Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

Н. А. Вавилов, С. С. Синчук

РАЗЛОЖЕНИЯ ТИПА ДЕННИСА–ВАСЕРШТЕЙНА

В настоящей работе мы доказываем обобщение разложения Денниса–Васерштейна для произвольной пары максимальных параболических подгрупп P_r и P_s в $\mathrm{GL}(n,R)$, в предположении $r-s \geq \mathrm{sr}\,(R)$. Обычное разложение Денниса–Васерштейна получается, если взять здесь $r=n-1$, $s=1$.

Введение

Самым важным фактом про линейные группы над телами является *разложение Брюа*, которое утверждает, что

$$\mathrm{GL}(n,K) = B(n,K)W_nU(n,K),$$

где $B(n,K)$ – группа верхних треугольных матриц, $U(n,K)$ – группа верхних унитреугольных матриц, а $W_n \cong S_n$ – группа матриц перестановки.

Естественно пытаться получить аналогичные результаты для общего ассоциативного кольца R с 1. Для полулокального кольца R выполняется *разложение Гаусса*

$$\mathrm{GL}(n,R) = B(n,R)U^-(n,R)U(n,R),$$

где $U^-(n,R)$ – группа нижних унитреугольных матриц. Для коммутативного случая доказательство можно найти, *например,* в [21, 7], притом в более общей ситуации групп Шевалле. В действительности,

---

Ключевые слова: полная линейная группа, элементарная группа, параболические подгруппы, стабильный ранг, разложение Денниса–Васерштейна.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта РФФИ 08-01-00756 “Разложения алгебраических групп и их приложения в теории представлений и K-теории”. Кроме того, на заключительном этапе работа первого автора была поддержана проектами РФФИ 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-00878, 09-01-91333 и 09-01-90304. Работа второго автора поддержана проектом РФФИ 10-01-92651 “Высшие законы композиции, алгебраическая K-теория и алгебраические группы” .

как замечено в [1], это разложение имеет место *тогда и только тогда*, когда $\mathrm{sr}\,(R) = 1$.

С другой стороны, для колец размерности $\geqslant 1$ группа $\mathrm{GL}(n, R)$, вообще говоря, не допускает никаких подобных разложений в терминах элементарных образующих.

• Во-первых, она вообще не обязана порождаться элементарными образующими, так что вместо $\mathrm{GL}(n, R)$ здесь нужно рассматривать элементарную подгруппу $E(n, R)$ либо полную элементарную подгруппу $\mathrm{GE}(n, R)$.

• Однако, даже в тех случаях, когда группа $\mathrm{GL}(n, R)$ порождается элементарными образующими, она не обязана иметь по отношению к ним конечную ширину. Как заметил Вильберд ван дер Каллен [13], простейшим примером такого кольца является *эвклидово* кольцо $R = \mathbb{C}[x]$. См. также [12], где можно найти элементарное доказательство более общего факта.

Это значит, что нетривиальные обобщения разложений Брюа и Гаусса выполняются лишь при каких-то дополнительных условиях на кольцо и должны формулироваться в каких-то других терминах[1].

Наиболее известны разложения, которые формулируются в терминах условий стабильности и параболических подгрупп. Разумеется, до [15, 22] термин “параболические подгруппы” в этом контексте не произносился и все вычисления описывлись как явные разложения матриц. Вот два наиболее известных разложения такого типа, которые формулируются в терминах стабильного ранга $\mathrm{sr}\,(R)$ кольца R.

В доказательстве сюръективной стабилизации для функтора K_1 используется *разложение Басса–Кольстера*, которое утверждает, что при $n > \mathrm{sr}\,(R)$ имеет место равенство

$$\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{GL}(n-1, R)U_{n-1}U_{n-1}^{-}U_{n-1}U_{n-1}^{-}.$$

Здесь $\mathrm{GL}(n-1, R)$ рассматривается как подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$ посредством stability map

$$\mathrm{GL}(n-1, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[1] Для *стабильных* классических групп разложения Брюа и Гаусса допускают замечательное обобщение, *разложение Шарпа* $G = BWUU^{-}$, см. [19, 20]. Однако, как мы только что отметили, для групп конечного ранга никаких разложений такого типа не существует.

а группы U_{n-1} и U^-_{n-1} – это унипотентные радикалы противоположных параболических подгрупп P_{n-1} и P^-_{n-1} (определения этих и всех встречающихся далее подгрупп напоминаются в §2). Это разложение было по существу открыто Хайманом Бассом [10] и систематически изучено Манфредом Кольстером [14].

С другой стороны, в доказательстве инъективной стабилизации для функтора K_1 и сюръективной стабилизации для функтора K_2 используется *разложение Денниса–Васерштейна*, которое утверждает, что при $n > \operatorname{sr}(R) + 1$ имеет место равенство

$$E(n, R) = PX_{n1}Q,$$

где $P = \mathrm{EP}_1$ и $Q = \mathrm{EP}_{n-1}$ – *элементарные* параболические подгруппы, а X_{n1} – корневая подгруппа. Собственно для группы $E(n, R)$ это разложение впервые заметил Кейт Деннис [11] в связи с сюръективной стабилизацией K_2. Леонид Васерштейн [3] использовал разложения такого типа для других классических групп в связи с инъективной стабилизацией K_1.

В дальнейшем в работах Андрея Суслина и Марата Туленбаева [6], Майкла Стайна [22] и Евгения Плоткина [4, 5, 16, 17], а также резюмирующей их статье [18], были получены простые доказательства разложений такого типа и их обобщений на группы Шевалле. В работах Энтони Бака, Виктора Петрова и Танг Гуопинга [8, 9] это разложение обобщено на унитарные группы. Однако, в связи с заточенностью *всех* этих работ под доказательство стабилизации, в них всегда рассматривались только пары *терминальных* параболических подгрупп, отвечающих конечным вершинам диаграммы Дынкина. Дело в том, что при этом возникают самые слабые условия стабильности на кольцо R.

В настоящей работе мы начинаем систематическое изучение разложений такого типа для *произвольных*, а не только терминальных параболических подгрупп. Нашей основной целью здесь является доказательство следующего результата, который интересен как сам по себе, так и, в первую очередь, с точки зрения приложений к различным задачам описания подгрупп, порождения, предстабилизации и т.д.

Теорема. *Пусть $P = \mathrm{EP}_r$ и $Q = \mathrm{EP}_s$ – элементарные максимальные параболические подгруппы группы $\mathrm{GL}(n, R)$, $1 \leq s < r \leq n-1$, и пусть U^-_{PQ} – пересечение унипотентных радикалов противоположных* *параболических подгрупп. В предположении $r-s \geq \mathrm{sr}\,(R)$ имеет место разложение*

$$E(n,R) = PU^{-}_{PQ}Q.$$

Как уже фактически отмечалось, эта теорема известна в следующих двух крайних частных случаях.

• В предположении $\mathrm{sr}\,(R)=1$. В этом случае теорема вытекает из разложения Гаусса, притом даже при $r=s$.

• В случае, когда $r=n-1$, $s=1$, а $n \geqslant \mathrm{sr}\,(R)+2$ наша теорема превращается в обычное разложение Денниса–Васерштейна, доказанное в [6].

Настоящая статья представляет собой часть дипломной работы второго автора, выполненной под руководством первого автора. В следующей нашей работе аналогичный результат доказан для всех пар максимальных параболических подгрупп в расщепимых классических группах над коммутативными кольцами. Доказательство аналогичных результатов для исключительных групп *значительно* сложнее, так как в силу более сложного строения унипотентных радикалов при этом возникают новые условия стабильности. К сожалению, пока нам удалось рассмотреть не все, а лишь некоторые пары максимальных параболических подгрупп.

§1. Основные обозначения

Под коммутатором двух элементов x, y произвольной группы G всегда понимается их левонормированный коммутатор $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$, Как обычно, $x^y = y^{-1}xy$ обозначает правый сопряженный к x при помощи y.

Через R обозначается произвольное ассоциативное кольцо с единицей, а через R^* – его группа обратимых элементов. Как обычно, $M(m,n,R)$ – множество матриц размера $m\times n$, $M(n,R) = M(n,n,R)$ – кольцо квадратных матриц размера n. Далее, $\mathrm{GL}(n,R) = M(n,n,R)^*$ – полная линейная группа степени n.

Через a_{ij} обозначается коэффициент матрицы a в позиции (i,j), таким образом, $a=(a_{ij})$. Через $a^{-1}=(a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица. Через a_{*j} обозначется j-й столбец матрицы a, а через a_{i*} – ее i-я строка. Как обычно, e – единичная матрица, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой в позиции (i,j) стоит 1 и нули во всех остальных позициях.

Как обычно, $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\xi \in R$, обозначает элементарную трансвекцию, а через $X_{ij} = \{t_{ij}(\xi) \mid \xi \in R\}$ обозначается корневая подгруппа. Обозначим через $E(n, R)$ подгруппу в $\mathrm{GL}(n, R)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями:

$$E(n,R) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in R,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle\,.$$

В дальнейшем мы будем без всякого специального упоминания пользоваться стандартными соотношениями между элементарными трансвекциями, такими как аддитивность $t_{ij}(\xi)t_{ij}(\zeta) = t_{ij}(\xi + \zeta)$ и коммутационная формула Шевалле $[t_{ij}(\xi), t_{jh}(\zeta)] = t_{ih}(\xi\zeta)$.

Рассмотрим свободный правый R-модуль R^n ранга n. Как обычно, элементы R^n интерпретируются как столбцы высоты n с компонетами из R. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис R^n. Аналогично, свободный левый R-модуль ${}^nR$ ранга n интерпретируется как модуль строк длины n с компонентами из R. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – его стандартный базис.

Напомним, что матрица вида $e + u\xi v$, где $u \in R^n$, $v \in {}^nR$, $\xi \in R$, причем $vu = 0$, называется трансвекцией. Каждая элементарная трансвекция является трансвекцией в этом более общем смысле, $t_{ij}(\xi) = e + e_i\xi f_j$. Следующая лемма типа Уайтхеда очевидна и хорошо известна. По существу она восходит еще к работе Басса [10] (доказательство приведено, *например,* в [23], лемма 3).

Лемма 1. *Пусть $u \in R^n$ и $v \in {}^nR$ – столбец и строка такие, что $vu = 0$, причем в u или v есть хотя бы одна нулевая компонента. Тогда для любого $\xi \in R$ трансвекция $e + u\xi v$ принадлежит $E(n, R)$.*

Строка $(a_1, \dots, a_n) \in {}^nR$ называется унимодулярной, если ее компоненты $a_1, \dots, a_n$ порождают R как *правый* идеал,

$$a_1R + \ldots + a_nR = R$$

или, что то же самое, если найдутся $b_1, \dots, b_n \in R$ такие, что $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 1$.

Стабильным рангом $\mathrm{sr}\,(R)$ кольца R называется наименьшее n такое, что любая унимодулярная строка $(a_1, \dots, a_{n+1})$ длины $n+1$ стабильна, иными словами, найдутся элементы $b_1, \dots, b_n \in R$ такие, что строка

$$(a_1 + a_{k+1}b_1, a_2 + a_{k+1}b_2, \dots, a_k + a_{k+1}b_k)$$

длины n унимодулярна. Если такого n не существует, то пишут $\mathrm{sr}(R) = \infty$. Если $n > \mathrm{sr}(R)$, то любая унимодулярная строка длины n стабильна [2].

Ясно, что если $n > \mathrm{sr}(R) + 1$, то процесс прибавления последней компоненты можно итерировать. Поэтому следующая лемма очевидна (и доказана, *например*, в [2]).

Лемма 2. *Пусть $n > m \geqslant \mathrm{sr}(R)$, а $(a_1, \dots, a_n) \in {}^nR$ – унимодулярная строка длины n. Тогда найдется матрица $b = (b_{ij}) \in M(n-m, m, R)$ такая, что строка*

$$(a_1 + a_{m+1}b_{m+1,1} + \ldots + a_nb_{n1}, \dots, a_m + a_{m+1}b_{m+1,m} + \ldots + a_nb_{nm})$$

унимодулярна.

§2. Максимальные параболические подгруппы

Через P_i мы обозначаем i-ю стандартную максимальную параболическую подгруппу в $G = \mathrm{GL}(n, R)$. С геометрической точки зрения подгруппа P_i, $i = 1, \dots, n-1$, это в точности стабилизатор подмодуля V_i в R^n, порожденного $e_1, \dots, e_i$. В матрицах P_i реализуется как группа верхних блочно треугольных матриц,

$$P_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in \mathrm{GL}(i, R),\ y \in M(i, n-i, R),\ z \in \mathrm{GL}(n-i, R) \right\}.$$

Разложение Леви утверждает, что группа $P = P_i$ представляется в виде полупрямого произведения $P_i = L_i \leftthreetimes U_i$ подгруппы Леви $L_P = L_i$ и унипотентного радикала $U_P = U_i$, где

$$\begin{aligned} L_i &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in \mathrm{GL}(i, R),\ z \in \mathrm{GL}(n-i, R) \right\}, \\ U_i &= \left\{ \begin{pmatrix} e & y \\ 0 & e \end{pmatrix},\ y \in M(i, n-i, R) \right\}. \end{aligned}$$

Иными словами, $U_P \trianglelefteq P$ и каждый элемент $g \in P$ может быть единственным образом представлен в виде $g = zu$, где $z \in L_P$, а $u \in U_P$. Или, что то же самое, в виде $g = vz$, для того же самого $z \in L_P$ и $v = zuz^{-1} \in U_P$.

Вместе с подгруппой $P = P_i$ рассматривается также противоположная подгруппа $P^- = P_i^-$, стабилизирующая подмодуль в V, порожденный $e_{i+1}, \dots, e_n$. Таким образом, P_i^- – подгруппа типа P_{n-i}, а вовсе не типа P_i. В матрицах P_i^- реализуется как

$$P_i^- = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix},\ x \in \mathrm{GL}(i,R),\ y \in M(n-i,i,R),\ z \in \mathrm{GL}(n-i,R) \right\}.$$

иными словами, $P^- = P_i^- = P_i^t$. Таким образом, (стандартные) подгруппы Леви P и P^- совпадают, $L_P^- = L_P$. Но вот унипотентный радикал $U_P^- = U_i^-$ группы $P^- = P_i^-$ транспонирован к унипотентному радикалу $U_P = U_i$ и, таким образом, имеет вид

$$U_i^- = \left\{ \begin{pmatrix} e & 0 \\ y & e \end{pmatrix},\ y \in M(n-i,i,R) \right\}.$$

Разложение Леви для P^- утверждает, что $P^- = L_P \leftthreetimes U_P^-$.

Поскольку в дальнейшем мы работаем внутри элементарной группы $E(n,R)$, мы должны рассматривать не сами параболические подгруппы P_i, а соответствующие *элементарные* параболические подгруппы EP_i. По определению

$$\mathrm{EP}_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in E(i,R),\ y \in M(i,n-i,R),\ z \in E(n-i,R) \right\}.$$

Обратите внимание, что, вообще говоря, EP_i *строго* меньше, чем $P_i \cap E(n,R)$.

Ясно, что элементарная параболическая подгруппа $P = \mathrm{EP}_i$ представляется в виде полупрямого произведения $\mathrm{EP}_i = \mathrm{EL}_i \leftthreetimes U_i$ элементарной подгруппы Леви $L_P = \mathrm{EL}_i$ и унипотентного радикала $U_P = U_i$. Унипотентный радикал совпадает с рассматривавшимся ранее, а вот элементарная подгруппа Леви имеет вид

$$\mathrm{EL}_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in E(i,R),\ z \in E(n-i,R) \right\}.$$

Иными словами, она состоит из блочных матриц, для которых *каждый* блок – а не просто вся матрица! – элементарен.

Начиная с этого места мы фиксируем индексы $1 \leqslant s < r \leqslant n-1$ и рассматриваем элементарные параболические подгруппы $P = \mathrm{EP}_r$ и

$Q = \mathrm{EP}_s$. В дальнейшем все символы L_P, U_P, U_P^- и L_Q, U_Q, U_Q^- относятся именно к этим подгруппам P и Q. В частности, рассматриваются элементарные подгруппы Леви L_P и L_Q. Кроме того, положим $U_{PQ} = U_P \cap U_Q$ и $U_{PQ}^- = U_P^- \cap U_Q^-$.

В дальнейшем все элементы группы $E(n, R)$ записываются как блочные матрицы в соответствии с разбиением $(s, r-s, n-r)$ степени n. Таким образом, сами подгруппы P и Q имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

а противоположные к ним подгруппы P^- и Q^- – вид

$$P^- = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad Q^- = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Для этого разбиения подгруппы Леви выглядят следующим образом

$$L_P = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad L_Q = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

При этом всюду здесь все большие диагональные блоки элементарны.

С другой стороны, для того же разбиения унипотентные радикалы имеют вид

$$U_P = \begin{pmatrix} e & 0 & * \\ 0 & e & * \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad U_Q = \begin{pmatrix} e & * & * \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad U_{PQ}^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ * & 0 & e \end{pmatrix},$$

а противоположные унипотентные радикалы, соответственно, вид

$$U_P^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ * & * & e \end{pmatrix}, \quad U_Q^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ * & e & 0 \\ * & 0 & e \end{pmatrix}, \quad U_{PQ} = \begin{pmatrix} e & 0 & * \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Эти соглашения и обозначения используются до конца статьи.

§3. Доказательство теоремы

Положим $Y = PU^-_{PQ}Q$, мы хотим показать, что $Y = E(n, R)$. Заметим, что для этого достаточно доказать включение $E(n, R)Y \subseteq Y$.

Следующий факт хорошо известен и сразу вытекает из коммутационной формулы Шевалле.

Лемма 3. *Группа $E(n, R)$ порождается элементарной параболической подгруппой P и элементарной корневой подгруппой*

$$X = X_{r+1,r} = \{t_{r+1,r}(\xi), \xi \in R\}.$$

Таким образом, нам достаточно доказать включения $PY \subseteq Y$ и $XY \subseteq Y$. Так как P является подгруппой, первое из них очевидно, так что для доказательства теоремы нам осталось убедиться в том, что $XY \subseteq Y$.

Лемма 4. *Предположим, что найдется подмножество $\widetilde{P} \subseteq P$ такое, что*

• *для каждого $p \in P$ существует элемент $x \in Q \cap L_P$ такой, что $px \in \widetilde{P}$,*

• *для каждого $p \in \widetilde{P}$ существует элемент $x \in Q^- \cap P$ такой, что $(X_{-\alpha_r})^{px} \subseteq Q$.*

Тогда $Y = E(n, R)$.

Доказательство. Запишем произвольный элемент y из Y в виде $y = puq$, где $p \in P$, $u \in U^-_{PQ}$, а $q \in Q$. По первому условию леммы найдется $x \in Q \cap P$ такой, что $px \in \widetilde{P}$. Перепишем y в виде $y = (px)(x^{-1}ux)(x^{-1}q)$. Очевидно, что $x^{-1}ux \in U^-_P$, поэтому

$$y \in \widetilde{P}U^-_P Q = \widetilde{P}U^-_{PQ}(U^-_P \cap L_Q)Q = \widetilde{P}U^-_{PQ}Q,$$

откуда в свою очередь следует включение $Y \subseteq \widetilde{P}U^-_{PQ}Q$.

С другой стороны, по второму условию леммы для каждого $p \in \widetilde{P}$ найдется такое $x \in Q^- \cap P$, что

$$Xp \subseteq PQx^{-1} = (PU_Q)(L_Q U^-_Q) = PQ^-.$$

Отсюда следует включение $X\widetilde{P} \subseteq PQ^-$.

Чтобы завершить доказательство леммы, остается собрать эти включения вместе,

$$\begin{aligned} XY &\subseteq X_{-\alpha_r}\widetilde{P}U^-_{PQ}Q \subseteq PQ^-U^-_{PQ}Q = PQ^-Q \\ &= P(U^-_Q \cap L_P)U^-_{PQ}L_QQ = Y. \end{aligned}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нам остается лишь предъявить *какое-то* множество $\widetilde{P}$ с указанными свойствами. В качестве такого $\widetilde{P}$ мы возьмем множество, состоящее из всех матриц $g \in P$, для которых строка $(g_{r,s+1}, g_{r,s+1}, \dots, g_{r,r})$ унимодулярна. Другими словами, $\widetilde{P}$ состоит из матриц $g \in P$ таких, что, если записать g в блочной форме

$$g = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & 0 & g^{33} \end{pmatrix},$$

то нижняя строка блока g^{22} унимодулярна.

Нам осталось проверить, что так определенное множество $\widetilde{P}$ действительно обладает постулированными в лемме 4 свойствами. Следующая лемма – *единственное* место в доказательстве, где используются условия стабильности.

Лемма 5. *Для каждого $p \in P$ найдется элемент $x \in Q \cap L_P$ такой, что $px \in \widetilde{P}$.*

Доказательство. Возьмем матрицу $p \in P$ и запишем ее как блочную матрицу в соответствии с разбиением $(s, r-s, n-r)$:

$$p = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & 0 & g^{33} \end{pmatrix}.$$

Блочная матрица $\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$ обратима, так что, в частности, ее нижняя строка $(g_{r1}, \dots g_{rr})$ унимодулярна.

Так как $r - s > \mathrm{sr}\,(R)$, то по лемме 2 можно найти матрицу $a \in M(s, r-s, R)$ такую, что строка

$$(g_{r1}, \dots, g_{rs})a + (g_{r,s+1}, \dots, g_{rr})$$

является унимодулярной строкой длины $r - s$. Теперь в качестве искомого x можно взять

$$x = \begin{pmatrix} e & a & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \in Q \cap L_P.$$

Лемма 6. *Для каждого $p \in \widetilde{P}$ найдется элемент $x \in Q^- \cap P$ такой, что $X^{px} \subseteq Q$.*

Доказательство. Пусть $p \in \widetilde{P}$, а $t_{r+1,r}(\xi) \in X$. По определению $\widetilde{P}$ можно найти $c_{s+1}, \dots, c_r$ такие, что

$$\sum_{i=s+1}^{r} p_{ri} c_i = 1.$$

Полагая теперь

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -c_i p_{rj}, && s+1 \le i \le r, \quad 1 \le j \le s, \\ a_{in} &= -c_i p_{rj}, && s+1 \le i \le r, \\ a_{ij} &= 0, && \text{иначе}, \end{aligned}$$

мы можем определить матрицу x равенством

$$x = e + a \in Q^- \cap P.$$

Легко видеть, что элементы $v_{r1}, \dots, v_{rs}$ v_{rn} матрицы $v = px$ нулевые. Умножение v на $t_{r+1,r}(\xi)$ слева прибавляет к $r+1$-й строке матрицы v ее r-ю строку. Поэтому первые s столбцов матрицы $t_{r+1,r}(\xi)v$ такие же, как у матрицы v, так что первые s столбцов матрицы $v^{-1}t_{r+1,r}(\xi)v$ совпадают со соответствующими столбцами единичной матрицы.

Чтобы убедиться, что полученная матрица лежит в Q, представим ее в виде

$$\begin{aligned} v^{-1}t_{r+1,r}(\xi)v &= e + v'_{*,r+1}\xi v_{r,*} \\ &= \left(e + \left(v'_{*,r+1} - \sum_{i=1}^{s} v'_{i,r+1} e_i\right)\xi v_{r,*}\right) \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=s+1}^{n} t_{ij}(v'_{i,r+1}\xi v_{r,j}). \end{aligned}$$

Первый множитель лежит в L_Q по лемме 1, так как $v_{rn} = 0$, а второй множитель лежит в U_Q по самому определению.

Теорема сразу вытекает из лемм 4–6.

В заключение первый автор благодарит Женю Плоткина, Майка Стайна и Андрея Суслина за многолетнюю дружбу. В действительности, настоящая работа представляет собой обработку темы, которую мы обсуждали весной 2001 года в Эванстоне и зимой 2002 года в Рамат Гане. Основные, использованные в настоящей работе, соображения являются вариациями на тему идей Майка и Андрея и восходят к нашей (так до сих пор не опубликованной!) работе [18]. Мы с Женей впервые узнали об этом в 1976 году, из препринта [22], который Майк прислал Андрею, и из работы Андрея и Марата [6].

Литература

1. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 20–43.
2. Л. Н. Васерштейн, *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств.* — Функц. Анализ **5**, No. 2 (1971), 102–110.
3. Л. Н. Васерштейн, *Стабилизация классических групп над кольцами.* — Мат. Сб. **93**, No. 2 (1974), 268–295.
4. Е. Б. Плоткин, *Сетевые подгруппы групп Шевалле и вопросы стабилизации* K_1*-функтора.* Канд. дисс. ЛГУ (1985), 1–118.
5. Е. Б. Плоткин, *Сюръективная стабилизация* K_1*-функтора для некоторых исключительных групп Шевалле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **198** (1991), 65–88.
6. А. А. Суслин, М. С. Туленбаев, *Теорема о стабилизации для* K_2*-функтора Милнора.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 131–152.
7. E. Abe, K. Suzuki, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 185–198.
8. A. Bak, V. Petrov, Guoping Tang, *Stability for quadratic* K_1. — K-Theory **30**, No. 1 (2003), 1–11.
9. A. Bak, Guoping Tang, *Stability for hermitian* K_1. — J. Pure Appl. Algebra **150** (2000), 107–121.
10. H. Bass, K*-theory and stable algebra.* — Publ. Math. Inst. Hautes Ét. Sci. **22** (1964), 5–60.
11. K. Dennis, *Stability for* K_2. — Lect. Notes. Math. **353** (1973), 85–94.
12. I. V. Erovenko, $\mathrm{SL}_N(F[x])$ *is not boundedly generated by elementary matrices: explicit proof.* — *Electr. J. Linear Algebra* **11** (2004), 162–167.
13. W. van der Kallen, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}[x])$ *does not have bounded word length.* — Lect. Notes Math., Springer **966** (1982), 357–361.
14. M. Kolster, *On injective stability for* K_2. — Lect. Notes Math. **966** (1982), 128–168.

15. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. École Norm. Sup., 4ème sér. No. 2 (1969),1–62.
16. E. Plotkin, *Stability theorems for K-functors for Chevalley groups.* — In: Proc. Conf. Non-Associative Algebras and Related Topics (Hiroshima–1990). London et al.: World Sci. (1991), pp. 203–217.
17. E. Plotkin, *On the stability of the* K_1*-functor for Chevalley groups of type* E_7. — J. Algebra **210** (1998), 67–85.
18. E. Plotkin, M. R. Stein, N. Vavilov, *Stability of* K*-functors modeled on Chevalley groups, revisited.* (To appear).
19. R. W. Sharpe, *On the structure of the unitary Steinberg group.* — Ann. Math. **96**, No. 3 (1972), 444–479.
20. R. W. Sharpe, *On the structure of the Steinberg group* $\mathrm{St}(\Lambda)$. — J. Algebra **68** (1981), 453–467.
21. M. R. Stein, *Surjective stability in dimension* 0 *for* K_2 *and related functors.* — Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 176–191.
22. M. R. Stein, *Stability theorems for* K_1, K_2 *and related functors modeled on Chevalley groupes.* — Japan J. Math. **4**, No. 1 (1978), 77–108.
23. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.

Vavilov N. A., Sinchuk S. S. Dennis–Vaserstein type decompositions

We prove a generalisation of Dennis–Vaserstein decomposition for an arbitrary pair of maximal parabolic subgroups P_r and P_s in the general linear group $\mathrm{GL}(n, R)$, provided that $r - s \geq \mathrm{sr}\,(R)$. The usual Dennis–Vaserstein decomposition is the special case where $r = n - 1$, $s = 1$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 13 марта 2010 г.