}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{i+1} \otimes e_{\widehat{i}} \end{pmatrix} + e_{i+1} \otimes (\alpha_{i+2n} - \alpha_{i+n}) \ (1 \leqslant i \leqslant n),\\
d_2|_{P_{[i+1][\widehat{i}\,]}} &= -\begin{pmatrix} \alpha_{i+1} \otimes e_{\widehat{i}} \\ \alpha_{i+1} \otimes e_{\widehat{i}} \end{pmatrix} + e_{i+1} \otimes (\alpha_{i+2n} - \alpha_{i+n}) \ (n+1 \leqslant i \leqslant 2n),\\
d_2|_{P_{[i+1][\widehat{i}\,]}} &= \begin{pmatrix} \alpha_{i+1} \otimes e_{\widehat{i}} \\ 0 \end{pmatrix} + e_{i+1} \otimes (\alpha_{i+2n} - \alpha_{i+n}) \ (2n+1 \leqslant i \leqslant 3n),\\
d_2|_{P_{[\widehat{i+2}\,][i]}} &= (\beta_{i+2n+1} - \beta_{i+n+1}) \otimes e_i + \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\widehat{i+2}} \otimes \beta_i \end{pmatrix} \ (0 \leqslant i \leqslant n-1),\\
d_2|_{P_{[\widehat{i+2}\,][i]}} &= (\beta_{i+2n+1} - \beta_{i+n+1}) \otimes e_i - \begin{pmatrix} e_{\widehat{i+2}} \otimes \beta_i \\ e_{\widehat{i+2}} \otimes \beta_i \end{pmatrix} \ (n \leqslant i \leqslant 2n-1),\\
d_2|_{P_{[\widehat{i+2}\,][i]}} &= (\beta_{i+2n+1} - \beta_{i+n+1}) \otimes e_i + \begin{pmatrix} e_{\widehat{i+2}} \otimes \beta_i \\ 0 \end{pmatrix} \ (2n \leqslant i \leqslant 3n-1).
\end{aligned}
$$

Определим d_3 на прямых слагаемых Q_4 следующим образом:

$$
\begin{aligned}
d_3|_{P_{[\widehat{i+2}\,][\widehat{i}\,]}} &= (\beta_{i+1} + \beta_{i+n+1} + \beta_{i+2n+1}) \otimes e_{\widehat{i}}\\
&\quad + e_{\widehat{i+2}} \otimes (\alpha_i + \alpha_{i+n} + \alpha_{i+2n}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n),\\
d_3|_{P_{[i+2][i]}} &= \alpha_{i+2} \otimes e_i - e_{i+2} \otimes \beta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant 3n).
\end{aligned}
$$

Определим d_4 на прямых слагаемых $Q_5 = \sigma(Q_0)$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
d_4|_{P_{[\widehat{i+3}\,][\widehat{i}\,]}} &= \beta_{i+2}\alpha_{i+2} \otimes e_{\widehat{i}} \,- \sum_{q=0}^{2} \beta_{i+qn+2} \otimes \alpha_{i+qn} - e_{\widehat{i+3}} \otimes \beta_i\alpha_i\\
&\qquad (1 \leqslant i \leqslant n),\\
d_4|_{P_{[i+3][i]}} &= \alpha_{i+3}\beta_{i+2} \otimes e_i + \alpha_{i+3} \otimes \beta_i - e_{i+3} \otimes \alpha_{i+1}\beta_i\\
&\qquad (1 \leqslant i \leqslant 3n).
\end{aligned}
$$

Теорема 2. *Минимальная Λ-проективная резольвента модуля R представляется последовательностью:*

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\mu} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \dots, \tag{3.6}$$

где модули Q_i для $i = 0, ..., 4$ и гомоморфизмы d_i для $i = 0, ..., 4$ описаны выше; кроме того, $Q_{t+5l} = \sigma^l(Q_t)$, $d_{t+5l} = \sigma^l(d_t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 4$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $d_i d_{i+1} = 0$ для $0 \leqslant i \leqslant 4$, $\mu d_0 = 0$ и $d_4\sigma(d_0) = 0$. Для $i = t+5l$, где $0 \leqslant t \leqslant 4$, равенство $d_i d_{i+1} = 0$ получается применением σ^l к одному из только что перечисленных равенств. Следовательно, $d_i d_{i+1} = 0$ для $i \geqslant 0$. Из леммы 2 и определения Q_i и d_i ясно, что для любого $x \in \mathcal{Q}_0$ последовательность

$$0 \leftarrow R \otimes_R S_x \xleftarrow{\mu \otimes_R 1_{S_x}} Q_0 \otimes_R S_x \xleftarrow{d_0 \otimes_R 1_{S_x}} Q_1 \otimes_R S_x \xleftarrow{d_1 \otimes_R 1_{S_x}} \dots$$

является минимальной проективной резольвентой R-модуля S_x. Следовательно, по теореме 1 последовательность (3.6) является минимальной Λ-проективной резольвентой модуля R.

Следствие 1. *Период минимальной бимодульной резольвенты алгебры R равен $5n$, если $\mathrm{char}\, k = 2$ или $n \vdots 2$, и равен $10n$ в противном случае.*

Доказательство. Следует из предложения 1 и теоремы 2.

Литература

1. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math. **1404** (1989), 108–126.
2. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
3. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ. **343** (2007), 121–182.
4. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ. **365** (2009), 63–121.
5. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II: *серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ. **349** (2007), 53–134.
6. Ю. В. Волков, *Классы стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. — Вестник С.-Пб. ун-та, Сер. 1, Мат., мех., астр. (2008), Вып. 1, 15–21.

Volkov Y. V., Generalov A. I., Ivanov S. O. On construction of bimodule resolutions with the help of Happel's lemma.

A criterion for the sequence obtained with the help of Happel's lemma to be a minimal bimodule projective resolution is proved. This criterion is used to construct bimodule resolution for a family of self-injective algebras of tree class D_4.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: general@pdmi.ras.ru,
wolf86_666@list.ru,
sepa_cmd@mail.ru

Поступило 13 марта 2010 г.